

УДК 534.26

МОДЕЛЮВАННЯ МЕХАНІЧНОЇ РЕАКЦІЇ ЦИЛІНДРА З В'ЯЗКО-ПРУЖНОЇ БІОТКАНИНИ ПРИ ГАРМОНІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ ТОРЦІВ В УМОВАХ ПОВНОГО ЗЧЕПЛЕННЯ З ВІБРАТОРОМ

В. Н. ОЛІЙНИК

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Одержано 4.02.2004 ◊ Переглянуто 5.07.2004

Розв'язано задачу про гармонічні коливання в'язко-пружного циліндра з механічними властивостями, близькими до властивостей біотканин. При цьому вважалось, що торці циліндра перебувають в умовах повного зчеплення з вібратором, а його бічна поверхня – вільна. Розв'язок задачі побудовано у вигляді рядів Фур'є, коефіцієнти яких обчислюються з нескінченних алгебраїчних систем, породжених граничними умовами. Аналіз частотної поведінки механічного імпедансу торця циліндра дозволив оцінити ступінь впливу граничних умов на поверхні контакту на інтегральні механічні характеристики об'єкта.

Решена задача о гармонических колебаниях вязко-упругого цилиндра с механическими свойствами, близкими к свойствам биотканей. При этом считалось, что торцы цилиндра находятся в условиях полного сцепления с вибратором, а его боковая поверхность – свободна. Решение задачи построено в виде рядов Фурье, коэффициенты которых вычисляются из бесконечных алгебраических систем, порожденных граничными условиями. Анализ частотного поведения механического импеданса торца цилиндра позволил оценить степень влияния граничных условий на поверхности контакта на интегральные механические характеристики объекта.

A problem on harmonic vibrations of a visco-elastic cylinder with properties close to that of the biotissues is solved. At that the cylinder's faces were considered to be completely adhering to the vibrator, while its lateral surface is free. The solution of the problem was developed in form of the Fourier series with coefficients derived from the infinite algebraic system generated by the boundary conditions. The analysis of frequency behavior for cylinder's mechanical impedance allowed to estimate the degree of the boundary conditions influence on the object's integral characteristics.

ВСТУП

На сьогоднішній день існує велика кількість достовірних експериментальних даних про величину так званого механічного імпедансу поверхні м'яких біотканин, який за означенням є нормальною складовою реакції, віднесеною до значення коливної швидкості робочої поверхні вібратора. У цьому контексті слід відзначити роботи, в яких механічний імпеданс реєструвався на поверхні тіла піддослідних добровольців – *in situ* (див., наприклад [1–3]), і дослідження на гелевих моделях-фантомах з механічними властивостями, максимально наближеними до властивостей епітелію, гладких м'язів та ін. [4, 5].

Зрозуміло, що величина механічного імпедансу безпосередньо пов'язана з механічними константами досліджуваного матеріалу. Тому різні модифікації віброметричних методик дуже широко застосовуються для тестування реальних і модельних біофізичних матеріалів (зразків тканин різних видів тварин, фантомів, штучних трансплантатів) [6–9]. При аналізі одержаних результатів дослідники здебільшого виходять з того, що м'які біотканини при низькоамплітудному вібровантаженні в цілому поведуть себе як лінійні в'язко-

пружні ізотропні чи анізотропні тіла. Незважаючи на певну обмеженість такого припущення [10], застосування лінійного підходу для задач біофізичної імпедансометрії в діапазоні аудіочастот (до $10 \div 20$ кГц) виявилось цілком виправданим.

Однак при детальному аналізі експериментальних даних впадає в око суттєва невідповідність між величиною механічного імпедансу, визначеною вібраційним методом [2, 3], і даними про рівень послаблення звуків серця при його реєстрації кінематичними сенсорами різної ваги [10]. Важливість з'ясування цієї розбіжності обумовлена активним розвитком сучасних методик медичного діагностування стану організму на основі контактної реєстрації низькочастотних віброакустичних полів з поверхні тіла [2, 11, 12]. У роботах [12, 13] висунуто припущення про те, що основною причиною цієї невідповідності може бути принципова різниця у характері граничних умов при контакті тіла людини з вібратором і кінематичним сенсором.

