

УДК 550.834:622.12

## МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В УГЛЕПОРОДНОМ МАССИВЕ

Азаров Н. Я., Анциферов А. В.  
(УкрНИИМИ НАНУ, г. Донецк, Украина)

*У цій роботі подані найбільш перспективні методи математичного моделювання процесу поширення сейсмічних коливань у вуглепородному масиві, які використовуються при розв'язанні задач шахтної пластової сейсмозвідки.*

*The most promising methods for mathematical modeling of seismic energy in coal-rock mass when solving problems of in-seam seismic survey in mines are described.*

С начала развития шахтной сейсмозведки и по сей день, она опирается на теоретический анализ волновых полей, основанный на применении методов математического моделирования. В условиях перехода к отработке угольных пластов, имеющих все более сложные горно-геологические условия залегания, такой подход является чрезвычайно актуальным. В настоящее время теоретические исследования направлены на глубокое изучение механизмов формирования и распространения, разработку методов регистрации и анализа сейсмоакустических волновых полей. В настоящей работе представлены наиболее перспективные методы математического моделирования процесса распространения сейсмических колебаний в углепородном массиве, используемые при решении задач шахтной пластовой сейсмозведки.

При моделировании прямой задачи сейсмозведки решаются уравнения движения для сейсмических волн. Они, по сути, являются математическим выражением второго закона Ньютона

для частиц вещества в твердом теле, приведенном в движение упругими волнами. Это - дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка для векторного смещения  $\mathbf{u}$ , которое испытывает частица твердой среды вследствие прохождения волны. Целью решения уравнения движения является вычисление смещений частиц среды при распространении колебаний и получение теоретических сейсмограмм.

Описание процесса распространения сейсмических колебаний в угленосной толще для широкого круга задач шахтной сейсморазведки может быть проведено в рамках теории упругости. В упругой модели Гука среда описывается объемной плотностью  $\rho$  и двумя модулями упругости для объемных и сдвиговых деформаций. Через них выражаются скорости распространения продольных  $V_p$  и поперечных  $V_s$  волн. Упругая модель достаточно полно отражает неоднородности строения среды и позволяет получить все используемые в практической шахтной сейсморазведке типы волн [1].

При этом в качестве базовой модели углевмещающей толщи можно рассматривать упругое твердое тело, состоящее из набора изотропных слоев, соответствующих угольному пласту и вмещающим породам [1]. Возникающие в процессе возбуждения и распространения сейсмических волн напряжения не превышают пределов упругости сред, слагающих толщу; смещения составляют сотые доли процентов от характерных размерностей модели. На основании этого с физической точки зрения такие возмущения рассматриваются как обратимые и малые.

Как известно из положений теории, в рамках упругой модели Гука систему уравнений, описывающих движение частиц среды можно записать в виде:

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \quad (1)$$

где  $\rho$  - плотность,  $\ddot{u}_i$  - ускорение,  $\sigma_{ik} = \lambda u_{ll} \delta_{ik} + 2\mu u_{ik}$  - тензор напряжения,  $u_{ik}$  - компоненты тензора смещения,  $\lambda$  и  $\mu$  - коэффициенты Ламе. Тогда выражение (1) можно записать в виде:

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} u_{ll} \delta_{ik} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x_k} u_{ik} + \lambda \delta_{ik} \frac{\partial u_{ll}}{\partial x_k} + 2 \mu \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_k} \quad (2)$$

Наиболее просто решение (2) выглядит для случая неограниченной изотропной среды. В этом случае система уравнений может быть записана в самом простом (одномерном) виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{cases}$$

где через  $u$ ,  $v$ ,  $w$  обозначены компоненты вектора перемещений.

Это обычные волновые уравнения, в которых величины  $V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$  и  $V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  представляют собой скорости распространения возмущений. Решение системы можно рассматривать как две независимо распространяющиеся волны. Несмотря на столь простую модель, волновые пакеты, движущиеся с соответствующими скоростями, присутствуют на любых реальных сейсмограммах, в том числе полученных на угольных пластах в любых горно-геологических условиях. Волны данной природы называют *прямыми*. Их скорости могут быть реально измерены и могут служить для последующих расчетов (что широко используется на практике).

