

УДК 534.6.615,471:616-073.4-8:389

# ЛОКАЛЬНЫЕ ЭФФЕКТЫ ВОЗБУЖДЕНИЯ ВОЛН ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ФОКУСИРОВАННЫХ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ПУЧКОВ С БИОЛОГИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ

Е. А. БАРАННИК

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина

Получено 20.11.2003

С использованием известных распределений поля в фокальной области исследованы характеристики волн суммарной и разностной частоты (ВСЧ и ВРЧ) при нелинейном взаимодействии фокусированных коаксиальных пучков волн со средой. Доказано, что в фокальной области существуют сверхзвуковые нелинейные источники ВРЧ. Показана их связь с предельно возможными углами рассеяния по механизму излучения Черенкова. Проведена оценка амплитуды ВРЧ и ее зависимости от угла рассеяния. Обсуждены возможности применения фокусированных пучков волн для акустической томографии параметров нелинейности биологических объектов.

З використанням відомих розподілів поля у фокальній області досліджено характеристики хвиль сумарної та різницевої частоти (ХСЧ і ХРЧ) при нелінійній взаємодії фокусованих коаксіальних пучків хвиль із середовищем. Доведено, що у фокальній області існують надзвукові нелінійні джерела ХРЧ. Показано їхній зв'язок з граничними кутами розсіяння за механізмом випромінювання Черенкова. Проведено оцінку амплітуди ХРЧ та її залежності від кута розсіяння. Обговорено можливості використання сфокусованих пучків хвиль для акустичної томографії параметрів нелінійності біологічних об'єктів.

The characteristics of the sum and different frequency waves (SFW and DSW) under nonlinear interaction of two collinear focused ultrasound beams with medium are studied using the known field distributions in focal region. The existence of supersonic sources of DSW in the focal region is proved. Interrelation of the supersonic sources with the critical scattering angle due to the Cherenkov emission is shown. The amplitude of DSW and its dependencies on the scattering angle is estimated. Possibilities of application of the focused beams in acoustic tomography of the nonlinearity parameters of biological objects are discussed.

## ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные эффекты взаимодействия ультразвука с биологическими средами являются основой ряда медицинских интроскопических методов диагностики – как широко используемых на практике, так и находящихся в стадии разработки [1, 2]. При обсуждении нелинейных механизмов в биологических средах различают кумулятивные и локальные эффекты взаимодействия [2], поскольку в зависимости от конкретных биомедицинских приложений и те, и другие могут играть важную роль. Под кумулятивными понимают эффекты, связанные с накоплением результата действия нелинейности биологической среды (например, искажение формы плоской синусоидальной волны при ее распространении в среде с однородным распределением нелинейных свойств). Отклонения от некоторого среднего уровня нелинейности, равно как и отклонение формы волн от плоских, приведут к локальным эффектам взаимодействия. С этой точки зрения большинство нелинейных локальных эффектов, не связанных с кавитацией, не принимались до недавнего времени во внимание.

Фундаментальным для понимания всех эффек-

тов взаимодействия с нелинейными средами, к которым относятся и биологические мягкие ткани [1–3], оказывается то, что волновые возмущения – области сжатия и разрежения – движутся с разной фазовой скоростью [4]:

$$c_l = c_0 + \left(1 + \frac{B}{2A}\right)v_x \equiv c_0 + \varepsilon v_x,$$

где  $v_x$  – проекция колебательной скорости частиц на направление движения волны;  $\varepsilon$  – коэффициент нелинейности среды. Коэффициент  $\varepsilon$  и параметр  $B/2A$ , являющиеся для конденсированных сред эмпирическими константами, описывают квадратичную нелинейность в функции зависимости давления от плотности:

$$A = \rho_0 \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{S,0} \equiv \rho_0 c_0^2,$$

$$B = \rho_0^2 \left( \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right)_{S,0} = \rho_0^2 \left( \frac{\partial c^2}{\partial \rho} \right)_{S,0},$$

где производные берутся при постоянной энтропии  $S$  и равновесной плотности  $\rho_0$ . Для воды  $\varepsilon = 3.5 \div 3.6$  и, таким образом, коэффициент нелинейности  $\varepsilon$  обусловлен не столько конвективным

ускорением частиц среды, сколько ее физической нелинейностью.

Потенциально изменение параметра нелинейности  $B/A$  может быть использовано для локальной диагностики состояния мягких тканей, поскольку его величина для различных биологических сред и жидкостей колеблется в широком диапазоне значений (от 5 до 11) [1–3]. Эти данные свидетельствуют о перспективности исследования и разработки акустических методов локального определения параметров нелинейности. Наиболее многообещающими в этом смысле представляются методы ультразвуковой дифракционной томографии, предназначенные для идентификации локальных неоднородностей среды. Для реконструкции распределения коэффициента нелинейности к настоящему времени предложено несколько схем ультразвуковой томографии [5–12], которые базируются на анализе поля вторичных волн, включая комбинационные волны суммарной и разностной частот (ВСЧ и ВРЧ)  $\Omega_{\pm} = \omega_1 \pm \omega_2$ , появляющихся в результате нелинейного взаимодействия при двухчастотном излучении ультразвука. Наиболее общая схема ультразвуковой томографии нелинейного параметра с использованием ВРЧ, частные случаи которой описаны в [6–11], развита в работе [12].