З огляду на локальний характер взаємодії поверхні тіла з сенсором та вібратором, у статті [14] було запропоновано спрощену постановку задачі про віброзбудження циліндра з біоматеріалу в умовах гладкого контакту з вібратором. При цьому для біоматеріалу приймалась модель лінійного

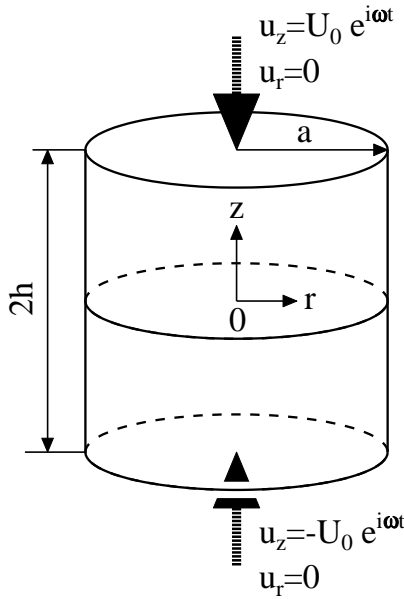


Рис. 1. Пружний циліндр з кінематично навантаженими торцями

в'язко-пружного тіла.

Ця стаття є логічним продовженням дослідження [14]. У ній розглядається модельна задача про гармонічні коливання циліндричного зразка з матеріалу, фізичні параметри якого близькі до параметрів м'яких біотканин тіла людини, в умовах повного зчеплення торців з плоским жорстким штампом-вібратором. Основним нашим завданням є моделювання відносної інтегральної механічної реакції на поверхні вібратора й аналіз поведінки механічного імпедансу торця у діапазоні, характерному для низькочастотних біофізичних вимірювань.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

До торців кругового циліндра довжиною $2h$ й радіусом a (рис. 1) прикладено гармонічне за часом кінематичне навантаження $U_0 e^{i\omega t}$, колінеарне до його осі. Бічна поверхня циліндра вільна від навантажень.

Матеріал циліндра вважаємо в'язко-пружним – його динамічні деформації описуються рівнянням Ламе [15], яке для гармонічного випадку має вигляд

$$c_{1*}^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - c_{2*}^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \omega^2 \mathbf{u} \quad (1)$$

(експоненційний часовий множник $e^{i\omega t}$ опущено). Тут c_1, c_2 – комплексні швидкості поздовжніх та поперечних хвиль у матеріалі відповідно; \mathbf{u} – ве-

ктор амплітуд зміщень. Уявні частини комплексних швидкостей пружних хвиль відображають дисипативні властивості матеріалу і, взагалі кажучи, можуть бути частотно залежними. Формально

$$c_1^2 = 2 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{G^*}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{G^*}{\rho},$$

де ρ – густина матеріалу циліндра; ν – коефіцієнт Пуассона; G^* – комплексний модуль зсуву,

$$G^* = G + i(G' + \omega G''). \quad (2)$$

Оскільки задача у наведеній постановці має осьову симетрію, то в усіх співвідношеннях вектор зміщень має тільки дві компоненти – радіальну u_r і нормальну u_z . З урахуванням цього граничні умови на бічній поверхні запишемо як відсутність радіальних і дотичних механічних напружень при $r=a, |z| \leq h$:

$$\frac{1-2\nu}{2G^*} \sigma_r = (1-\nu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{G^*} \tau_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0.$$

Сформулюємо граничні умови на торцях циліндра. Будемо вважати, що нормальні зміщення торця циліндра відбуваються за рахунок кінематичного навантаження з заданою амплітудою:

$$u_z = \pm U_0 \quad \text{при} \quad z = \pm h, \quad 0 \leq r \leq a. \quad (4)$$

Окрім того, при повному зчепленні (прилипанні) жорсткого штампа-вібратора до торців циліндра приймається відсутність радіальних зміщень на них:

$$u_r = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm h, \quad 0 \leq r \leq a. \quad (5)$$

Як було зазначено вище, нас цікавить механічний імпеданс торця циліндра, який у даному випадку визначається за формулою

$$Z = \frac{F_z}{i\omega U_0} = \frac{2\pi}{i\omega U_0} \int_0^a \sigma_z r dr \quad \text{при} \quad z = \pm h, \quad (6)$$

де F_z – повна реакція торця циліндра вздовж осі z ; σ_z – осьові нормальні напруження в циліндрі,

$$\sigma_z = \frac{2G^*}{1-2\nu} \left[(1-\nu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \nu \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \right].$$

Постановка цієї задачі повністю аналогічна до задач, розглянутих у монографії [15]. Це дозволяє скористатись методиками й аналітичними співвідношеннями, розробленими у цій роботі. Насамкінець зауважимо, що внаслідок симетрії розглянутої задачі відносно площини $z=0$ будемо розглядати тільки торець $z=h$.

