



УДК 539.3

<http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.04.041>

**А. М. Багно**

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев

*E-mail:* desc@inmech.kiev.ua

## **О влиянии вязкой жидкости на квазилэмбовские волны в упругом слое, взаимодействующем с жидким слоем**

*(Представлено академиком НАН Украины А. Н. Гузем)*

*На основе трехмерных линеаризованных уравнений Навье–Стокса для вязкой жидкости и линейных уравнений классической теории упругости для упругого слоя построены дисперсионные кривые и исследовано распространение квазилэмбовских волн в широком диапазоне частот. Проанализировано влияние вязкости жидкости, толщин упругого и жидкого слоев на фазовые скорости и коэффициенты затухания квазилэмбовских мод. Числовые результаты приведены в виде графиков и дан их анализ.*

**Ключевые слова:** дисперсия волн, упругий слой, слой вязкой сжимаемой жидкости, квазилэмбовские моды.

Волны, распространяющиеся вдоль границы контакта упругого и жидкого слоев, относятся к числу обобщений основательно исследованных основных типов акустических волн: Рэлея, Стоунли, Лява и Лэмба. Обзор работ и анализ результатов, полученных в рамках классической теории упругости и модели идеальной сжимаемой жидкости [1–3], а также с привлечением более общих моделей твердых и жидких сред [4–6], приведены в [1–6]. В частности, в обзорной работе [4] проанализированы теоретические методы, применяемые для изучения волн Лэмба в анизотропных пластинах. Рассмотренные задачи и результаты, полученные с учетом вязкости жидкости, содержатся в работах [5–12]. Статья [3] посвящена исследованию локализации поверхностных волн в системе упругий слой на идеальном жидком полупространстве. При этом проанализировано поведение волн Рэлея, Стоунли и трех высших квазилэмбовских мод в высокочастотной части спектра. Численно определены величины фазовых скоростей поверхностных волн и трех первых мод высокого порядка при больших значениях волнового числа. Показано, что эффекты упруго-жидкостного взаимодействия и их влияние на фазовые скорости существенно зависят от механических свойств

© А. М. Багно, 2016

жидкости и упругого материала. Вместе с тем, значительное практическое использование акустических волн требует учета свойств, которые присущи реальным средам. К числу таких факторов относится вязкость жидкости. В настоящей работе модель вязкой сжимаемой ньютоновской жидкости привлекается для исследования распространения волн в системе слой жидкости–упругий слой. При этом используются трехмерные линеаризованные уравнения Навье–Стокса для жидкости и линейные уравнения классической теории упругости для твердого тела. Предполагается, что жидкость находится в состоянии покоя и тепловые эффекты не учитываются. В качестве подхода выбраны постановки задач и метод, основанные на применении представлений общих решений уравнений движения вязкой сжимаемой жидкости и упругого тела, полученные в работах [7–11].

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о распространении акустических волн в гидроупругой системе, состоящей из слоя ньютоновской вязкой сжимаемой жидкости и изотропного упругого слоя. Решение получим с привлечением трехмерных линейных уравнений классической теории упругости для твердого тела и линеаризованных уравнений Навье–Стокса для жидкости, находящейся в состоянии покоя [7–11]. В рамках принятых моделей основные соотношения для системы упругое тело – вязкая сжимаемая жидкость будут иметь вид:

$$\mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = 0, \quad \sigma_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial u_j} + \frac{\partial u_j}{\partial u_i} \right) + \lambda \delta_{ij}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}); \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nu^* \Delta \vec{v} + \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p - \frac{1}{3} \nu^* \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \rho^*} = a_0^2, \quad a_0 = \text{const};$$

$$p_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda^* \delta_{ij}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \mu^* \left( \frac{\partial v_i}{\partial v_j} + \frac{\partial v_j}{\partial v_i} \right), \quad \lambda^* = -\frac{2}{3} \mu^*. \quad (3)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $u_i$  – компоненты вектора перемещений упругого тела;  $\rho$  – плотность материала упругого слоя;  $\lambda$  и  $\mu$  – константы Ляме материала твердого тела;  $v_i$  – составляющие вектора возмущений скорости жидкости;  $\rho^*$  и  $p$  – возмущения плотности и давления в жидкости;  $\nu^*$  и  $\mu^*$  – кинематический и динамический коэффициенты вязкости жидкости;  $\rho_0$  и  $a_0$  – плотность и скорость звука в жидкости в состоянии покоя;  $p_{ij}$  и  $\sigma_{ij}$  – составляющие напряжений соответственно в жидкости и упругом теле.