В ограниченной изотропной среде, в качестве которой можно рассматривать как угольный, так и любой из породных пластов, вопрос о разделении совокупности колебаний на волны сдвига и волны сжатия усложняется. Наблюдается взаимодействие и трансформация волн различных типов. Среди решений волнового уравнения для ограниченной среды важное место играют *поверхностные* волны, описанные Релеем и представляющие собой колебания, распространяющиеся вдоль свободной границы среды и экспоненциально затухающие при удалении от

нее. При расположении границы в  $z = 0$  потенциал поверхностной волны можно записать в виде:

$$\phi = e^{-\alpha z} e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)},$$

где  $\omega$  – частота колебаний;

$k_i$  – компоненты волнового вектора;

$\alpha$  – коэффициент пространственного затухания.

Скорость распространения поверхностных волн зависит только от скоростей поперечных и продольных волн в породах и теоретически лежит в пределах от 0,874 до 0,955 от величины  $V_s$ . Поэтому их иногда называют «замедленными» волнами.

В практике шахтной сейсморазведки особое место занимают два типа волн. Первый – так называемые *каналовые* волны или, по терминологии принятой в физике слоистых сред – *нормальные*. Второй тип – *боковые* волны. Для описания их природы приведем некоторые соотношения.

Возбуждаемую источником колебаний реальную волну можно считать сферической. Однако рассмотрение закона её распространения в углевмещающей толще затруднено, так как симметрия волны не соответствует симметрии модели. Поэтому целесообразно разложить сферическую волну на плоские, используя двойной интеграл Фурье. В итоге получим соотношения [2]:

$$z \geq 0, \quad \varphi^+ = \frac{e^{ikr}}{R} = \frac{ik}{2\pi} \int_0^{\pi/2 - i\infty} \int_0^{2\pi} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi,$$

$$z \leq 0, \quad \varphi^- = \frac{e^{ikr}}{R} = \frac{ik}{2\pi} \int_0^{\pi/2 - i\infty} \int_0^{2\pi} e^{i(k_x x + k_y y - k_z z)} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi,$$

где  $k_x = k \sin \theta \cos \varphi$ ;  $k_y = k \sin \theta \sin \varphi$ ;  $k_z = k \cos \theta$ .

Расположение вектора  $k$  в пространстве и смысл углов  $\theta$  и  $\varphi$  показаны на рис. 1.

При выборе системы координат для решения задач шахтной сейсморазведки ось  $X$  декартовой системы координат целесообразно направить на приемник колебаний, а оси  $Y$  и  $Z$  разместить в

плоскості напластовання і перпендикулярно плоскості напластовання, відповідно.

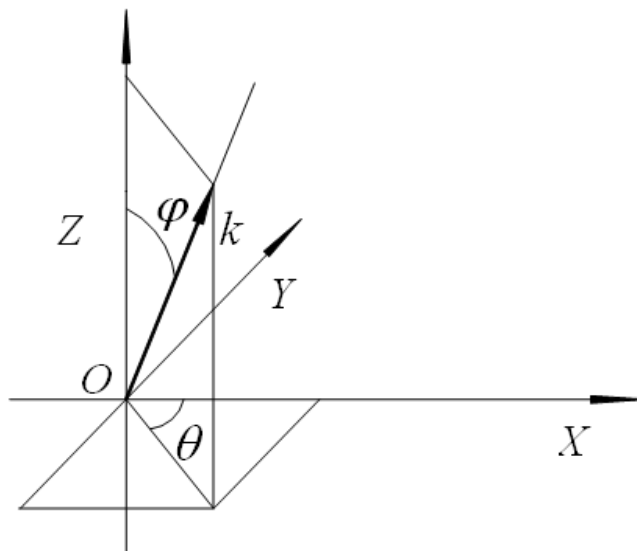


Рис. 1. К описанию разложения сферической волны на плоские

Рассмотрим, для начала, природу каналовых волн. При решении задачи о распространении плоских волн в слое, их суммарное поле в произвольной точке слоя может быть записано в виде суммы прямой волны и волн, многократно отраженных от границ слоя [2]:

$$\varphi = \sum_{l=0}^{\infty} (V_1 V_2)^l \left[ \frac{e^{ikR_{l1}}}{R_{l1}} + V_1 \frac{e^{ikR_{l2}}}{R_{l2}} + V_2 \frac{e^{ikR_{l3}}}{R_{l3}} + V_1 V_2 \frac{e^{ikR_{l4}}}{R_{l4}} \right], \quad (3)$$

где  $R_{l1} = \sqrt{r^2 + (2lh + z - z_0)^2}$ ,  $R_{l2} = \sqrt{r^2 + (2lh + z + z_0)^2}$ ,

$R_{l3} = \sqrt{r^2 + (2(l+1)h - z - z_0)^2}$ ,  $R_{l4} = \sqrt{r^2 + (2(l+1)h - z + z_0)^2}$ ,

$h$  – толщина слоя;

$z_0$  – уровень расположения источника;

$V_1$  и  $V_2$  – коэффициенты отражения на границах слоя.