2. ПРОЦЕДУРА РОЗВ'ЯЗАННЯ

Загальний розв'язок задачі для зміщень має вигляд [15]:

$$\begin{aligned} \frac{u_r}{U_0} = & A_0 J_1(k_1 r) + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \eta_n z \times \\ & \times \left[A_n I_1(q_{1n} r) + A_n^* I_1(q_{2n} r) \right] - \\ & - \sum_{j=1}^{\infty} J_1(\lambda_j r) \left[B_j \frac{\lambda_j}{p_{1j}} \operatorname{ch} p_{1j} z + \right. \\ & \left. + B_j^* \frac{p_{2j}}{\lambda_j} \operatorname{ch} p_{2j} z \right], \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{u_z}{U_0} = & \frac{\sin k_1 z}{\sin k_1 h} - \sum_{n=1}^{\infty} \sin \eta_n z \times \\ & \times \left[A_n \frac{\eta_n}{q_{1n}} I_0(q_{1n} r) + A_n^* \frac{q_{2n}}{\eta_n} I_0(q_{2n} r) \right] + \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} J_0(\lambda_j r) \left[B_j \operatorname{sh} p_{1j} z + B_j^* \operatorname{sh} p_{2j} z \right]. \end{aligned}$$

У співвідношеннях (7)

$$\eta_n = \frac{\pi n}{h}; \quad k_l = \frac{\omega}{c_l};$$

$$\lambda_j \neq 0; \quad J_1(\lambda_j a) = 0,$$

$$q_{ln} = \sqrt{\eta_n^2 - k_l^2}; \quad p_{lj} = \sqrt{\lambda_j^2 - k_l^2}, \quad l = 1, 2;$$

J_0, J_1, I_0 та I_1 – відповідно звичайні й модифіковані функції Беселя першого роду (індекс означає порядок функції Беселя); A_n, A_n^*, B_j та B_j^* – невідомі коефіцієнти рядів Фур'є.

Оскільки ми вивчаємо імпедансні властивості циліндра, важливо записати формулу (6) для визначення повної реакції торця через ряди (7). Після інтегрування у межах $0 \leq r \leq a$ з урахуванням відомих властивостей циліндричних функцій одержуємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G^* U_0} \frac{h}{\pi a^2} \mathcal{F}_z = & \frac{i\omega}{2G^*} \frac{h}{\pi a^2} \mathcal{Z} = \chi k_1 h \operatorname{ctg} k_1 h + \\ & + \frac{2h}{a} \left\{ (\chi - 1) A_0 J_1(k_1 a) - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \times \right. \\ & \left. \times \left[\left(1 + \frac{k_2^2}{2q_{1n}^2} \right) A_n I_0(q_{1n} a) + A_n^* I_0(q_{2n} a) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

При виводі формули (8) були враховані тотожно-

сті

$$\frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} = \frac{k_2^2}{2k_1^2} \stackrel{\text{def}}{=} \chi, \quad \frac{\nu}{1 - 2\nu} = \chi - 1.$$

Цікаво зауважити, що до виразу для F_z не увійшли коефіцієнти B_j, B_j^* . Отже, вони будуть впливати на імпеданс торця лише опосередковано, коригуючи значення коефіцієнтів A_0, A_n і A_n^* .