Равенства (1) описывают поведение упругого тела. Малые колебания вязкой сжимаемой жидкости, находящейся в состоянии покоя и без учета тепловых эффектов, описывают соотношения (2) и (3).

Далее предположим, что упругий слой занимает объем:  $-\infty < z_1 < \infty$ ,  $-h_2 \leq z_2 \leq 0$ ,  $-\infty < z_3 < \infty$  и контактирует со слоем вязкой сжимаемой жидкости, заполняющей объем:  $-\infty < z_1 < \infty$ ,  $0 \leq z_2 \leq h_1$ ,  $-\infty < z_3 < \infty$ . Будем считать, что внешние силы, действующие на указанные среды, распределены равномерно вдоль оси  $oz_3$ . Поскольку в этом случае волна, бегущая в направлении оси  $oz_1$ , и возмущения, ее вызывающие, не зависят от переменной  $z_3$ , то задача будет плоской и можно ограничиться изучением процесса распространения волн в плоскости  $oz_1z_2$ . Следовательно, указанная задача сводится к решению системы уравнений (1)–(3) при следующих граничных условиях:

$$p_{21}|_{z_2=0} = \sigma_{21}|_{z_2=0}, \quad p_{22}|_{z_2=0} = \sigma_{22}|_{z_2=0}, \quad v_1|_{z_2=0} = \frac{\partial u_1}{\partial t} \Big|_{z_2=0}, \quad v_2|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t} \Big|_{z_2=0}; \quad (4)$$

$$\sigma_{21}|_{z_2=-h_2} = 0, \quad \sigma_{22}|_{z_2=-h_2} = 0, \quad p_{21}|_{z_2=h_1} = 0, \quad p_{22}|_{z_2=h_1} = 0. \quad (5)$$

В дальнейшем для решения задачи гидроупругости воспользуемся представлениями общих решений для упругих тел и вязкой сжимаемой жидкости, предложенными в работах [7–11]

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}, \quad u_2 = \left( \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \chi_1; \quad (6)$$

$$v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t} + \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_2 \partial t}, \quad v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t} - \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_1 \partial t}, \quad (7)$$

где введенные потенциалы  $\chi_j$  являются решениями следующих уравнений:

$$\left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} \right] \chi_1 = 0; \quad (8)$$

$$\left[ \left( 1 + \frac{4\nu^*}{3a_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_2 = 0, \quad \left[ \frac{\partial}{\partial t} - \nu^* \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) \right] \chi_3 = 0. \quad (9)$$

Для анализа распространения возмущений, гармонически изменяющихся во времени, решения системы уравнений разыскиваются в классе бегущих волн

$$\chi_j = X_j(z_2) \exp[i(kz_1 - \omega t)], \quad j = \overline{1, 3}, \quad (10)$$

где  $k$  ( $k = (\beta + i\gamma)$ ) – волновое число;  $\gamma$  – коэффициент затухания волны;  $\omega$  – круговая частота;  $i^2 = -1$ .

Заметим, что выбранный в данной работе класс гармонических волн, являясь наиболее простым и удобным в теоретических исследованиях, не ограничивает общности полученных результатов, поскольку линейная волна произвольной формы, как известно, может быть представлена набором гармонических составляющих. Далее решаются две задачи Штурма–Лиувилля на собственные значения для уравнений движения упругого тела и жидкости, а также находятся соответствующие собственные функции. После подстановки решений в граничные условия (4) и (5) получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных. Исходя из условия существования нетривиального решения, приравнявая определитель системы к нулю, получаем дисперсионное уравнение

$$\det \left\| e_{mn} \left( c, \gamma, \lambda, \mu, \rho, \rho_0, a_0, \mu^*, \omega \frac{h_1}{c_s}, \omega \frac{h_2}{c_s} \right) \right\| = 0, \quad m, n = \overline{1, 8}, \quad (11)$$

где  $c$  – фазовая скорость мод в гидроупругой системе;  $h_1$  – толщина слоя жидкости;  $h_2$  – толщина упругого слоя;  $c_s$  ( $c_s^2 = \mu/\rho$ ) – скорость волны сдвига в упругом теле.