Используя представление для функции Ханкеля первого рода выражение (3) можно записать в виде:

$$\varphi = \frac{2\pi i}{h} \left\{ \frac{1}{2} H_0^{(1)}(kr) + \sum_{l=1}^{\infty} \cos \frac{l\pi z}{h} \cos \frac{l\pi z_0}{h} H_0^{(1)}(\xi_l r) \right\}, \quad (4)$$

где  $\xi_l = \pm \sqrt{k^2 - (l\pi/h)^2}$ .

В волновой зоне можно воспользоваться асимптотическим представлением для функции Ханкеля и записать решение (4) в ещё более простой форме:

$$\varphi = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} e^{i\pi/4} \left\{ \frac{1}{\sqrt{k}} e^{ikr} + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \cos \frac{l\pi z}{h} \cos \frac{l\pi z_0}{h} \frac{1}{\sqrt{\xi_l}} e^{i\xi_l r} \right\}.$$

Анализ этого соотношения позволяет сделать вывод о том, что амплитуда каналовой волны убывает по сравнительно медленному закону ( $\varphi \sim r^{-0.5}$ ). Скорость волны можно определить из соотношения

$$V_l = \frac{w}{\xi_l} = c \left( 1 - \left( \frac{l\lambda}{2h} \right)^2 \right)^{-1/2},$$

где  $c$  – скорость распространения волн в слое.

Среди различных соотношений, описывающих каналовые волны, важное место занимает дисперсионное уравнение. В частности, оно может служить для определения частотных и скоростных характеристик колебаний. В простейшем случае одного слоя для волн  $SH$  оно имеет вид:

$$1 - V_1 V_2 e^{2ikh \cos \theta} = 0.$$

Для случая волн  $P$  и  $SV$  дисперсионное соотношение усложняется и принимает вид:

$$e^{i(\alpha+\beta)h} \left( V_{ps}^1 V_{sp}^1 - V_{sp}^1 V_{ps}^1 \right) \left( V_{pp}^2 V_{ss}^2 - V_{sp}^2 V_{ps}^2 \right) - V_{ss}^1 V_{ss}^2 e^{i(\beta-\alpha)h} - \\ - V_{pp}^1 V_{pp}^2 e^{-i(\beta-\alpha)h} - \left( V_{ps}^1 V_{sp}^2 + V_{sp}^1 V_{ps}^2 \right) + e^{-i(\beta+\alpha)h} = 0,$$

где  $\alpha = \sqrt{k^2 - \xi^2}$ ;  $\beta = \sqrt{\chi^2 - \xi^2}$ ;  $k = \frac{w}{V_p}$ ;  $\chi = \frac{w}{V_s}$ ;  $\xi = \frac{w}{V_f}$ ,

$V_f$  – фазовая скорость;

$V_p, V_s$  - скорости продольных и поперечных волн в слое;  
 $V_{pp}^i, V_{ss}^i, V_{ps}^i, V_{sp}^i$  - коэффициенты отражения разных типов волн (при том, что они порождают также разные типы волн) на границе под номером  $i$ .

Каналовые волны заняли прочное место инструмента шахтной сейсморазведки.

Перейдем к природе боковых волн. Рассмотрев вопрос об отражении волны от поверхности раздела сред можно показать, что поле отраженной волны представимо в виде:

$$\varphi = \varphi_{отр} + \varphi_{бок},$$

где первое слагаемое – собственно отраженная волна, а второе – боковая волна, выражение для которой можно записать в виде:

$$\varphi_{бок} = \frac{2in}{km(n^2 - 1)\sqrt{r}L_1^{3/2}} e^{ik(L_0+L)+ik_1L_1}, \quad (5)$$

где  $n = \sin \theta / \sin \theta_1$ ;  $m = \rho_1 / \rho$ ,  
 $r, L, L_1$  и  $L_0$  – пояснены на рис. 2.