Значимо, що дві з чотирьох граничних умов визначають прості залежності між відповідними невідомими коефіцієнтами. Так, з умови відсутності дотичних напружень τ_{rz} на бічній поверхні циліндра $r = a, |z| \leq h$ (друге співвідношення (3)) випливає рівність

$$A_n = - \left(1 - \frac{k_2^2}{2\eta_n^2} \right) \frac{I_1(q_{2n} a)}{I_1(q_{1n} a)} A_n^*, \quad (9)$$

а з кінематичної умови (4) для u_z на торці –

$$B_j = - \frac{\operatorname{sh} p_{2j} h}{\operatorname{sh} p_{1j} h} B_j^*. \quad (10)$$

Відсутність нормальних напружень σ_r на бічній поверхні циліндра $r = a, |z| \leq h$ породжує функціональне рівняння

$$\begin{aligned} & (\chi - 1) k_1 a \frac{\cos k_1 z}{\sin k_1 h} + \\ & + A_0 J_1(k_1 a) \left[\chi k_1 a \frac{J_0(k_1 a)}{J_1(k_1 a)} - 1 \right] - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \cos \eta_n z A_n^* I_1(q_{2n} a) \times \\ & \times \left\{ \frac{k_2^2}{2\eta_n} + q_{1n} a \frac{I_0(q_{1n} a)}{I_1(q_{1n} a)} \times \right. \\ & \times \left(1 - (\chi - 1) \frac{k_1^2}{q_{1n}^2} \right) \left(1 - \frac{k_2^2}{2\eta_n^2} \right) - \\ & \left. - q_{2n} a \frac{I_0(q_{2n} a)}{I_1(q_{2n} a)} \right\} + \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} B_j^* J_0(\lambda_j a) \times \\ & \times \left\{ \left(1 + \frac{k_2^2}{2p_{1j}^2} \right) \frac{\operatorname{sh} p_{2j} h}{\operatorname{sh} p_{1j} h} p_{1j} a \operatorname{ch} p_{1j} z - \right. \\ & \left. - p_{2j} a \operatorname{ch} p_{2j} z \right\} = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

яке після алгебраїзації дає

$$A_0 J_1(k_1 a) \frac{h}{a} \left[\chi k_1 a \frac{J_0(k_1 a)}{J_1(k_1 a)} - 1 \right] + \sum_{j=1}^{\infty} B_j^* J_0(\lambda_j a) \operatorname{sh} p_{2j} h \frac{k_2^2}{2p_{1j}^2} = -(\chi - 1), \tag{12a}$$

$$A_n^* I_1(q_{2n} a) \frac{h}{2a} \left\{ \frac{k_2^2}{2\eta_n} + q_{1n} a \frac{I_0(q_{1n} a)}{I_1(q_{1n} a)} \times \left(1 - (\chi - 1) \frac{k_1^2}{q_{1n}^2} \right) \left(1 - \frac{k_2^2}{2\eta_n^2} \right) - q_{2n} a \frac{I_0(q_{2n} a)}{I_1(q_{2n} a)} \right\} + (-1)^{n+1} \sum_{j=1}^{\infty} B_j^* J_0(\lambda_j a) \operatorname{sh} p_{2j} h \times \left\{ \left(1 + \frac{k_2^2}{2p_{1j}^2} \right) \frac{p_{1j}^2}{p_{1j}^2 + \eta_n^2} - \frac{p_{2j}^2}{p_{2j}^2 + \eta_n^2} \right\} = (-1)^{n+1} (\chi - 1) \frac{k_1^2}{q_{1n}^2}. \tag{12b}$$

При виводі формул (12a), (12b) використувались відомі інтегральні співвідношення для гіперболічних і тригонометричних функцій [16, стор. 212]:

$$\int_{-h}^h \operatorname{ch} p_{lj} z dz = \frac{2 \operatorname{sh} p_{lj} h}{p_{lj}},$$

$$\int_{-h}^h \operatorname{ch} p_{lj} z \cos \eta_n z dz = (-1)^n \frac{2 p_{lj}}{p_{1j}^2 + \eta_n^2} \operatorname{sh} p_{lj} h.$$

При жорсткому зчепленні торця циліндра зі штампом відсутність радіальних зміщень по всій поверхні торця $|z|=h$, $0 \leq r \leq a$ (умова (5)) породжує функціональне рівняння

$$A_0 J_1(k_1 r) - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n^* \times \left[\left(1 - \frac{k_2^2}{2\eta_n^2} \right) \frac{I_1(q_{2n} a)}{I_1(q_{1n} a)} I_1(q_{1n} r) - I_1(q_{2n} r) \right] + \sum_{j=1}^{\infty} B_j^* J_1(\lambda_j r) \operatorname{sh} p_{2j} h \times \left[\frac{\lambda_j}{p_{1j}} \operatorname{cth} p_{1j} h - \frac{p_{2j}}{\lambda_j} \operatorname{cth} p_{2j} h \right] = 0. \tag{13}$$