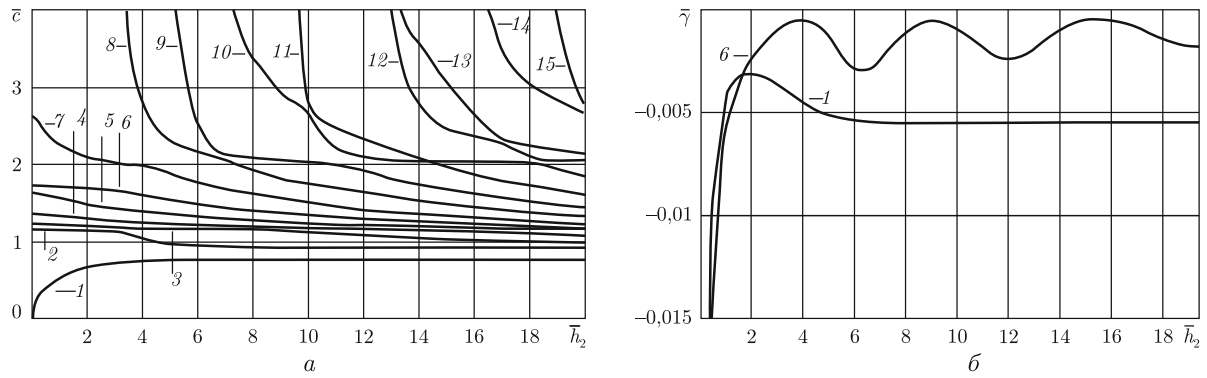


Рис. 1

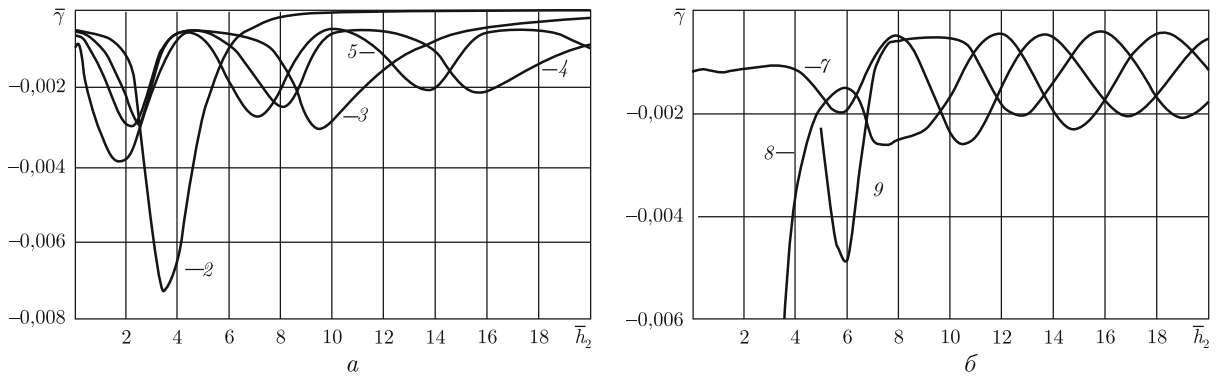


Рис. 2

Как известно, в неограниченном сжимаемом упругом теле существуют продольная и поперечная волны. В идеальной сжимаемой жидкой среде распространяется только продольная волна. В вязкой сжимаемой жидкости существуют как продольная волна, так и поперечная волна. Именно эти волны, взаимодействуя между собой на свободных граничных поверхностях, а также на поверхностях контакта сред, порождают сложное волновое поле в гидроупругой системе.