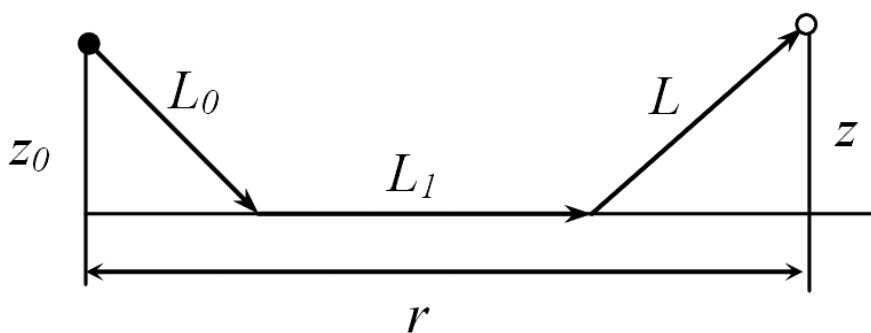


Рис. 2. К объяснению природы боковой волны

Боковая волна соответствует части решения, образуемого при угле падения большем или равном углу полного внутреннего отражения. Она распространяется вдоль границы раздела сред. Ее фронт можно описать соотношением:

$$k(L_0 + L) + k_1 L_1 = k \left( nr + \sqrt{1 - n^2} (z + z_0) \right) = \text{const}$$

Как можно легко убедиться, это прямая линия. Закон убывания волны можно получить из соотношения (5). В дальней зоне  $L_1 \approx r$  и закон убывания волны имеет вид:  $\varphi_{\dot{a}\dot{a}\dot{e}} \sim r^{-2}$ .

Боковые волны стали использоваться в шахтной сейсморазведке сравнительно недавно, но сейчас занимают ведущее место.

Если в выражении (2) справа от знака равенства опустить первые два слагаемых, то получится известное уравнение Ламе

$$\rho \ddot{u}_i = \lambda \delta_{ik} \frac{\partial u_{ll}}{\partial x_k} + 2\mu \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_k}, \quad (6)$$

записанное для изотропной однородной среды и широко применявшееся в УкрНИМИ в последние годы при проведении теоретического анализа и разработке прогнозных критериев [1].

Как правило, при решении задачи о распространении сейсмических волн в ненарушенной угленосной толще можно допустить, что компоненты вектора перемещения  $u^i$  зависят только от времени, от величины проекции расстояния между сейсмоприемником и источником на плоскость напластования, и от величины проекции этого расстояния на перпендикуляр к плоскости напластования. Тогда, в выбранной нами системе координат, можно перейти к плоской задаче и решение распадается на два вида независимо распространяющихся волн. Для  $P$  и  $SV$  волн оно запишется в виде:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{cases}, \quad (7)$$

а для  $SH$  волн:

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = +\mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right). \quad (8)$$



Приведенное выше решение задачи о распространении сейсмических колебаний отличается исключительной простотой реализации. Именно поэтому оно нашло широкое применение. Однако два слагаемых, которые были игнорированы в выражении (2) чтобы получить известное уравнение Ламе необходимы для адекватного учета влияния неоднородности среды на процесс распространения сейсмических волн.

В зоне нарушения, представляющей особый интерес в задачах шахтной сейсморазведки, угленосная толща не является плоскопараллельной средой со свойствами, не зависящими от координаты  $Y$ . Как известно [1], сместитель сброса либо надвига геометрически можно представить в виде участка плоскости (в общем случае – криволинейной поверхности), ограниченной двумя дугами, образуемыми торцами крыльев угольного пласта (на схеме, изображенной на рис. 3 точки пересечения дуг обозначены как  $S_1$  и  $S_2$ ), а зона трещиноватости представляет собой «чечевицеобразную» структуру, простирающуюся во все стороны от нарушения (заштрихованная область на рис. 3).