Необходимо, однако, отметить, что методы дифракционной ультразвуковой томографии нелинейных параметров на сегодняшний день не нашли практического применения. Не в последнюю очередь это связано с недостаточной изученностью эффектов локального взаимодействия ультразвуковых волн с биологической средой, которые при определенных условиях приводят, например, к сильному дифракционному рассеянию вторичных волн. Упомянутое обстоятельство не позволяет однозначно интерпретировать результаты томографического эксперимента и использовать преимущества высокой контрастности параметра нелинейности различных биологических сред непосредственно для медицинской диагностики. Настоящая работа посвящена анализу локальных эффектов возбуждения ВРЧ и ВСЧ, возникающих в результате нелинейного взаимодействия со средой первичных фокусированных пучков волн с использованием приближения, развитого в работах [13–15].

### 1. УРАВНЕНИЕ ВЕСТЕРВЕЛЬТА И ТОМОГРАФИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАМЕТРА

По сути, вопрос о свойствах нелинейного взаимодействия первичных ультразвуковых волн

имеет для проблемы дифракционной томографии нелинейного параметра такое же значение, как задача формирования акустических пучков волн заданной пространственной конфигурации для эхоскопических методов исследования линейных параметров. В частности, пространственное и контрастное разрешение методов ультразвуковой эхоскопии непосредственным образом зависят от ширины главного максимума и уровня боковых лепестков функции чувствительности падающих и отраженных пучков волн соответственно. По аналогии, свойства полей ВРЧ и ВСЧ  $P_{\pm}^0(\vec{r}_0)$  описываются следующим интегралом [12]:

$$P_{\pm}(\vec{r}_0) = k_{\pm}^2 \int_R G_{\pm}(\vec{r}_0 - \vec{r}) \varepsilon(\vec{r}) P_1(\vec{r}) P_2^*(\vec{r}) d\vec{r}. \quad (1)$$

Его величина прямо зависит от пространственной конфигурации и структуры полей падающих (первичных) волн  $P_{1,2}(\vec{r})$  с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в области рассеяния  $R$ . Здесь  $G_{\pm}(\vec{r}) = -\exp(ik_{\pm}r)/(4\pi r)$  – функция Грина ВСЧ и ВРЧ;  $k_{\pm} = \Omega_{\pm}/c_0$ .

Исходным для анализа схем томографии и исследования эффектов нелинейного взаимодействия волн со средой является уравнение Вестервельта [16]:

$$\Delta P - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = -4\pi Q = -\frac{\varepsilon}{\rho c^4} \frac{\partial^2 P^2}{\partial t^2}. \quad (2)$$

В однородной по линейным характеристикам среде процесс восстановления нелинейных параметров по результатам томографического исследования наиболее просто описывается в терминах плоских волн. При двухчастотном излучении ультразвука нелинейное рассеяние связано с формированием соответствующей пространственной гармоника источников вторичных волн (ВРЧ, ВСЧ и гармоник с кратными частотами) из волновых векторов первичных полей  $\vec{k}_1, \vec{k}_2$  и волнового вектора  $\vec{k}$  Фурье-образа  $\varepsilon(\vec{k})$ . Для ВСЧ и ВРЧ условие синхронизма рассеяния плоских волн, вытекающее из соотношения (1), имеет вид [12]  $\vec{k}_1 \pm \vec{k}_2 + \vec{k} = k_{\pm} \vec{e}_s \equiv \vec{k}_{\pm}$ , где  $\vec{e}_s$  – единичный вектор в направлении рассеяния. Частным случаем этого условия является известное условие синхронизма [4], обеспечивающее эффективность кумулятивного нелинейного взаимодействия волн с однородной по параметру  $\varepsilon$  средой. В этом случае отлична от нуля только Фурье-компонента  $\varepsilon(\vec{k})$  с волновым вектором  $\vec{k} = 0$ :  $\vec{k}_1 \pm \vec{k}_2 = \vec{k}_{\pm}$ . Поэтому в недиспергирующей среде с постоянным  $\varepsilon$  кумулятивное рассеяние волн имеет место только при коллинеарном распространении всех первичных и вторичных пучков.

Такое жесткое условие синхронизма (аналогичное правилу отбора по импульсу для фононов и магнонов в твердом теле, фотонов в квантовой электродинамике и т. п.) в отсутствие неоднородностей справедливо, строго говоря, лишь для идеальных плоских волн. Ограниченность в пространстве реальных пучков и области их взаимодействия со средой приводит, согласно принципу неопределенности, к существованию неопределенности в направлении волновых векторов  $\vec{k}_1$ ,  $\vec{k}_2$  и возможности рассеяния под большими углами в первую очередь ВРЧ, имеющих наибольшую длину волны  $\lambda_-$ . Впервые такое дифракционное рассеяние пучков плоских волн, взаимодействующих со средой локально, наблюдалось экспериментально и получило объяснение в [17, 18]. Было показано, что дифракция ВРЧ и рассеяние за пределы области взаимодействия существенны, если характерные размеры области нелинейного взаимодействия сравнимы с  $\lambda_-$ . В то же время, рассеяния на большие углы не происходит, если  $\lambda_-$  много меньше размеров области взаимодействия, что отвечает переходу от локального к кумулятивному нелинейному взаимодействию со средой. С точки зрения общего условия синхронизма эти выводы хорошо понятны – пространственная локализация взаимодействия эквивалентна расширению спектра волновых векторов нелинейного параметра  $\varepsilon$  и приводит к различным возможным направлениям волнового вектора  $\vec{k}_-$ .