Його алгебраїзацію проведемо за допомогою інтегральних співвідношень, наведених у [16, стор. 648]:

$$\int_0^a J_1(\lambda_j r) J_1(k_1 r) r dr = -\frac{\lambda_j a}{\lambda_j^2 - k_1^2} J_0(\lambda_j a) J_1(k_1 a) = -\frac{\lambda_j a}{p_{1j}^2} J_0(\lambda_j a) J_1(k_1 a),$$

$$\int_0^a J_1(\lambda_j r) I_1(q_{ln} r) r dr = -\frac{\lambda_j a}{\lambda_j^2 + q_{ln}^2} J_0(\lambda_j a) I_1(q_{ln} a) = -\frac{\lambda_j a}{p_{lj}^2 + \eta_n^2} J_0(\lambda_j a) I_1(q_{ln} a),$$

$l = 1, 2.$

Додатково зазначимо, що повна на відрізку $0 \leq r \leq a$ система функцій $\{J_1(\lambda_j r) \mid j \geq 1\}$ є ортогональною на ньому з нормою

$$\int_0^a J_1^2(\lambda_j r) r dr = \frac{a^2}{2} J_0^2(\lambda_j a).$$

Остаточно з урахуванням залежностей (9) одержуємо підсистему алгебраїчних рівнянь, яка доповнює співвідношення (12a) і (12b):

$$\frac{1}{a} \frac{\lambda_j}{p_{1j}^2} A_0 J_1(k_1 a) + \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} A_n^* I_1(q_{2n} a) \times \left[\left(1 - \frac{k_2^2}{2\eta_n^2} \right) \frac{1}{p_{1j}^2 + \eta_n^2} - \frac{1}{p_{2j}^2 + \eta_n^2} \right] - \frac{1}{2} B_n^* J_0(\lambda_j a) \operatorname{sh} p_{2j} h \times \left[\frac{\lambda_j}{p_{1j}} \operatorname{cth} p_{1j} h - \frac{p_{2j}}{\lambda_j} \operatorname{cth} p_{2j} h \right] = 0,$$

$j = 1, 2, \dots$

Проведені викладки показують, що при повному зчепленні торця зі штампом неможливо побудувати процедуру розв'язку, яка б дозволила одержати явні аналітичні вирази для коефіцієнтів рядів Фур'є. При цьому нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь (12a), (12b), (15) відносно невизначених коефіцієнтів рядів Фур'є A_0 ,