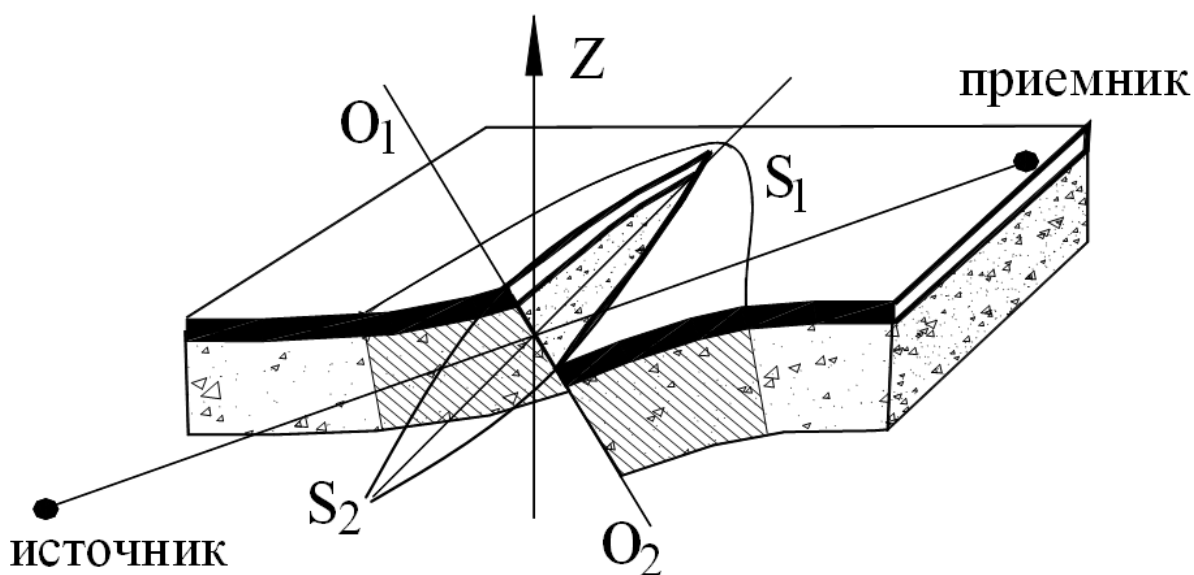


Рис. 3. К описанию особенностей учета трехмерности разрывного тектонического нарушения при моделировании процесса распространения сейсмоакустических колебаний

Поэтому решение уравнений (2) не всегда может быть сведено к задаче в плоскости, перпендикулярной плоскости напластования, где система колебаний может быть представлена в виде двух независимо распространяющихся групп колебаний  $SH$ ,  $PV$  и  $SV$ . В общем случае решение уравнений (2) необходимо искать в общем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \ddot{u} = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \\ \quad + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \rho \ddot{v} = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \\ \quad + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \rho \ddot{w} = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \\ \quad + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \end{array} \right. \quad (9)$$

С учетом напряженно-деформированного состояния горного массива сейсмоакустическое волновое поле в углепородном массиве может быть описано системой линейных дифференциальных уравнений [4]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + C \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - G \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = E \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + E \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + G \frac{\partial u}{\partial x} \end{array} \right. , \quad (10)$$

где коэффициенты представляют собой функции упругих констант, плотности, а также нормальных напряжений и деформаций.

Их можно представить в следующем виде:

$$A = A(\lambda, \mu, \rho, \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{zz}, x, z) = [(2\mu + \lambda)(1 + \varepsilon_{xx} - 2\varepsilon_{zz})] / \rho, \quad (11)$$

$$\hat{A} = A(\lambda, \mu, \rho, \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{zz}, \sigma_{xx}, \Delta\sigma, x, z) = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} \lambda(1 - \varepsilon_{zz}) - \sigma_{xx} + \mu + \frac{1}{2}(\mu + \lambda) \times \\ \times (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) + \frac{1}{2}(\lambda - 2\mu)\varepsilon_{zz} - \frac{1}{2}\Delta\sigma \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$C = C(\lambda, \mu, \rho, \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{zz}, \sigma_{xx}, \Delta\sigma, x, z) = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} \mu + \frac{1}{2}(\mu + \lambda)(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) + \\ \frac{1}{2}(\lambda - 2\mu)\varepsilon_{zz} - \frac{1}{2}\Delta\sigma \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$D = D(\lambda, \mu, \rho, \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{zz}, \sigma_{xx}, \Delta\sigma, x, z) = \frac{1}{\rho} [(\lambda + 2\mu)(1 - \varepsilon_{xx})], \quad (14)$$

$$E = E(\lambda, \mu, \rho, \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{zz}, \sigma_{xx}, \Delta\sigma, x, z) = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} \mu + \frac{1}{2}(\mu + \lambda)(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) + \\ \frac{1}{2}(\lambda - 2\mu)\varepsilon_{zz} - \frac{1}{2}\Delta\sigma \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$\lambda$  – модуль сжатия;

$\mu$  – модуль сдвига;

$\rho$  – плотность горной породы;

$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{zz}$  – упругие нормальные деформации горного массива;

$\Delta\sigma = (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})$  – разность нормальной вертикальной и горизонтальной составляющих напряжений.