Заметим, что полученное дисперсионное уравнение (11) является наиболее общим и из него можно получить соотношения для ряда частных случаев, которые рассмотрены в работах [1–3, 5]. В частности, если  $a_0$  устремить к бесконечности, то (11) переходит в уравнение для определения параметров мод в случае взаимодействия с вязкой несжимаемой жидкостью. Если  $\mu^*$  положить равным нулю, то из (11) получим результаты для гидроупругой системы с идеальной жидкостью. При  $\rho_0 = 0$  равенство (11) перейдет в уравнение для определения скоростей волн Лэмба [1, 2]. Если дополнительно устремить  $h_2$  к бесконечности, получим соотношение для определения скоростей поверхностных волн Рэлея [1, 2]. При  $\rho_0 \neq 0$  и  $h_1 \rightarrow \infty$  равенство перейдет в уравнение Стоунли [1, 2].

**Числовые результаты.** В дальнейшем дисперсионное уравнение (11) решалось численно. При этом расчеты проводились для системы органическое стекло – вода, которая характеризовалась следующими параметрами: упругий слой –  $\rho = 1160$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda = 3,96 \cdot 10^9$  Па,  $\mu = 1,86 \cdot 10^9$  Па; слой жидкости –  $\rho_0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $a_0 = 1459,5$  м/с,  $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 1,152595$ ,  $\bar{\mu}^* = 0,001$ . Результаты вычислений представлены на рис. 1–4.