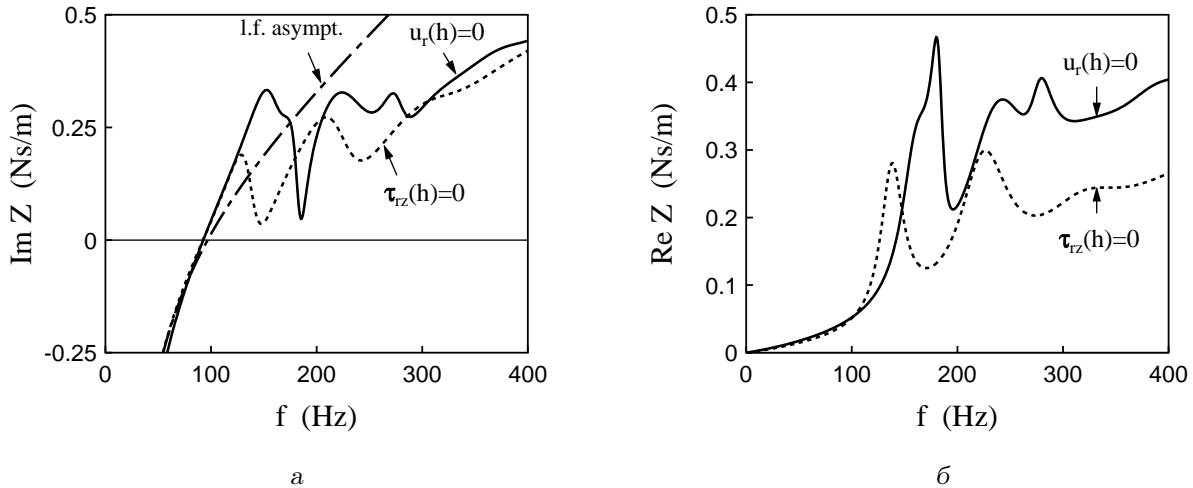


Рис. 2. Частотні залежності імпедансу в'язко-пружного циліндра при кінематичному навантаженні торців: *неперервна* – повне зчеплення, *штрихова* – гладкий контакт, *штрих-пунктирна* – низькочастотна асимптотика [14]

A_n^* , B_j^* слід розглядати як сукупність базових аналітичних співвідношень для обчислення шуканих фізичних величин, які визначають напружено-деформований стан циліндра [15].

3. ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ

Питання про вибір геометричних і фізичних параметрів моделі було детально розглянуто у статті [14]. Обрахунки проводились для циліндра з розмірами $2a = 11.8$ мм, $h = 6.5$ мм, оскільки ці значення діаметра і товщини досить типові для реальних імпедансометричних, фоно- і реєспіросонографічних систем. Вважалося, що матеріал циліндра має такі фізичні характеристики: $\rho = 1100$ кг/м³, $\text{Re } c_1 = 1500$ м/с, $\text{Re } c_2 = 1.51$ м/с. Це відповідає $G \approx 2.5$ кПа, $\nu \approx 0.4999$, що характерно для консолидованих м'яких біотканин [6, 7, 14].

Зауважимо, що оскільки хвильові розміри досліджуваного об'єкта значно менші за довжину поздовжньої хвилі, то припустимо покласти $\text{Im } c_1 = 0$ (на довгих хвилях дисипацією можна знехтувати). Дисипативні ж властивості поперечної хвилі визначаються значеннями компонент модуля зсуву, які входять до формули (2). Як і у [14], при розрахунках вважалося, що $G' = 250$ Па, $G'' = 0.25$ Па·с. Взагалі кажучи, коефіцієнт Пуассона для дисипативного середовища також є комплексною величиною, проте у нашому випадку його уявна частина принаймні на вісім порядків менша за дійсну [5]. Принагідно зауважимо, що реальна модель затухання у м'яких біотканинах тіла людини може бути значно складнішою, ніж за-

пропонована нами. Це питання потребує окремого розгляду із залученням реологічних гіпотез про механізми формування механічних властивостей м'язових, жирових та епітеліальних тканин людини [17].

Розрахунковий частотний діапазон від 0 до 400 Гц був обраний на підставі результатів віброметричних експериментів [2, 3] – саме на цих частотах вдавалося надійно фіксувати величину динамічної реакції поверхні тіла людини при різних умовах закріплення сенсорів і вібраторів. Якщо говорити у термінах хвильових розмірів, це відповідає $|k_2 a| \leq 9.5$ (нагадаємо, що $|k_1 a| \ll 1$).

При чисельному аналізі нескінченна система (12a), (12b), (15) розв'язувалась методом простої редукції. Оскільки шуканою була інтегральна величина – механічний імпеданс торця, застосування методів покращення збіжності за допомогою виділення особливості на ребрі вважалося недоцільним. Контроль за достовірністю одержаних результатів здійснювався за допомогою перевірки якості виконання граничних умов для радіальних напружень σ_r (3) і радіальних зміщень u_r (5). Встановлено, що для прийнятих фізичних і геометричних параметрів системи вже при урахуванні 10 членів у кожному з рядів, які формують загальні розв'язки (7), умова відсутності радіальних зміщень на торці циліндра виконувалась з точністю до 10 % від u_r/U_0 при $0 \leq r \leq 0.9a$. Як і слід було очікувати, збіжність умови по напруженням на бічній поверхні виявилась помітно гіршою. Тут для досягнення похибки, не більшої за 20 % від $\sigma_r/(2G)$ (при одиничній амплітуді зміщення U_0) у

відрізках рядів відносно A_n^* і B_j^* доводилось утримувати понад 100 членів.

