

С. М. Чуйко, Е. В. Чуйко

Донбасский государственный педагогический университет, Славянск

E-mail: chujko-slav@inbox.ru

## Линейные нетеровы краевые задачи для вырожденных дифференциально-алгебраических систем с импульсным воздействием

*(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Бойчуком)*

Найдены достаточные условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина линейной нетеровой краевой задачи для вырожденной дифференциально-алгебраической системы с импульсным воздействием.

**Ключевые слова:** дифференциально-алгебраическая система, нетерова краевая задача, обобщенный оператор Грина, вырожденное импульсное воздействие.

**1. Постановка задачи.** Исследуем задачу о построении решений [1–5]  $z(t) \in C^1\{[a; b] \setminus \{\tau_i\}_I\}$  вырожденной ( $k \neq n$ ) дифференциально-алгебраической системы [6]

$$A(t)z' = B(t)z + f(t), \quad t \neq \tau_i, \quad A(t), B(t) \in \mathbb{R}^{k \times n}, \quad A(t), B(t), f(t) \in \mathbb{C}[a, b], \quad (1)$$

с импульсным воздействием [1, 2]

$$\Delta z(\tau_i) = S_i z(\tau_i - 0) + a_i, \quad S_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \tau_i \in [a, b], \quad a_i \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (2)$$

подчиненной краевому условию [1, 7]

$$\ell z(\cdot) = \alpha, \quad \ell z(\cdot): \mathbb{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m. \quad (3)$$

Достаточные условия однозначной разрешимости и структура гладкого решения  $z(t) \in C[a, b]$  двухточечной краевой задачи для системы (1) были получены в [8]. Условия существования и структура решений аналогичной нетеровой краевой задачи (1), (3) в общем случае ( $k \neq n$ ) были получены в [6] с использованием понятия совершенных троек матриц. Конструктивные условия разрешимости и структура решения дифференциально-алгебраических систем (1) в случае  $k = n$  найдены в [9, 10] с использованием центральной канонической формы. Более современные условия разрешимости и техника приведения системы (1) к центральной канонической форме были получены в [11]. Целью данной работы является нахождение конструктивных достаточных условий разрешимости задачи Коши и линейной нетеровой краевой задачи (1), (2), (3) с импульсным воздействием в общем случае  $k \neq n$ , в частности, для переопределенных  $k > n$  и недоопределенных  $k \leq n$  вырожденных дифференциально-алгебраических систем. При условии

$$P_{A^*(t)}B(t) = 0, \quad P_{A^*(t)}f(t) = 0 \quad (4)$$

однородная часть системы (1) по меньшей мере одним способом разрешима относительно производной  $z' = A^+(t)B(t)z$ .

**2. Достаточные условия в случае разрешимости относительно производной.**

Предположим, что псевдообратная матрица  $A^+(t)$  непрерывна; обозначим  $X_0(t)$  нормальную фундаментальную матрицу  $X_0'(t) = A^+(t)B(t)X_0(t)$ ,  $X_0(a) = I_n$  полученной системы обыкновенных ( $A^+(t)B(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ) дифференциальных уравнений. При условии (4) система (1) имеет непрерывное решение вида

$$z(t, c) = X_0(t)c + K[f(s)](t), \quad K[f(s)](t) := X_0(t) \int_a^t X_0^{-1}(s)A^+(s)f(s) ds, \quad c \in \mathbb{R}^n.$$

При условии  $P_{A^*(t)}B(t) = 0$  фундаментальную матрицу нетривиальных решений задачи

$$z' = A^+(t)B(t)z, \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta z(\tau_i) = \mathcal{S}_i z(\tau_i - 0)$$

ищем в виде

$$X(t) = \begin{cases} X_0(t)W_0, & t \in [a; \tau_1], \\ X_0(t)W_1, & t \in [\tau_1; \tau_2], \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ X_0(t)W_p, & t \in [\tau_p; b], \end{cases} \quad (5)$$