Величины упругих напряжений и деформаций, соответствующих условиям подземной разработки угольных месторождений, таковы, что в приведенной постановке задачи позволяют получить изменение исходных значений  $\mu$  и  $\lambda$  лишь на 1,5–2 %, что не согласуется с данными экспериментальных исследований. Функциональные зависимости коэффициентов при частных производных в (10) не учитывают такие важные факторы как пористость и трещиноватость горных пород, и не описывают влияние неупругих составляющих деформаций на параметры колебательного процесса. Изменение вида коэффициентов при учете дополнительных характеристик углевмещающей толщи и её состояния достигается использованием условной замены  $\mu$  и  $\lambda$  на  $\mu_{эфф}$  и  $\lambda_{эфф}$ :

$$\mu_{эфф} = \mu + \Delta\mu; \lambda_{эфф} = \lambda + \Delta\lambda$$

где  $\Delta\mu$  и  $\Delta\lambda$  рассматриваются как дополнительные слагаемые, вносимые за счет учета состояния горного массива и характеристик пород.

Такой подход не нов. Например, в монографии [4] на основе анализа результатов экспериментальных исследований, проведенных на ряде шахт Украины и России, представлены зависимости модуля сдвига и других параметров среды от коэффициента пористости, от величины горного давления и других параметров. В данной работе выведен вид зависимостей «эффективных» значений констант Ламе от пористости и трещиноватости пород с учетом влияния горного давления. Автор основывался на предположении, что трещиноватость описывается системой хаотически расположенных, пересекающихся эллипсоидных микротрещин, параметры которых распределены по нормальному закону.

Представим упругие константы в виде:

$$\mu = \mu_0 (1 + \Delta_\mu); \quad \lambda = \lambda_0 (1 + \Delta_\lambda) \quad (16)$$

где  $\mu_0, \lambda_0$  – упругие константы горных пород без учета пористости, трещиноватости, величины напряжений и неупругих деформаций,

$\Delta_\mu, \Delta_\lambda$  – корректирующие добавки, учитывающие влияние вышеуказанных факторов.

Приведенные в [4] результаты исследований показали, что  $\Delta_\mu$  и  $\Delta_\lambda$  могут быть вычислены по следующим формулам:

$$\Delta_\lambda = K_\lambda f(\Pi), \Delta_\mu = K_\mu f(\Pi), \quad (17)$$

где  $K_\lambda$  и  $K_\mu$  – коэффициенты, учитывающие форму трещин и пор и предполагающие, что трещиноватость описывается системой хаотически расположенных пересекающихся эллипсоидальных микротрещин, параметры которых распределены по нормальному закону. Они могут быть определены с учетом теории микронеоднородных трещиноватых сред из выражений:

$$\hat{E}_\lambda = \frac{16(1-\nu^2)}{3\pi(1-2\nu)}, \quad \hat{E}_\mu = \frac{32(1-\nu)(5-\nu)}{15\pi(2-\nu)}, \quad (18)$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона горной породы,  
 $f(\Pi)$  – функция, определяющая влияние концентрации тре-

щин и пор на корректирующие добавки и учитывающая влияние горного давления на эффективные модули упругости. Она может быть представлена в виде:

$$f(\Pi) = e^{-\Pi} - e^{-\Pi_0}, \quad (19)$$

где  $\Pi$  – текущая трещинная пористость горной породы;

$\Pi_0$  – трещинная пористость горной породы при гидростатическом давлении в ненарушенном состоянии.

В рамках модели Гука можно осуществлять моделирование большинства типов колебаний, несущих информацию о строении угленосной толщи. Но при решении целого ряда задач данный подход имеет ограниченное применение, поскольку реальные геологические среды являются сложным материалом, отличающимся анизотропией свойств и представляющим собой неоднородную слоистую и пористую двух – или даже трехфазную структуру. Основная проблема, решение которой чрезвычайно сложно в рамках упругой модели Гука – учет поглощения сейсмических колебаний. Классические теории поглощения базируются на представлении толщи горных пород как о сплошной среде, в которой наряду с упругим напряжениям учитываются силы вязкости и внутреннего трения, или как о наследственной среде, в которой напряжения в данный момент времени зависят не только от значений деформаций, но и от состояния тела в предшествующие моменты времени (механизм «механической памяти»).