Позднее в [19] с использованием численного подхода, развитого в работах [20–24] для решения уравнения Хохлова–Заболоцкой–Кузнецова, детально исследована тонкая структура поля вторичных волн, включая гармоники первичных волн, для фокусированных пучков. Показано, что величина и структура поля ВСЧ слабо зависят от отношения  $\Omega_+/\Omega_-$ . В то же время установлено, что при всех использованных значениях параметров моделирования процесса взаимодействия амплитуда поля ВРЧ слабо изменяется вдоль акустической оси и в перпендикулярной к ней плоскости, однако ширина пучка ВРЧ (аналогично результатам более ранних работ [13, 14]) возрастает с ростом отношения  $\Omega_+/\Omega_-$ . В отличие от [13, 14], в работе [19] детально физические причины такого пространственного распределения амплитуды поля ВРЧ не обсуждались.

В заключение этого раздела отметим, что в работах [25–27] были исследованы свойства поля вторичных комбинационных волн при нелинейном взаимодействии в среде, движущейся относительно излучателей первичных волн. В этом случае имеет место не только доплеровское измене-

ние частоты взаимодействующих со средой пучков первичных волн, но и появление комбинационных волн с частотой, отличающейся от  $\Omega_{\pm}$ . Это приводит к картине биений в пространстве и времени суммарного поля вторичных волн. Нелинейное взаимодействие плоской звуковой волны и акустического импульса со средой обсуждалось в работах [28, 29].

## 2. РАССЕЯНИЕ ВРЧ И ВСЧ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ФОКУСИРОВАННЫХ ВОЛН

Анализ нелинейного взаимодействия сферически сходящихся пучков акустических волн может быть выполнен, как это сделано в [13, 14], на основе уравнения для возмущений плотности [4], выписанного с точностью до членов второго порядка малости включительно:

$$\Delta\rho' - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = -\frac{\varepsilon - 1}{\rho_0} \Delta\rho'^2 + \frac{1}{c_0^2} \operatorname{div} \left[ \vec{v} \frac{\partial \rho'}{\partial t} - \rho_0 (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right], \quad (3)$$

где  $\vec{v}$  – колебательная скорость. Без учета нелинейных членов (в первом приближении) уравнение (3) описывает в рассматриваемом случае распространение невзаимодействующих соосных сферически фокусированных пучков волн с частотами  $\omega_j$  и углами раскрытия волнового фронта  $\alpha_j < \tilde{\alpha}_j$  ( $j=1, 2$ ). На рис. 1 дважды заштрихована область наложения первичных пучков волн. Отметим, что в приближении геометрической акустики края волновых фронтов излучаемых первичных волн совпадают при выполнении соотношений  $\alpha_1 = \alpha_2$  и  $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2$ .

Для нахождения поля ВРЧ необходимо вычислить нелинейную правую часть уравнения колебаний второго приближения, которая получается из правой части уравнения (3) после подстановки  $\rho' = \rho'_1 + \rho'_2$ ,  $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ , где  $\rho'_j$  и  $\vec{v}_j$  – возмущения плотности и колебательной скорости в первичных фокусированных пучках волн. В общем случае эти величины могут быть найдены, например, с помощью выражения для потенциала колебательной скорости [30]

$$\Phi_j(\vec{r}) = -\frac{1}{2\pi} \int_S \vec{v}_j(\vec{r}_j) \frac{\exp(-ik_j|\vec{r} - \vec{r}_j|)}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} d\vec{S}_j, \quad (4)$$

которое обычно называют формулой Рэлея. Здесь предполагается гармоническая зависимость от времени  $\exp(i\omega_j t)$ , а интегрирование производится по поверхности излучения  $S$ , кривизна которой в

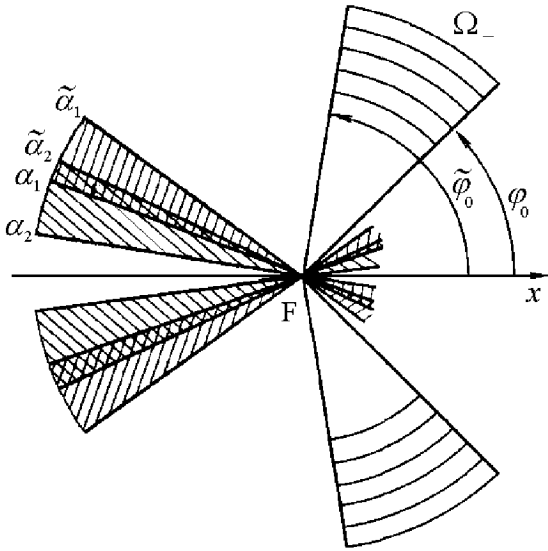


Рис. 1. Взаимное расположение ВРЧ и полей взаимодействующих со средой первичных фокусированных ультразвуковых волн с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и углами раскрытия волновых фронтов  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\tilde{\alpha}_1$ ,  $\tilde{\alpha}_2$  соответственно