где  $W_1, \dots, W_p$  — неизвестные постоянные ( $n \times n$ )-матрицы;  $W_0 := I_n$ . В силу невырожденности матриц  $X_0(\tau_i)$  имеем  $W_{i+1} = X_0^{-1}(\tau_i)(I_n + \mathcal{S}_i)X_0(\tau_i)W_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p-1$ . Найденная нормальная фундаментальная матрица  $X(t)$  является обобщением нормальной ( $X(a) = I_n$ ) фундаментальной матрицы  $X(t)$  задачи о нахождении непрерывных решений однородной части системы (1) с импульсным воздействием  $\Delta z(\tau_i) = \mathcal{S}_i z(\tau_i - 0)$ . В зависимости от вырожденности или невырожденности матриц  $I_n + \mathcal{S}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , нормальная фундаментальная матрица  $X(t)$  определяет решение  $z(t, c) = X(t)c$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ , однородной части системы (1) с вырожденным или невырожденным [12, 13] импульсным воздействием  $\Delta z(\tau_i) = \mathcal{S}_i z(\tau_i - 0)$ , при этом, в отличие от задач с невырожденным импульсным воздействием [1, 2], ранг найденной нормальной фундаментальной матрицы  $X(t)$  становится меньше  $n$  на одном из промежутков  $[\tau_1; \tau_2], \dots, [\tau_p; b] \subset [a; b]$ . При условии (4) частное решение неоднородной дифференциально-алгебраической задачи (1), (2) ищем в виде

$$K[A^+(s)f(s); \mathcal{S}_i](t) = \begin{cases} K[A^+(s)f(s)](t), & t \in [a; \tau_1], \\ X_0(t)\gamma_1 + K[A^+(s)f(s)](t), & t \in [\tau_1; \tau_2], \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ X_0(t)\gamma_p + K[A^+(s)f(s)](t), & t \in [\tau_p; b], \end{cases} \quad (6)$$

где

$$K[A^+(s)f(s)](t) := X_0(t) \int_a^t X_0^{-1}(s)A^+(s)f(s) ds -$$

оператор Грина задачи Коши для системы (1),  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$  — неизвестные постоянные, для нахождения которых используем условие (2). В силу невырожденности матриц  $X_0(\tau_i)$



обобщенный оператор Грина задачи Коши  $z(a) = 0$  для дифференциально-алгебраической системы с импульсным воздействием (1), (2). В критическом случае ( $P_{Q^*} \neq 0$ ) при условиях (4) и (7) для любого вектора  $f(t) \in \mathbb{C}[a, b]$  краевая задача (1)–(3) имеет семейство решений

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[A^+(s)f(s); \mathcal{S}_i; \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

где

$$G[A^+(s)f(s); \mathcal{S}_i; \alpha](t) := X(t)Q^+\{\alpha - \ell K[A^+(s)f(s); \mathcal{S}_i](\cdot)\} + K[A^+(s)f(s); \mathcal{S}_i](t) -$$

обобщенный оператор Грина краевой задачи (1)–(3).

Заметим, что условие (4) может выполняться как для недоопределенных, так и для переопределенных систем вида (1). В частности, условие (4) выполняется для недоопределенной дифференциально-алгебраической системы (1) с матрицей  $A(t)$  полного ранга. Для недоопределенной дифференциально-алгебраической системы (1) без импульсного воздействия с матрицей  $A(t)$  полного ранга утверждение доказанной леммы эквивалентно теоремам 3.1.1 и 3.2.1, доказанным в [8].

**3. Достаточные условия в случае неразрешимости дифференциально-алгебраической системы относительно производной.** Предположим, что псевдообратная матрица  $B^+(t)$  непрерывна, а условие  $P_{A^*(t)}B(t) = 0$  не выполнено; при этом однородная часть системы (1) не разрешима относительно производной. В случае

$$P_{A^*(t)}B(t) \neq 0, \quad P_{B^*(t)}A(t) = 0, \quad P_{B^*(t)}f(t) = 0 \quad (8)$$

однородная часть системы (1) по меньшей мере одним способом разрешима относительно неизвестной  $z = B^+(t)A(t)z'$ . Предположим, что матрица  $B^+(t)A(t)$  постоянного ранга  $\text{rang } B^+(t)A(t) = \delta$ ,  $n - \delta := \omega$  и не имеет среди собственных чисел нулей геометрической кратности, отличной от алгебраической; при этом неособенным ( $\det S(t) \neq 0$ ) преобразованием подобия  $B^+(t)A(t) = S(t)J(t)S^{-1}(t)$  она приводится к жордановой форме

$$J(t) = \begin{pmatrix} J_\delta(t) & O \\ O & O_\omega \end{pmatrix}, \quad J_\delta(t) \in \mathbb{R}^{\delta \times \delta}, \quad \det J_\delta(t) \neq 0, \quad O_\omega \in \mathbb{R}^{\omega \times \omega}.$$