В настоящее время детально разработаны несколько подходов. Это модели Кельвина-Фойгта, Максвелла, стандартного линейного тела (являющегося сочетанием двух предыдущих), оптимального линейного тела. В этих моделях делается попытка учесть силы вязкого и внутреннего трения. В моделях Больцмана и Б.В. Дерягина учитывается механизм «механической памяти».

Как показано в работе О.К. Кондратьева [3], для учитывающих силы вязкого и внутреннего трения подходов решения задачи о распространении волн являются частными случаями решения общего волнового уравнения, которое для простоты в одномерном случае может быть записано в виде:

$$\sum_{k=0}^M \mu_k \frac{\partial^{2+k} u}{\partial x^2 \partial t^k} = \sum_{l=1}^N \eta_l \frac{\partial^l u}{\partial t^l}, \quad (20)$$

где  $\mu_k$  и  $\eta_l$  – коэффициенты, учитывающие реологические параметры среды.

При этом ограничиваются уравнениями с  $N < 3$ ,  $M < 3$ , чтобы при конечно-разностном подходе остаться в рамках легко реализуемой трехслойной схемы. К тому же, учет слагаемых с производными более высокого порядка требует привлечения дополнительных коэффициентов, для которых практически не осуществимо не только оценить численное значение, но и определить физический смысл. Одним из таких подходов является использование волнового уравнения (20) вида

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu' \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (21)$$

Это уравнение (предложенное О.К. Кондратьевым как «оптимальное») может быть легко разрешимо численными методами. Система волновых уравнений для задачи в плоскости может быть записана в виде.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial u}{\partial t} = (2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\mu + \lambda) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \\ \quad (2\mu' + \lambda') \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + (\mu' + \lambda') \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial z \partial t} + \mu' \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial t}; \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial w}{\partial t} = (2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \\ \quad (2\mu' + \lambda') \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} + (\mu' + \lambda') \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z \partial t} + \mu' \frac{\partial^3 w}{\partial z^2 \partial t}; \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial v}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \mu' \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t} + \mu' \frac{\partial^3 v}{\partial z^2 \partial t}; \end{array} \right. \quad (22)$$

где  $\rho$  – плотность породы;

$u$ ,  $v$  и  $w$  – компоненты смещений по  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно;

$\lambda$  и  $\mu$  – коэффициенты Ламе;

$\lambda'$ ,  $\mu'$  – реологические параметры среды, характеризующие процессы диссипации упругой энергии;

$\eta$  – коэффициент, учитывающий вязкость среды.

Коэффициенты  $\lambda'$  и  $\mu'$  представляют собой трудно определяемые величины. В ИПКОН РАН проводились исследования по методам их оценки [4] применительно к породам угленосных отложений. Были предложены различные алгоритмы, однако на наш взгляд, проблема точного определения данных величин далека от решения.

Интегральные изменения модулей упругости среды под влиянием различных факторов, в том числе в зонах влияния аномалий, исследованы в гораздо большей степени, чем свойства величин  $\lambda'$  и  $\mu'$ . В частности, их можно оценить экспериментально, измерив скорости распространения реальных волн сдвига и сжатия в породах и используя известные соотношения, связывающие их с модулями упругости. Применяемый в УкрНИМИ НАНУ подход основан на подборе  $\mu'$  и  $\eta'$  таким образом, чтобы при заданном  $\tau$  эффективные модули упругости в пределах заданной погрешности соответствовали эмпирически полученным.

### СПИСОК ССЫЛОК

1. Анциферов А.В. Теория и практика шахтной сейсморазведки. – Донецк: ООО “Алан”, 2002. – 312 с.
2. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. – 2-е изд. – М.: Наука, 1973. – 343 с.
3. Кондратьев О.К. Сейсмические волны в поглощающих средах. – М.:Недра, 1986, 176 с.
4. Захаров В.Н. Сейсмоакустическое прогнозирование и контроль состояния и свойств горных пород при разработке угольных месторождений. – М.: ФГУП ННЦ ГП – ИГД им. А.А. Скочинского, 2002. – 172 с.