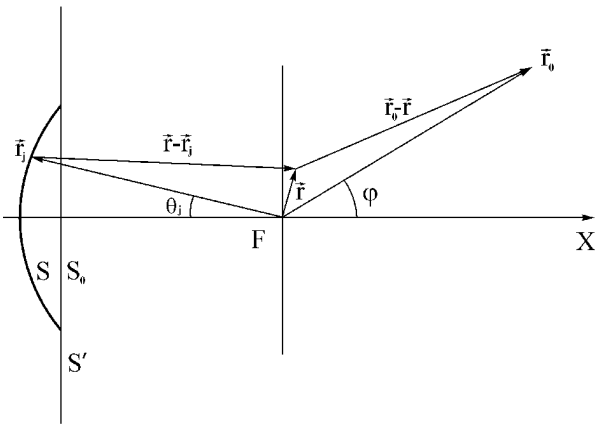


Рис. 2. Взаимное расположение элемента излучающей поверхности с координатой  $\vec{r}_j$ , точки  $\vec{r}$  в фокальной области пучков волн и точки наблюдения  $\vec{r}_0$  полей ВРЧ и ВСЧ

рассматриваемом случае задает фокусное расстояние  $F$ , как показано на рис. 2. Непосредственно из выражения (4) при  $F \gg r, \lambda$  и с учетом интегрального представления функции Бесселя  $J_0(x)$  вытекает формула Дебая для распределения потенциала в фокальной области ультразвукового преобразователя с равномерным распределением амплитуды

туда  $v_{1,2}^{(0)}$  на излучающей поверхности:

$$\Phi_j(r, x) = -v_j^{(0)} F e^{-ik_j F} \times \int_{\alpha_j}^{\tilde{\alpha}_j} J_0(k_j r \sin \theta_j) \exp(-ik_j x \cos \theta_j) \sin \theta_j d\theta_j, \quad (5)$$

где  $r$  – радиальная координата в фокальной плоскости, отсчитываемая от оси  $Ox$ .

Упростим задачу, полагая  $\tilde{\alpha}_j \ll 1$  (длиннофокусная система). Тогда из выражения (5) следует, что аксиальные составляющие скоростей  $\vec{v}_{1,2} = \vec{\nabla} \Phi_{1,2}$  много больше радиальных, поскольку при дифференцировании по радиальной координате  $r$  в подынтегральном выражении формулы Дебая появляется дополнительный малый множитель  $\sin \theta_j$ , а функция Бесселя нулевого порядка переходит в функцию Бесселя первого порядка от аргумента, также содержащего  $\sin \theta_j$ . Как результат, вкладом радиальных составляющих в правую часть уравнения (3) можно пренебречь. В этом же приближении между возмущениями плотности и аксиальными составляющими скоростей выполняется приближенное равенство  $\rho'_j \approx \rho_0 c_0^{-1} v_{jx}$ , а между операторами  $\vec{\nabla}, \partial/\partial x$  и  $\partial/\partial t$  – равенство  $\vec{\nabla} \approx \vec{e}_x \partial/\partial x \approx -\vec{e}_x c_0^{-1} \partial/\partial t$ . После несложных преобразований правая часть уравнения колебаний, играющая роль источника с плотностью  $q = q_- + q_+$  вторичных ВРЧ и ВСЧ, приобретает вид

$$-4\pi q = -2\varepsilon \frac{\rho_0}{c_0^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v_{1x} v_{2x}), \quad (6)$$

аналогичный правой части уравнения Вестервельта (2).

В связи с этим необходимо отметить, что в действительности формулы Рэля и Дебая справедливы для плоских излучателей в абсолютно жестком экране  $S'$  [31], поэтому в случае фокусирования волн интегрирование следует производить, строго говоря, не по вогнутой излучающей поверхности ультразвукового преобразователя, а по поверхности  $S_0$  в плоскости экрана, показанной на рис. 2. Однако для длиннофокусных излучателей с малыми углами раскрытия возникающие из-за этого поправки к величине скорости имеют, очевидно, более высокий порядок малости по углам раскрытия.

Распределение амплитуды колебаний по акустической оси  $Ox$  и в фокальной плоскости фокусирующих систем хорошо известно (см., например, [30, 31]). Амплитуда колебаний максимальна в фокусе, резко спадает по мере удаления от него и имеет осциллирующий характер. Следовательно, область нелинейного взаимодействия со средой

эффективно ограничивается окрестностью фокуса, размеры которой, в свою очередь, определяются длиной волны первичных волн и углами раскрытия волновых фронтов. Поэтому в борновском приближении вдали от фокальной области поле ВРЧ можно искать в виде запаздывающего потенциала

$$\rho'_-(\vec{r}_0) = \int \frac{q_-(\vec{r}, t - |\vec{r}_0 - \vec{r}|/c_0)}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|} d\vec{r}. \quad (7)$$