При условии (8) однородная часть системы (1)

$$J(t)y' = (I_n - J(t)S^{-1}(t)S'(t))y, \quad y(t) := S^{-1}(t)z(t) := \text{col}(u(t), v(t)), \quad u(t) \in \mathbb{R}^\delta$$

приводится к виду

$$\begin{pmatrix} J_\delta(t) & O \\ O & O_\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = (I_n - J(t)S^{-1}(t)S'(t)) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad v(t) \in \mathbb{R}^\omega. \quad (9)$$

Отметим, что уравнение (9), вообще говоря, не разрешимо относительно производных. Действительно, условие разрешимости уравнения (9) при произвольных функциях  $u(t)$  и  $v(t)$  не выполнено:  $P_{J^*(t)}(I_n - J(t)S^{-1}(t)S'(t)) = P_{J^*(t)} \neq 0$ ; здесь ортопроектор  $P_{J^*(t)}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}(J^*(t))$  и матрица

$$S^{-1}(t)S'(t) = \begin{pmatrix} \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t) & \mathfrak{S}_{\delta\omega}(t) \\ \mathfrak{S}_{\omega\delta}(t) & \mathfrak{S}_{\omega\omega}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t) \in \mathbb{R}^{\delta \times \delta}, \quad \mathfrak{S}_{\omega\omega}(t) \in \mathbb{R}^{\omega \times \omega}.$$

С другой стороны, уравнение (9) разрешимо при условии  $v(t) \equiv 0$ . Для нахождения первой из компонент  $u(t) \in \mathbb{R}^\delta$  вектора  $y(t)$  используем систему обыкновенных дифференциальных уравнений  $u' = (J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t))u$ . Предположим, что матрица  $J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)$  непрерывна; обозначим  $Y_\delta(t)$  нормальную фундаментальную матрицу:  $Y_\delta'(t) = (J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t))Y_\delta(t)$ ,  $Y_\delta(a) = I_\delta$ . Однородная часть системы (1) имеет решение

$$y(t, c_\delta) = Y(t)c_\delta, \quad c_\delta \in \mathbb{R}^\delta, \quad Y(t) := \begin{pmatrix} Y_\delta(t) \\ O \end{pmatrix}.$$

Таким образом, при условии (8) однородная часть системы (1) в случае непрерывности матрицы  $J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)$  имеет решение вида

$$z(t, c_\delta) = X_0(t)c_\delta, \quad X_0(t) = S(t)Y(t) \in \mathbb{R}^{n \times \delta}, \quad c_\delta \in \mathbb{R}^\delta,$$

при этом задача Коши  $z(a) = c$  для однородной части вырожденной дифференциально-алгебраической системы (1) разрешима для любого вектора

$$c \in \mathbb{R}(X_0(t)), \quad \mathbb{R}^n = \mathbb{R}(X_0(t)) \oplus \mathbb{N}(X_0^*(t)), \quad \mathbb{R}^\delta = \mathbb{N}(X_0(t)) \oplus \mathbb{R}(X_0^*(t)).$$

При условии (8) фундаментальную матрицу нетривиальных решений задачи с импульсным воздействием

$$A(t)z' = B(t)z, \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta z(\tau_i) = \mathcal{S}_i z(\tau_i - 0)$$

ищем в виде (5), где  $W_1, \dots, W_p$  — неизвестные постоянные  $(\delta \times \delta)$ -матрицы,  $W_0 := I_n$ . Для прямоугольных  $(n \times \delta)$ -матриц  $X_0(\tau_i)$  уравнения

$$X_0(\tau_i)W_{i+1} = (I_n + \mathcal{S}_i)X_0(\tau_i)W_i, \quad i = 1, 2, \dots, p-1,$$

разрешимы по меньшей мере одним способом

$$W_{i+1} = X_0^+(\tau_i)(I_n + \mathcal{S}_i)X_0(\tau_i)W_i, \quad i = 1, 2, \dots, p-1,$$

тогда и только тогда, когда

$$P_{X_0^*(\tau_i)}(I_n + \mathcal{S}_i)X_0(\tau_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p-1. \quad (10)$$