Таким чином, можна зробити висновок про неможливість побудови ефективного алгоритму визначення полів напружень у в'язко-пружному циліндрі без застосування процедури виділення особливості на ребрі циліндра. Проте вже при утриманні в рядах від 5 до 10 членів спостерігається стабілізація розрахункових значень \mathcal{Z} у межах кількох десятків відсотка.

На рис. 2 показані частотні залежності уявної та дійсної частин імпедансу в'язко-пружного циліндра при кінематичному навантаженні торців. Тут же штриховими лініями показані дані, розраховані для випадку гладкого контакту. З графіків видно, що і при повному зчепленні, і при гладкому контакті поперечні моди коливань відіграють значну роль у формуванні динамічної реакції торця циліндра. При цьому в обох випадках вплив поперечних мод робить систему більш "жорсткою", знижуючи ефективне значення приєднаної маси на частотах вище поздовжнього резонансу [14].

При аналізі отриманої залежності імпедансу \mathcal{Z} у діапазоні $f \leq 400$ Гц доцільно виділити три частотні зони. Перша з них лежить нижче першого поздовжнього резонансу циліндра (від 0 до 100 Гц). Тут імпеданси для випадків жорсткого зчеплення і гладкого контакту відрізняються мало. При цьому для обох типів граничних умов $\mathbf{Im} \mathcal{Z}$ має характер пружності, а $\mathbf{Re} \mathcal{Z}$ монотонно зростає за квадратичним законом. Можна припустити, що на цих частотах у системі домінує поздовжня мода і тип умов на торцях мало впливає на формування динамічної реакції циліндра. Справедливість цієї гіпотези підтверджується тим, що у вказаному діапазоні обидві залежності на рис. 2, а практично співпадають з низькочастотною асимптотикою для $\mathbf{Im} \mathcal{Z}$ [14] (штрих-пунктирна крива).

На частотах від 100 до 300 Гц (друга зона) низькочастотна асимптотика перестає працювати. Тут спостерігається досить сильна порізаність кривих для \mathcal{Z} в обох розглянутих випадках, спричинена наявністю резонансів нижчих згинальних мод, які інтенсивно збуджуються в околі торця циліндра. Природно, що відповідні резонансні частоти відчутно залежать від типу закріплення торців, а хід імпедансних залежностей досить сильно відрізняється. Проте видно, що $\mathbf{Im} \mathcal{Z}$ після першого поздовжнього резонансу завжди приймає характер маси (можливо, за виключенням циліндрів з $h/r \ll 1$, для яких можуть існувати вузькі зони переходу $\mathbf{Im} \mathcal{Z}$ до пружності). Поведінка $\mathbf{Re} \mathcal{Z}$ в означеному діапазоні також стає суттєво немонотонною.

У третій зоні ($f > 300$ Гц) роль в'язкості матеріалу циліндра зростає настільки, що згинальні резонанси все більше згладжуються, а імпедансні криві стають монотонними. Щодо $\mathbf{Im} \mathcal{Z}$, обидві залежності досить близькі. Можна стверджувати, що існує тенденція до незначного збільшення приєднаної маси для циліндра при жорсткому зчепленні торця з вібратором. Втім цей ефект виражений досить слабо. Натомість тут спостерігається значне (в середньому у півтора рази) зростання $\mathbf{Re} \mathcal{Z}$. Очевидно воно зумовлене демпфуванням згинальних коливань, які при жорсткому зчепленні збуджуються в околі торця $z \rightarrow \pm h$ більш інтенсивно, ніж при гладкому контакті.

Слід зазначити, що експериментальні значення активної частини імпедансу поверхні тіла людини суттєво перевищують усі розрахункові оцінки, одержані для в'язко-пружного циліндра. Ця розбіжність може бути пояснена наявністю двох механізмів формування втрат. По-перше, при проведенні експериментів на тілі людини або на гелевому фантомі [3, 4] значну роль має відігравати збудження хвиль, які поширюються від краю вібратора на нескінченність (втрати на випромінення). По-друге, в експериментах могла бути не забезпечена умова гладкості контакту вібратора з поверхнею об'єкта. Як наслідок, результати вимірювань спотворюються за рахунок зовнішнього тертя у зоні контакту. Про справедливість такого припущення говорить зокрема те, що експериментальна частотна залежність $\mathbf{Re} \mathcal{Z}$ має незначний нахил до осі абсцис, а його значення істотно відрізняються від нуля навіть на дуже низьких частотах (як відомо, величина зовнішнього тертя не повинна залежати від частоти коливань [17]).