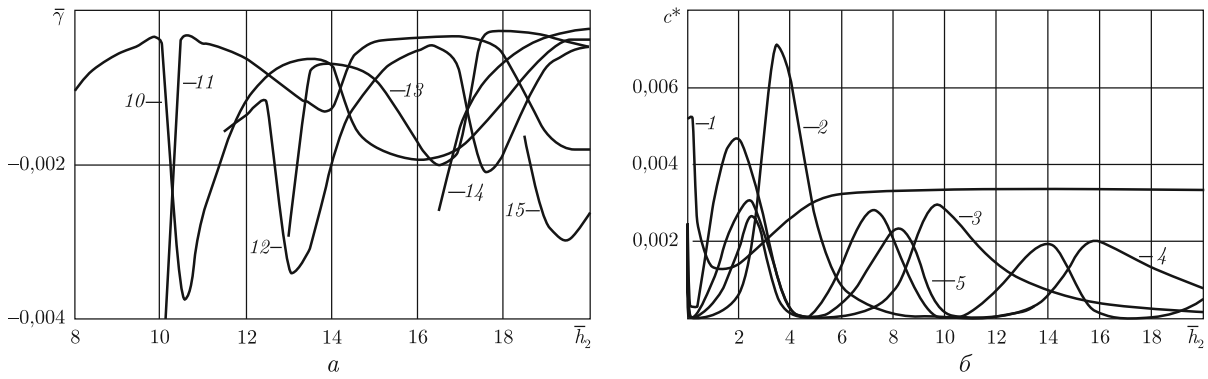


Рис. 3

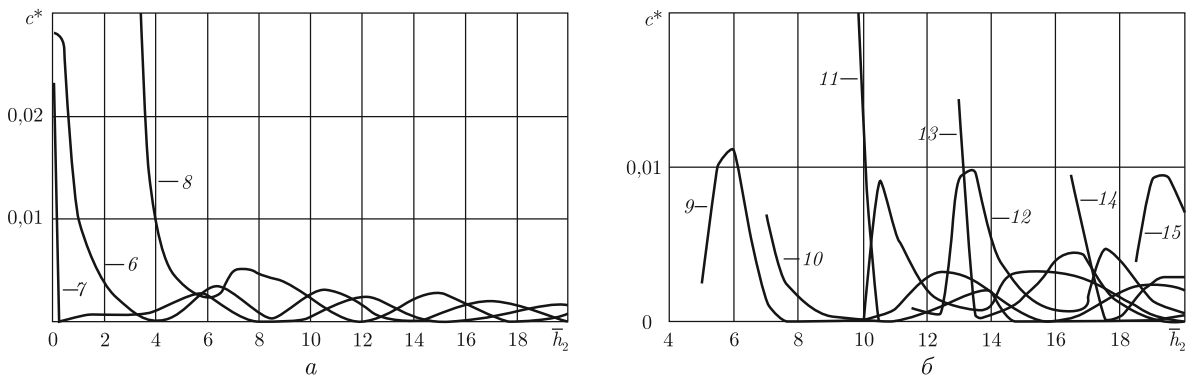


Рис. 4

На рис. 1, а приведены дисперсионные кривые для гидроупругого волновода, отражающие зависимости безразмерных величин фазовых скоростей квазилэмбовских мод  $\bar{c}$  ( $\bar{c} = c/c_s$ ) от безразмерной величины толщины упругого слоя  $\bar{h}_2$  ( $\bar{h}_2 = \omega h_2/c_s$ ) для толстого жидкого слоя с толщиной  $\bar{h}_1$  ( $\bar{h}_1 = \omega h_1/c_s$ ), равной 20 и  $\bar{\mu}^* = 0,001$ .

На рис. 1, б–3, а приведены зависимости безразмерных величин коэффициентов затухания мод  $\bar{\gamma}$  ( $\bar{\gamma} = \gamma/k_s$ ,  $k_s$  — волновое число волны сдвига в материале упругого слоя) от безразмерной величины толщины упругого слоя  $\bar{h}_2$  для толстого жидкого слоя с толщиной  $\bar{h}_1$ , равной 20 и  $\bar{\mu}^* = 0,001$ .

Характер влияния вязкости жидкости ( $\bar{\mu}^* = 0,001$ ) на скорости мод в гидроупругой системе иллюстрируют графики на рис. 3, б–4, б, где представлены зависимости относительных изменений величин фазовых скоростей мод  $c^*$  ( $c^* = (\bar{c}_i - \bar{c}_v)/\bar{c}_i$ ,  $\bar{c}_i$  — фазовая скорость волн в гидроупругой системе с идеальной жидкостью,  $\bar{c}_v$  — фазовая скорость мод в системе с вязкой жидкостью) от безразмерной величины толщины упругого слоя  $\bar{h}_2$ . На этих рисунках представлены графики для гидроупругого волновода, толщина жидкого слоя которого  $\bar{h}_1$  равна 20.

**Анализ числовых результатов.** Из графического материала, представленного на рис. 1, а, непосредственно следует, что в случае взаимодействия упругого слоя с толстым жидким слоем с  $\bar{h}_1 = 20$  жидкость оказывает значительное влияние на волновой процесс в низкочастотной части спектра при малых толщинах упругого слоя. Наличие жидкости приводит к увеличению числа мод, распространяющихся в гидроупругой системе. При этом возникающие моды имеют нулевые частоты заперзания. С ростом толщины упругого

слоя  $\bar{h}_2$  скорость моды 1 стремится к скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = 0,769121$ ) снизу. Скорость моды 2 стремится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,933558$ ) сверху. Заметим, что квазиповерхностная мода 1 при выбранных механических параметрах системы  $\bar{a}_0 = 1,152595 > \bar{c}_R = 0,933558$ , распространяясь вдоль границы контакта сред, локализуется преимущественно в приповерхностной области упругого тела [12]. Квазирэлеевская мода 2 распространяется вдоль свободной поверхности упругого слоя. Фазовые скорости всех последующих мод высокого порядка стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела  $\bar{c}_s$ . При этом с ростом толщины в них преобладают поперечные смещения, амплитуда которых на поверхностях слоя стремится к нулю по сравнению с их амплитудами в толще слоя, т.е. движения в модах высокого порядка смещаются от поверхности внутрь слоя и локализируются в его толще [1].

Из графического материала, представленного на рис. 1, б–3, а, непосредственно следует, что для всех мод существуют упругие слои определенной толщины, при которых моды распространяются как с наименьшим, так и с наибольшим затуханием. С ростом толщины для квазилэмбовских мод характерно уменьшение их величин коэффициентов затухания. Графики, приведенные на рис. 3, б–4, б показывают, что для всех мод существуют упругие слои определенной толщины, при которых влияние вязкости жидкости на фазовые скорости мод является минимальным и небольшим. Вместе с тем, в случае толстого жидкого слоя для ряда мод существуют упругие слои определенных толщин, для которых влияние вязкости жидкости на фазовые скорости этих мод значительно.