Таким образом, при условии (8) и (10) однородная часть системы с импульсным воздействием (1), (2) в случае непрерывности матрицы  $J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)$  имеет решение вида  $z(t, c_\delta) = X(t)c_\delta$ ,  $c_\delta \in \mathbb{R}^\delta$ , при этом задача Коши  $z(a) = c$  для однородной части вырожденной дифференциально-алгебраической системы с импульсным воздействием (1), (2) разрешима для любого вектора

$$c \in \mathbb{R}(X_0(t)), \quad \mathbb{R}^n = \mathbb{R}(X_0(t)) \oplus \mathbb{N}(X_0^*(t)), \quad \mathbb{R}^\delta = \mathbb{N}(X_0(t)) \oplus \mathbb{R}(X_0^*(t)).$$

Существенным отличием однородной части вырожденной дифференциально-алгебраической системы (1) в случае  $\omega \neq 0$  является прямоугольность матрицы  $X_0(t)$ , не позволяющая для решения неоднородной дифференциально-алгебраической системы (1) непосредственно использовать конструкцию традиционного оператора Грина задачи Коши  $K[f(s)](t)$ .



разрешимы по меньшей мере одним способом

$$\gamma_i = X_0^+(\tau_i)\{\mathcal{S}_i\mathcal{K}[f(s)](\tau_i) + a_i\}, \quad i = 2, 3, \dots, p,$$

тогда и только тогда, когда

$$P_{X_0^*(\tau_i)}\{\mathcal{S}_i\mathcal{K}[f(s)](\tau_i) + a_i\}. \quad (12)$$

Таким образом, для непрерывной матрицы  $J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)$  при условии (8), (10) и (12) неоднородная дифференциально-алгебраическая задача с импульсным воздействием (1), (2) имеет решение вида

$$z(t, c_\delta) = X(t)c_\delta + \mathcal{K}[f(s); \mathcal{S}_i](t), \quad c_\delta \in \mathbb{R}^\delta,$$

где  $\mathcal{K}[f(s); \mathcal{S}_i](t)$  — обобщенный оператор Грина задачи Коши дифференциально-алгебраической системы с импульсным воздействием (1), (2). В критическом случае ( $P_{Q^*} \neq 0$ ) при условии (8), (10) и (12) для непрерывной матрицы  $J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)$  и

$$P_{Q^*}\{\alpha - \ell\mathcal{K}[f(s); \mathcal{S}_i](\cdot)\} = 0 \quad (13)$$

краевая задача (1), (3) имеет семейство решений

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \mathcal{S}_i; \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

где

$$G[f(s); \mathcal{S}_i; \alpha](t) := X(t)Q^+\{\alpha - \ell\mathcal{K}[f(s); \mathcal{S}_i](\cdot)\} + \mathcal{K}[f(s); \mathcal{S}_i](t).$$

Таким образом, доказано следующее достаточное условие разрешимости [14, 15] вырожденной дифференциально-алгебраической задачи с импульсным воздействием (1)–(3).

**Теорема.** При условии непрерывности матрицы  $B^+(t)$  и условиях (8), (10) однородная часть вырожденной дифференциально-алгебраической системы с импульсным воздействием (1), (2) имеет решение  $z(t) \in \mathbb{C}[a; b]$  вида

$$z(t, c_\delta) = X_0(t)c_\delta, \quad X_0(t) = S(t)Y(t) \in \mathbb{R}^{n \times \delta}, \quad c_\delta \in \mathbb{R}^\delta,$$

где  $X_0(t)$  — фундаментальная матрица. При условии

$$c \in \mathbb{R}(X_0(t)), \quad \mathbb{R}^n = \mathbb{R}(X_0(t)) \oplus \mathbb{N}(X_0(t)), \quad \mathbb{R}(X_0(t)) = (I_n - P_{X_0(t)})\mathbb{R}^n,$$

в случае (8), (10) и (12) для непрерывной матрицы  $J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)$  неоднородная дифференциально-алгебраическая задача с импульсным воздействием (1), (2) имеет решение вида

$$z(t, c) = X(t)c_\delta + \mathcal{K}[f(s); \mathcal{S}_i](t) \in \mathbb{C}^1\{[a; b] \setminus \{\tau_i\}_I\}, \quad c_\delta \in \mathbb{R}^\delta,$$