В общем случае зависимость аксиальной составляющей колебательной скорости фокусированных волн от координат довольно сложна и описывается бесконечными рядами по специальным функциям [30], что затрудняет вычисление интеграла в выражении (7). Поэтому для оценки аксиальную составляющую выберем в следующем виде:

$$\begin{aligned} v_{jx}(r, x, t) = & -v_j^{(0)} \frac{\omega_j}{c_0} F \times \\ & \times \left[ (1 - \cos \tilde{\alpha}_j) \Lambda_1 \left( \frac{\omega_j}{c_0} r \sin \tilde{\alpha}_j \right) - \right. \\ & \left. - (1 - \cos \alpha_j) \Lambda_1 \left( \frac{\omega_j}{c_0} r \sin \alpha_j \right) \right] \times \\ & \times \frac{\sin a_j x}{a_j x} \sin \omega_j \left[ t - \frac{x}{c_0} \frac{\cos \alpha_j + \cos \tilde{\alpha}_j}{2} \right], \quad (8) \\ a_j = & \frac{\omega_j}{2c_0} (\cos \alpha_j - \cos \tilde{\alpha}_j). \end{aligned}$$

Здесь  $\Lambda_1(x)$  – лямбда-функция первого порядка. Нетрудно убедиться, что в пределах своей применимости выражение (8) при  $r=0$  дает правильное распределение по акустической оси, а при  $x=0$  – в фокальной плоскости.

Подставляя соотношение (8) в формулу (6) и оставляя компоненту вынуждающей силы только на частоте  $\Omega_-$ , находим выражение для источника ВРЧ:

$$\begin{aligned} -4\pi q_- = & \varepsilon \left( \frac{F\Omega_-}{c_0^3} \right)^2 \rho_0 \cos \left\{ \Omega_- t - \frac{x}{2c_0} - \right. \\ & \left. - [\omega_1 (\cos \alpha_1 + \cos \tilde{\alpha}_1) - \omega_2 (\cos \alpha_2 + \cos \tilde{\alpha}_2)] \right\} \times \\ & \times \prod_{j=1,2} v_j^{(0)} \omega_j \left[ (1 - \cos \tilde{\alpha}_j) \Lambda_1 \left( \frac{\omega_j}{c_0} r \sin \tilde{\alpha}_j \right) - \right. \\ & \left. - (1 - \cos \alpha_j) \Lambda_1 \left( \frac{\omega_j}{c_0} r \sin \alpha_j \right) \right] \frac{\sin a_j x}{a_j x}. \quad (9) \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в выбранном приближении область взаимодействия первичных волн, по ко-

торой производится интегрирование в выражении (7), эффективно ограничивается функциями типа  $x^{-2} \sin(a_1 x) \sin(a_2 x)$  и  $\Lambda_1(b_1 r) \Lambda_1(b_2 r)$ .

Вдали от области взаимодействия расстояние от локального вторичного источника ВРЧ с цилиндрическими координатами  $(r, \psi, x)$  до точки наблюдения связано со сферическими координатами  $(r_0, \varphi, \psi_0)$  последней соотношением

$$|\vec{r}_0 - \vec{r}| \equiv r_0 - x \cos \varphi - r \sin \varphi \cos(\psi - \psi_0).$$

Сферические координаты для точки наблюдения выбраны с учетом симметрии задачи, причем полярный угол  $\varphi$  отсчитывается от положительного направления оси  $Ox$ . Подставляя выражение (9) в интеграл (7) и полагая  $|\vec{r}_0 - \vec{r}| = r_0$  в знаменателе (но не в фазовых членах) подынтегрального выражения, после интегрирования по азимутальному углу  $\psi$  приходим к следующему выражению для амплитуды ВРЧ:

$$\begin{aligned} \frac{\rho'_-}{\rho_0} = & 2\varepsilon \frac{v_1^{(0)} v_2^{(0)}}{c_0^2} \left( \frac{F\Omega_-}{c_0} \right)^2 \frac{I_1 I_2}{r_0}, \\ I_1 = & \int_{-\infty}^{\infty} x^{-2} \cos \frac{x}{c_0} \left[ \omega_1 \frac{\cos \alpha_1 + \cos \tilde{\alpha}_1}{2} - \right. \\ & \left. - \omega_2 \frac{\cos \alpha_2 + \cos \tilde{\alpha}_2}{2} - \Omega_- \cos \varphi \right] \times \\ & \times \prod_{i=1,2} \sin(a_i x) dx, \quad (10) \\ I_2 = & \int_0^{\infty} r J_0 \left( \frac{\Omega_-}{c_0} r \sin \varphi \right) \times \\ & \times \prod_{i=1,2} \left\{ \frac{1}{\cos \alpha_i - \cos \tilde{\alpha}_i} \times \right. \\ & \times \left[ (1 - \cos \tilde{\alpha}_i) \Lambda_1 \left( \frac{\omega_i}{c_0} r \sin \tilde{\alpha}_i \right) - \right. \\ & \left. \left. - (1 - \cos \alpha_i) \Lambda_1 \left( \frac{\omega_i}{c_0} r \sin \alpha_i \right) \right] \right\} dr. \end{aligned}$$

Функция Бесселя появляется здесь в результате интегрирования по  $\psi$  (аналогично выражению (5)), а отсутствие зависимости величины  $\rho'_-$  от угла  $\psi_0$  указывает на инвариантность поля ВРЧ относительно вращений вокруг оси  $Ox$ .