Таким образом, анализ числовых результатов показывает, что в гидроупругом волноводе жидкость для ряда квазилэмбовских мод вызывает изменение критических частот, смещение дисперсионных кривых в длинноволновую часть спектра, изменение их конфигурации, а также появление новых мод. Это приводит к тому, что в окрестности толщин упругого слоя, при которых моды зарождаются, влияние жидкости на величины фазовых скоростей волн становится значительным.

Влияние вязкости жидкости связано с ее взаимодействием со смещениями, возникающими в упруго–жидкостной системе при распространении волновых возмущений. В тех точках мод, где преобладающими являются движения (сдвиговые смещения) на границе раздела сред, влияние вязкости наибольшее и величины коэффициентов затухания, а также относительные изменения величин скоростей принимают максимальное значение. В точках волны с малыми поверхностными сдвиговыми смещениями соответственно и влияние вязкости наименьшее. Как указывалось выше, с ростом толщины во всех модах (кроме первой) преобладают поперечные смещения, амплитуда которых на поверхностях слоя стремится к нулю по сравнению с их амплитудами в толще слоя, т.е. движения в модах высокого порядка смещаются от поверхности внутрь слоя и локализируются в его толще. Следствием этого является уменьшение влияния вязкой жидкости на величины фазовых скоростей мод с возрастанием толщины упругого слоя в коротковолновой части спектра.

Отметим также, что, как известно [12], фазовая скорость и структура волны Стоунли при взаимодействии твердого и жидкого полупространств зависят от механических параметров гидроупругой системы и определяются соотношением между скоростью волны звука в жидком и скоростью волны Рэлея в твердом полупространствах. В работе [12] также показано, что если скорость звуковой волны в жидкой среде больше скорости волны Рэлея, то волна Стоунли локализуется преимущественно в твердом теле. В противном случае эта волна распространяется в жидком полупространстве. К волновому процессу в системе слоев жидкости–упругий слой этот критерий также может быть применен, поскольку низшая

квазиповерхностная мода 1 является волной типа Стоунли и предельное значение ее скорости с увеличением толщины стремится к скорости волны Стоунли. Отличие состоит лишь в том, что в этой гидроупругой системе сравниваются скорости волны звука в жидком слое со скоростью квазирэлеевской волны, распространяющейся вдоль свободной поверхности упругого слоя. В рассматриваемом нами волноводе, как уже отмечалось ранее, механические параметры гидроупругой системы органическое стекло–вода таковы, что скорость распространения звуковой волны в жидкости больше скорости квазирэлеевской волны 2. Согласно упомянутой работе [12], это приводит к тому, что в высокочастотной части спектра глубина проникновения квазиповерхностной моды 1 в упругое тело больше глубины проникновения в жидкость. Поэтому мода 1, распространяясь вдоль границы контакта сред, локализуется преимущественно в приповерхностной области упругого слоя. Квазирэлеевская мода 2 распространяется в упругом слое вдоль его свободной границы. Все остальные моды высокого порядка, как указывалось выше, локализуются в толще упругого слоя. Таким образом, анализ показывает, что в данной упруго-жидкостной системе низшие моды проникают в твердое тело и также, как и моды более высокого порядка распространяются в упругом слое. При этом упругий слой является определяющим в формировании волнового поля и основным волноводом, по которому распространяются волновые возмущения и осуществляется перенос большей части энергии волн.