где  $\mathcal{K}[f(s); \mathcal{S}_i](t)$  — обобщенный оператор Грина задачи Коши для дифференциально-алгебраической системы с импульсным воздействием (1), (2). В критическом случае ( $P_{Q^*} \neq 0$ ) при условии (13) для любого вектора  $f(t) \in \mathbb{C}[a; b]$  краевая задача (1)–(3) имеет семейство решений

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[A^+(s)f(s); \mathcal{S}_i; \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

где

$$\mathcal{G}[f(s); \mathcal{S}_i; \alpha](t) := X(t)Q^+ \{ \alpha - \ell \mathcal{K}[f(s); \mathcal{S}_i](\cdot) \} + \mathcal{K}[f(s); \mathcal{S}_i](t) -$$

обобщенный оператор Грина краевой задачи (1)–(3).

**Пример.** Требованиям доказанной теоремы удовлетворяет задача о построении решений задачи Коши для системы с импульсным воздействием

$$A(t)z' = B(t)z + f(t), \quad t \neq \tau_1, \quad \Delta z(\tau_1) = \mathcal{S}_1 z(\tau_1 - 0) + a_1, \quad z(0) = \alpha, \quad (14)$$

где

$$A(t) := \begin{pmatrix} \sin 2t - 1 & \cos 2t \\ -\cos 2t & \sin 2t + 1 \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$f(t) := 4\sqrt{2} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad \tau_1 = \pi, \quad \mathcal{S}_1 := -2I_2, \quad a_1 = \begin{pmatrix} -4\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1 \\ \sqrt{2} + 1 \end{pmatrix}.$$

Действительно, матрица  $B(t)$  невырождена, следовательно,  $P_{B^*(t)} = 0$ , при этом условие (8) выполнено. Матрица

$$J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t) = -\frac{2 \cos t}{\cos t - \sin t}$$

определяет решение  $z(t, c_\delta) = X_0(t)c_\delta$  однородной части вырожденной дифференциально-алгебраической системы (14); здесь

$$X_0(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}(\sin t - \cos t) \\ e^{-t}(\sin t + \cos t) \end{pmatrix}, \quad c_\delta \in \mathbb{R}^2.$$

Поскольку условие (10) выполнено, то обобщенный оператор Грина задачи Коши для системы (14) имеет вид

$$\mathcal{K}[f(s)](t) = \frac{\sqrt{2}}{5} \begin{pmatrix} \cos t + 2 \cos 3t - 8 \sin t - \sin 3t + 2e^{-t}(\cos t - \sin t) \\ 8 \cos t - \cos 3t + \sin t - 2 \sin 3t - 2e^{-t}(\sin t + \cos t) \end{pmatrix}.$$

Поскольку условие (12) выполнено, то обобщенный оператор Грина задачи Коши для дифференциально-алгебраической системы с импульсным воздействием (14) имеет вид

$$\mathcal{K}[f(s); \mathcal{S}_1](t) = \begin{cases} \mathcal{K}[f(s)](t), & t \in [0; 2\pi[, \\ X_0(t)\gamma_1 + \mathcal{K}[f(s)](t), & t \in [\pi; 2\pi], \end{cases} \quad \gamma_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{5}(7e^\pi - 2).$$

Задача Коши для дифференциально-алгебраической системы с импульсным воздействием (14) представляет критический случай:  $P_{Q^*} \neq 0$ , при этом условие (13) ее разрешимости выполнено, таким образом, согласно доказанной теореме, решение неоднородной задачи Коши для дифференциально-алгебраической системы с импульсным воздействием (14) единственно  $P_Q = 0$  и имеет вид

$$z(t, c) = X(t)c_\delta + \mathcal{K}[f(s); \mathcal{S}_i](t), \quad c_\delta = 1.$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований № 0109U000381.*