Интегралы  $I_1$  и  $I_2$  сводятся к табличным [32, с. 431, 709]. В частности, интеграл  $I_1$  отличен от нуля и равен

$$I_1 = \pi \frac{\omega_2}{2c_0} (\cos \alpha_2 - \cos \tilde{\alpha}_2) \quad (11)$$

для углов  $\varphi$ , удовлетворяющих неравенству [13]

$$\omega_1 \frac{\cos \alpha_1 - \cos \tilde{\alpha}_1}{2} - \omega_2 \frac{\cos \alpha_2 - \cos \tilde{\alpha}_2}{2} > \left| \omega_1 \frac{\cos \alpha_1 + \cos \tilde{\alpha}_1}{2} - \omega_2 \frac{\cos \alpha_2 + \cos \tilde{\alpha}_2}{2} - \Omega_- \cos \varphi \right|, \quad (12)$$

(для определенности полагаем  $\omega_1 > \omega_2$ ). В общем случае анализ этого условия не представляет затруднений, однако довольно громоздок. Поэтому ограничимся рассмотрением ряда принципиально важных случаев.

Дифракционное рассеяние на большие углы возможно при малых частотах (больших длинах волн) ВРЧ, поэтому в предельном случае, когда  $\Omega_{\pm} \sim \omega_1, \omega_2$ , рассеяния на большие углы быть не должно. Действительно, из неравенства (12) при  $\Omega_- \rightarrow \omega_1$  следует

$$\cos \tilde{\alpha}_1 < \cos \varphi < \cos \alpha_1,$$

т. е. рассеяния вне конуса, образованного краями волнового фронта первичной волны с большей частотой, не происходит.

Далее, пусть  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  и  $\tilde{\alpha}_1 \geq \tilde{\alpha}_2$ , что соответствует практически используемым в ультразвуковой медицинской диагностике фокусирующим преобразователям. Тогда из условия (12) находим

$$0 < \sin^2 \frac{\varphi}{2} < \sin^2 \frac{\tilde{\alpha}_2}{2} + \frac{\omega_1}{\Omega_-} \left( \sin^2 \frac{\tilde{\alpha}_1}{2} - \sin^2 \frac{\tilde{\alpha}_2}{2} \right). \quad (13)$$

Отсюда следует, что при  $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2$  область распространения ВРЧ в дальней зоне при любых значениях частоты  $\Omega_-$  совпадает с областью распространения первичных волн:

$$0 < \varphi < \tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2.$$

Отметим, что этот вывод качественно согласуется с результатами расчета полей ВРЧ, основанного на решении параболического уравнения теории дифракции и предположении о гауссовом поперечном распределении амплитуды у первичных волн [33], а также с численными решениями [19].

Нетрудно видеть, что при  $\tilde{\alpha}_1 > \tilde{\alpha}_2$  правая часть неравенства (13) растет с уменьшением  $\Omega_-$  и до-

стигает значения  $\sin^2(\tilde{\varphi}_0/2)$  при

$$\Omega_- = \left( \sin^2 \frac{\tilde{\alpha}_1}{2} - \sin^2 \frac{\tilde{\alpha}_2}{2} \right) \times \left( \sin^2 \frac{\tilde{\varphi}_0}{2} - \sin^2 \frac{\tilde{\alpha}_2}{2} \right)^{-1}. \quad (14)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае рассеяние имеет выраженный широкоугольный характер. Например, при  $\sin^2(\tilde{\varphi}_0/2) = 1/2$  выражение (13) дает значение частоты, при котором ВРЧ распространяются во всю полусферу за фокальной плоскостью, а при  $\sin^2(\tilde{\varphi}_0/2) = 1$  – во весь телесный угол  $4\pi$ .

Интеграл  $I_2$  отличен от нуля, причем

$$I_2 = 2(\omega_1 \sin \tilde{\alpha}_1 / c_0)^{-2}$$

для углов, удовлетворяющих неравенству

$$0 < \sin \varphi < \frac{\omega_1 \sin \tilde{\alpha}_1 - \omega_2 \sin \tilde{\alpha}_2}{\Omega_-}.$$

Путем несложных преобразований это условие можно представить в виде

$$0 < \sin^2 \frac{\varphi}{2} < \frac{1}{2} - \left\{ \left[ \frac{1}{2} - \sin^2 \frac{\tilde{\alpha}_2}{2} - \frac{\omega_1}{\Omega_-} \left( \sin^2 \frac{\tilde{\alpha}_1}{2} - \sin^2 \frac{\tilde{\alpha}_2}{2} \right) \right]^2 - A^2 \right\}^{1/2}, \quad (15)$$

$$A^2 = \omega_1 \omega_2 (4\Omega_-)^{-2} \left[ (\sin \tilde{\alpha}_1 - \sin \tilde{\alpha}_2)^2 + (\cos \tilde{\alpha}_1 - \cos \tilde{\alpha}_2)^2 \right].$$

Непосредственно сравнивая неравенства (13) и (15), легко убедиться, что более жесткие ограничения на угол рассеяния накладывает условие (13). Иными словами, интеграл  $I_2$  всегда отличен от нуля, когда отличен от нуля интеграл  $I_1$ . Физически этот результат отражает известное свойство длиннофокусных излучателей [30]: диаметр фокального пятна таких систем всегда меньше размеров окрестности фокуса вдоль акустической оси, а следовательно, лучше удовлетворяет условиям дифракции ВРЧ.