## Цитированная литература

1. *Викторов И. А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. – Москва: Наука, 1981. – 288 с.
2. *Белянкова Т. И., Калинин В. В.* К проблеме анализа динамических свойств слоистого полупространства // Акуст. журн. – 2014. – **60**, № 5. – С. 492–504.
3. *Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л.* Поверхностные волны в системе: упругий слой на жидком полупространстве // Акуст. вісн. – 2005. – **8**, № 4. – С. 38–45.
4. *Кузнецов С. В.* Волны Лэмба в анизотропных пластинах (обзор) // Акуст. журн. – 2014. – **60**, № 1. – С. 90–100.
5. *Bagno A. M., Guz A. N.* Elastic waves in pre-stressed bodies interacting with a fluid (survey) // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, No 6. – P. 435–463.
6. *Ottenio M., Destrade M., Ogden R. W.* Acoustic waves at the interface of a pre-stressed incompressible elastic solid and a viscous fluid // Int. J. of Non – Linear Mech. – 2007. – **42**, No 2. – P. 310–320.
7. *Guz A. N.* Aerohydroelasticity problems for bodies with initial stresses // Int. Appl. Mech. – 1980. – **16**, No 3. – P. 175–190.
8. *Гузь А. Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями. В 2 – х томах. – Киев: Наук. думка, 1986.
9. *Гузь А. Н.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – Киев: А. С. К., 2004. – 672 с.
10. *Гузь А. Н.* Динамика сжимаемой вязкой жидкости. – Киев: А. С. К., 1998. – 350 с.
11. *Guz A. N.* Dynamics of compressible viscous fluid. – Cambridge Scientific Publishers, 2009. – 428 p.
12. *Волькенштейн М. М., Левин В. М.* Структура волны Стоунли на границе вязкой жидкости и твердого тела // Акуст. журн. – 1988. – **34**, № 4. – С. 608–615.

## References

1. *Viktorov I. A.* Sound surface waves in solids, Moscow: Nauka, 1981 (in Russian).
2. *Belyankova T. I., Kalinchuk V. V.* Acoustic J., 2014, **60**, No 5: 492–504 (in Russian).
3. *Grinchenko V. T., Komissarova G. L.* Acoustic bulletin, 2005, **8**, No 4: 38–45 (in Russian).
4. *Kuznetsov S. V.* Acoustic J., 2014, **60**, No 1: 90–100 (in Russian).
5. *Bagno A. M., Guz A. N.* Int. Appl. Mech., 1997, **33**, No 6: 435–463.

6. *Ottenio M., Destrade M., Ogden R. W.* Int. J. of Non-Linear Mech., 2007, **42**, No 2: 310–320.
7. *Guz A. N.* Int. Appl. Mech., 1980, **16**, No 3: 175–190.
8. *Guz A. N.* Elastic waves in bodies with initial stresses. In 2 vol., Kiev: Naukova Dumka, 1986 (in Russian).
9. *Guz A. N.* Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses, Kiev: A. C. K., 2004 (in Russian).
10. *Guz A. N.* Dynamics of compressible viscous fluid, Kiev: A. C. K., 1998 (in Russian).
11. *Guz A. N.* Dynamics of compressible viscous fluid, Cambridge Scientific Publishers, 2009.
12. *Volkenstein M. M., Levin V. M.* Acoustic J., 1988, **34**, No 4: 608–615. (in Russian).

*Поступило в редакцію 07.09.2015*

**О. М. Багно**

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ

*E-mail:* desc@inmech.kiev.ua

**Про вплив в'язкої рідини на квазілембовські хвилі у пружному шарі, який взаємодіє з рідким шаром**

*На основі тривимірних лінеаризованих рівнянь Нав'є–Стокса для в'язкої рідини та лінійних рівнянь класичної теорії пружності для пружного шару побудовано дисперсійні криві та досліджено поширення квазілембовських хвиль у широкому діапазоні частот. Проаналізовано вплив в'язкості рідини, товщини пружного та рідкого шарів на фазові швидкості та коефіцієнти згасання квазілембовських мод. Числові результати наведено у вигляді графіків та дано їх аналіз.*

**Ключові слова:** дисперсія хвиль, пружний шар, шар в'язкої стисливої рідини, квазілембовські моди.

**O. M. Bahno**

S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

*E-mail:* desc@inmech.kiev.ua

**On the effect of a viscous fluid on quasi-Lamb waves in an elastic layer that interacts with a liquid layer**

*On the base of the three-dimensional linearized Navier–Stokes equations for viscous fluid and linear equations of the classical theory of elasticity for an elastic layer, the dispersion curves are constructed, and the propagation of quasi-Lamb waves within the wide range of frequencies is studied. The effects of the viscosity of a fluid and the thickness of elastic and fluid layers on the phase velocities and the attenuation coefficients of quasi-Lamb modes are analyzed. The numerical results are presented in the form of graphs, and their analysis is given.*

**Keywords:** dispersion of waves, elastic layer, layer of a viscous compressible fluid, quasi-Lamb modes.