## Цитированная литература

1. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – XIV + 317 p.
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с.
3. *Чуйко С. М.* Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. – 2001. – **37**, № 8. – С. 1132–1135.
4. *Чуйко С. М.* Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Докл. РАН. – 2001. – **379**, № 2. – С. 170–172.
5. *Бойчук А. А., Чуйко С. М.* Обобщенный оператор Грина импульсной краевой задачи с переключениями // Нелінійні коливання. – 2007. – **10**, № 1. – С. 51–65.
6. *Бояринцев Ю. Е., Чистяков В. Ф.* Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования. – Новосибирск: Наука, 1998. – 224 с.
7. *Бойчук А. А., Шегда Л. М.* Вироджені нетерові крайові задачі // Нелінійні коливання. – 2007. – **10**, № 3. – С. 303–312.
8. *Campbell S. L.* Singular systems of differential equations. – San Francisco: Pitman, 1980. – 178 p.
9. *Чистяков В. Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. – Новосибирск: Наука, 1996. – 280 с.
10. *Чистяков В. Ф., Щеглова А. А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. – Новосибирск: Наука, 2003. – 317 с.
11. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – Київ: Вища шк., 2000. – 296 с.
12. *Бойчук А. А., Чуйко Е. В., Чуйко С. М.* Обобщенный оператор Грина краевой задачи с вырожденным импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 5. – С. 588–594.
13. *Чуйко С. М., Чуйко Е. В.* Обобщенный оператор Грина задачи Коши с импульсным воздействием // Докл. НАН Украины. – 1999. – № 6. – С. 43–47.
14. *Chuiko S. M.* A generalized matrix differential-algebraic equation // J. Math. Sci. – 2015. – **210**, No 1. – P. 9–21.
15. *Chuiko S. M.* The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem // Siberian Math. J. – 2015. – **56**, No 4. – P. 752–760.

## References

1. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems, Utrecht: VSP, 2004.
2. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive Differential Equations, Kiev: Vyscha Shkola, 1987 (in Russian).
3. *Chuiko S. M.* Different. Equations, 2001, **37**: 1189–1193.
4. *Chuiko S. M.* Dokl. AN, 2001, **379**, No 2: 170–172 (in Russian).
5. *Boichuk A. A., Chuiko S. M.* Nonlinear Oscillations, 2007, **10**, Iss. 1: 46–61.
6. *Boyarintsev J. E., Chistyakov V. F.* Differential-algebraic system. Methods of solutions and research, Novosibirsk: Nauka, 1998 (in Russian).
7. *Boichuk A. A., Shegda L. M.* Nonlinear Oscillations, 2007, **10**, Iss. 3: 306–314.
8. *Campbell S. L.* Singular Systems of differential equations, San Francisco: Pitman, 1980.
9. *Chistyakov V. F.* Algebraic-differential operators with finite-dimensional kernel, Novosibirsk: Nauka, 1996 (in Russian).
10. *Chistyakov V. F., Shcheglova A. A.* Selected chapters of the theory of algebraic-differential systems, Novosibirsk: Nauka, 2003 (in Russian).
11. *Samoilenko A. M., Shkil' M. I., Yakovets' V. P.* Linear Systems of Degenerate Differential Equations, Kiev: Vyscha Shkola, 2000 (in Ukrainian).
12. *Boichuk A. A., Chuiko E. V., Chuiko S. M.* Ukr. Math. J., 1996, **48**: 652–660.
13. *Chuiko S. M., Chuiko E. V.* Dop. NAN Ukraine, 1999, No 6: 43–47 (in Russian).

14. *Chuiko S. M.* J. Math. Sci., 2015, **210**, No 1: 9–21.
15. *Chuiko S. M.* Siberian Math. J., 2015, **56**, No 4: 752–760.

Поступило в редакцію 30.06.2015

**С. М. Чуйко, О. В. Чуйко**

Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ

*E-mail:* chujko-slav@inbox.ru

### **Лінійні нетерові крайові задачі для вироджених диференціально-алгебраїчних систем з імпульсним впливом**

*Знайдено достатні умови розв'язності, а також конструкцію узагальненого оператора Гріна лінійної нетерової крайової задачі для виродженої диференціально-алгебраїчної системи з імпульсним впливом.*

**Ключові слова:** диференціально-алгебраїчна система, нетерова крайова задача, узагальнений оператор Гріна, вироджений імпульсний вплив.

**S. M. Chuiko, E. V. Chuiko**

Donbass State Pedagogical University, Slovyansk

*E-mail:* chujko-slav@inbox.ru

### **Linear Noether boundary-value problems for degenerate differential-algebraic systems with pulse influence**

*We find sufficient conditions for the solvability and the construction of generalized Green's operator for the linear Noether boundary-value problem for a degenerate linear differential-algebraic system with pulse influence.*

**Keywords:** differential-algebraic system, Noether boundary-value problem, generalized Green's operator, degenerate pulse influence.