ВИСНОВКИ

Проведено чисельно-аналітичне розв'язання задачі про коливання в'язко-пружного циліндра з м'якої біотканини при повному зчепленні його торців з абсолютно жорстким штампом-вібратором. Проаналізовано збіжність чисельного алгоритму при застосуванні методу простої редукції.

Встановлено, що більш інтенсивне збудження згинальних мод в околі торця, у порівнянні з випадком гладкого контакту, призводить до значного зростання активної частини його механічного імпедансу. Крім того, спостерігається тенденція до незначного підвищення еквівалентної маси (на частотах вище першого поздовжнього резонансу).

Проведений аналіз дає надію на можливість адекватного пояснення особливостей формування імпедансних властивостей поверхні тіла людини на

аудіочастотах у рамках лінійної динамічної теорії пружності з урахуванням втрат механічної енергії у матеріалі.

1. *Oestreicher H. L.* Field and impedance of an oscillating sphere in a viscoelastic medium with an application to biophysics // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1951.– **23**, N 6.– P. 707–714.
2. *Verburg J., van Vollenhoven E.* Phonocardiography: physical and technical aspects and clinical uses // *Non invasive physiological measurements.*– London: Academic press, 1979.– P. 213–259.
3. *Тиманин Е. М.* Модель формирования импедансных свойств мягких биологических тканей // *Методы вибрационной диагностики реологических характеристик мягких материалов и биологических тканей.*– Горький: ИПФ АН СССР, 1989.– С. 75–91.
4. *Еремин Е. В., Тиманин Е. М.* Интерпретация механического импеданса слоя, измеренного с помощью твердого круглого штампа // *Акуст. ж.*– 2000.– **46**, N 4.– С. 490–495.
5. *Zhang X., Royston T. J., Mansy H. A., Sandler R. H.* Radiation impedance of a finite circular piston on a viscoelastic half-space with application to medical acoustics // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 2001.– **109**, N 2.– P. 795–802.
6. *Лебедева Л. П.* Измерение динамического комплексного модуля сдвига тканей животных // *Акуст. ж.*– 1965.– **11**, N 2.– С. 197–200.
7. *Greenleaf J. F., Fatemi M., Insana M.* Selected methods for imaging elastic properties of biological tissues // *Ann. Rev. Biomed. Engng.*– 2003.– **5**.– P. 57–78.
8. *Gennisson J.-L., Catheline S., Chaffai S., Fink M.* Transient elastography in anisotropic medium: Application to the measurement of slow and fast shear wave speeds in muscles // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 2003.– **114**, N 1.– P. 536–540.
9. *Titze I. R., Klemuk S.A., Gray S.* Methodology for rheological testing of engineering biomaterials at low audio frequencies // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 2004.– **115**, N 1.– P. 392–401.
10. *Vermarien H., van Vollenhoven E.* The recording of heart vibrations: a problem of vibration measurement on soft tissue // *Med. & Biol. Eng. & Comput.*– 1984.– **22**.– P. 168–178.
11. *Pasterkamp H., Kraman S. S., Wodicka G. R.* Respiratory sounds. Advances beyond the stethoscope // *J. Respir. Crit. Care Med.*– 1997.– **156**.– P. 974–987.
12. *Олійник В. Н.* Раціональне проектування п'єзоакселерометрів для вимірювань на піддатливих поверхнях // *Акуст. вісн.*– 1998.– **1**, N 3.– С. 54–65.
13. *Куценко А. Г., Олійник В. Н., Улитко А. Ф.* Перемещения точек поверхности упругого полупространства, вызванные мгновенным приложением осесимметричной нагрузки // *Акуст. вісн.*– 1999.– **2**, N 2.– С. 57–68.
14. *Олійник В. Н.* Моделирование контактной взаимодействия ограниченной области поверхности тела людини з вібратором // *Акуст. вісн.*– 2003.– **6**, N 2.– С. 58–67.
15. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.
16. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.– М.: Физматгиз, 1971.– 1108 с.
17. *Рейнер М.* Реология.– М.: Наука, 1965.– 224 с.