Наконец, пусть  $\alpha_2 = 0$  и  $\tilde{\alpha}_2 = \alpha_1$ , т. е. в приближении геометрической акустики фокусированные пучки ультразвуковых волн пересекаются лишь в одной точке среды, находящейся в фокусе системы. Тогда  $I_1$  отличен от нуля, причем

$$I_1 = \frac{\pi}{2c_0} \omega_2 (1 - \cos \tilde{\alpha}_2) \quad (16)$$

для углов  $\varphi$ , удовлетворяющих двойному неравенству

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\tilde{\alpha}_2}{2} + \frac{\omega_1}{\Omega_-} \sin^2 \frac{\tilde{\alpha}_2}{2} < \sin^2 \frac{\varphi}{2} < \\ < \sin^2 \frac{\tilde{\alpha}_2}{2} + \frac{\omega_1}{\Omega_-} \left( \sin^2 \frac{\tilde{\alpha}_1}{2} - \sin^2 \frac{\tilde{\alpha}_2}{2} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Условие (17) отличается от условия (13) левой частью. Иными словами, в рассматриваемом случае ВРЧ не существуют в конусе с углом при вершине

$$2\varphi_0 = 4 \arcsin \left\{ \sin^2 \frac{\tilde{\alpha}_2}{2} + \frac{\omega_1}{\Omega_-} \sin^2 \frac{\tilde{\alpha}_2}{2} \right\}^{1/2}. \quad (18)$$

На рис. 1, где схематически представлены области распространения волн, область рассеяния ВРЧ отмечена радиальной штриховкой.

Условие отличия от нуля интеграла  $I_2$  определяется неравенством

$$\sin \tilde{\alpha}_2 < \sin \varphi < \frac{\omega_1 \sin \tilde{\alpha}_1 - \omega_2 \sin \tilde{\alpha}_2}{\Omega_-}, \quad (19)$$

которое можно представить в виде

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\tilde{\alpha}_2}{2} < \sin^2 \frac{\varphi}{2} < \frac{1}{2} - \left\{ \left[ \frac{1}{2} - \sin^2 \frac{\tilde{\alpha}_2}{2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\omega_1}{\Omega_-} \left( \sin^2 \frac{\tilde{\alpha}_1}{2} - \sin^2 \frac{\tilde{\alpha}_2}{2} \right) \right]^2 - A^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (20)$$

При этом

$$I_2 = 2 \frac{1 - \cos \tilde{\alpha}_1}{\cos \tilde{\alpha}_2 - \cos \tilde{\alpha}_1} \left( \frac{c_0}{\omega_1 \sin \tilde{\alpha}_1} \right)^2. \quad (21)$$

Таким образом, величина  $I_2$ , как и ранее, всегда отлична от нуля, когда отличен от нуля интеграл  $I_1$ .

Подставляя соотношения (16) и (21) в формулу (10), находим окончательное выражение для амплитуды рассеянного поля ВРЧ в области углов рассеяния  $\varphi$ , описываемой двойным неравенством (17):

$$\begin{aligned} \frac{\rho'_-}{\rho_0} = 2\pi\varepsilon \frac{1}{r_0} \frac{v_1^{(0)} v_2^{(0)}}{c_0^2} \left( \frac{\Omega_-}{\omega_1} \right)^2 \frac{\omega_2 F^2}{c_0} \times \\ \times \frac{(1 - \cos \tilde{\alpha}_2)(1 - \cos \tilde{\alpha}_1)}{\sin^2 \tilde{\alpha}_1 (\cos \tilde{\alpha}_2 - \cos \tilde{\alpha}_1)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Строго говоря, использованные распределения амплитуд колебаний в фокальной плоскости и по акустической оси справедливы лишь для фокальной области. Очевидно, этого вполне достаточно для оценки рассеяния ВРЧ, возникающих при

взаимодействии пучков волн, пересекающихся в приближении геометрической акустики лишь в фокусе, что соответствует последнему из рассмотренных случаев. Для случая  $\alpha_1 = \alpha_2$ , наряду с вкладом в рассеяние ВРЧ окрестности фокуса как области максимальной амплитуды колебаний первичных волн необходимо также учитывать нелинейное взаимодействие со средой в области, удаленной от фокальной. Обсуждение такого взаимодействия, а также некоторые замечания по поводу точности уравнения Вестервелта и полученных выражений для углов рассеяния и величин интегралов, определяющих амплитуду рассеяния, будут даны ниже для дальнейшей зоны излучения ВРЧ.

С практической точки зрения, из проведенного рассмотрения вытекает принципиальная возможность диагностики фокусированных пучков акустических волн с помощью пробного пучка волн, параметры которого (фокусное расстояние, частота, углы раскрытия) известны и поддаются изменению. Возможны, в частности, биомедицинские приложения локальных эффектов нелинейного взаимодействия фокусированных пучков волн, не связанные непосредственно с ультразвуковой визуализацией и диагностикой. Например, в ультразвуковой хирургии важной задачей является определение местоположения фокальной области сходящихся волновых фронтов в оптически непрозрачных средах [34]. В работе [35] предложено использовать для этого именно характерные черты широкоугольного рассеяния ВРЧ, обусловленного локальными эффектами взаимодействия с биологическими средами первичных мощных фокусированных пучков волн, которые одновременно используются непосредственно для хирургических целей. Для реализации такой возможности, равно как и различных схем ультразвуковой томографии нелинейного параметра, необходимо провести детальное экспериментальное изучение дифракционного рассеяния при наложении фокусированных пучков первичных волн.

### 3. СВЕРХЗВУКОВЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ИСТОЧНИКИ ВРЧ И ВСЧ В ФОКАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Приведенные выше результаты являются следствием специфического вида функции плотности источников ВРЧ, которая не только убывает по мере удаления от фокуса, но и содержит, помимо члена, описывающего бегущую волну, пространственно осциллирующие множители. Последнее по физическому смыслу означает, что внутри области взаимодействия формируется гора-

здо более сложная, чем в случае плоских волн [17, 18], структура зон Френеля источников ВРЧ. Ее формирует как продольное локальное пространственное распределение первичных взаимодействующих волн, так и поперечное. Непосредственно из выражения (9) следует, что в рассмотренном случае фокусированных пучков волн с малыми углами раскрытия отношение характерного размера области взаимодействия в продольном направлении к характерному размеру в поперечном направлении оказывается много больше единицы. В частности, при  $\alpha_1 = \alpha_2$  оно составляет порядка  $\omega_j \sin \tilde{\alpha}_j / (a_j c_0) \sim \text{ctg}(\tilde{\alpha}_j / 2) \gg 1$ . Тем не менее, ограничения на угловые характеристики поля ВРЧ (13) и (15), включая полученные условия рассеяния на большие углы, отличаются весьма незначительно и, как следует из выражения для  $A$ , оказываются идентичными при  $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2$ .

Причина такого поведения ультразвуковых пучков заключается в том, что, как видно из соотношения (9), скорость вторичных нелинейных источников ВРЧ сильно зависит от геометрии первичных пучков волн и может превышать звуковую. Это обстоятельство в совокупности со сложной структурой зон Френеля источников ВРЧ приводит к тому, что наряду с общими чертами, присущими дифракционному рассеянию, при наложении фокусированных пучков волн имеются и отличия. В частности, согласно формуле (18) в определенных случаях может отсутствовать рассеяние вперед (в полной аналогии с черенковским излучением). Наоборот, даже при  $\Omega_- \rightarrow 0$  нет рассеяния на большие углы, если совпадают углы раскрытия  $\tilde{\alpha}_1$  и  $\tilde{\alpha}_2$  (см. условие (12)).

Выбор полей первичных волн в простейшем виде (8) позволяет продемонстрировать общую зависимость рассеяния ВРЧ от специфического вида функции плотности нелинейных источников в фокальной области и, в частности, от скорости их распространения. Однако эта скорость в рамках проведенного упрощенного рассмотрения оказывается постоянной для всех источников вторичных волн и определяется согласно выражения (9) только предельными углами раскрытия пучков волн. В действительности же каждый из первичных взаимодействующих пучков ультразвуковых волн формируется за счет суммирования волновых составляющих, приходящих в фокальную область под разными углами. В соответствии с этим и сверхзвуковые вторичные источники ВРЧ и ВСЧ в среде могут иметь различную скорость распространения в зависимости от того, какими составляющими первичных волн они образованы.

Тонкие детали зависимости угловых характери-

стик полей вторичных волн от скорости нелинейных источников можно продемонстрировать, воспользовавшись, например, интегральной формулой для потенциала скоростей [31]

$$\Phi_j(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_S \Phi_j(\vec{r}_j) \frac{\exp(-ik_j|\vec{r} - \vec{r}_j|)}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^2} \times \\ \times (1 + ik_j|\vec{r} - \vec{r}_j|) \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} dS_j,$$

записанной в форме Гюйгенса – Френеля для точек фокальной области при  $F \gg r, \lambda$ :

$$\Phi_j(\vec{r}) = \frac{ik_j}{2\pi} \int_S \Phi_j(\vec{r}_j) \frac{\exp(-ik_j|\vec{r} - \vec{r}_j|)}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} dS_j. \quad (23)$$

При переходе к выражению (23) предполагается малость угла между направлением на точку в фокальной области и нормалью к поверхности интегрирования, которую при малых углах раскрытия волнового фронта по-прежнему можно считать совпадающей с поверхностью излучения. Выражения такого вида справедливы для ультразвукового фокусирующего преобразователя в абсолютно мягком экране. Очевидно, это в большей степени соответствует реальным условиям биомедицинских приложений, чем условие абсолютно жесткого экрана. С учетом известной связи между потенциалом скоростей и акустическим давлением  $P_j = -\rho_0 \partial \Phi_j / \partial t$ , выражение (23) дает возможность сразу записать потенциал и, соответственно, акустическое давление в фокальной области сходящихся сферических волн в виде, аналогичном (5):

$$P_j = P_{j0} \frac{\omega_j}{c_0} F \int_{\alpha_j}^{\tilde{\alpha}_j} J_0 \left( \frac{\omega_j}{c_0} r \sin \theta_j \right) \times \\ \times \sin \left[ \omega_j t - \frac{\omega_j}{c_0} (F + x \cos \theta_j) \right] \sin \theta_j d\theta_j. \quad (24)$$

Здесь  $P_{j0}$  – амплитуда давления на излучающей поверхности фокусирующего преобразователя. По физическому смыслу выражение (24) представляет собой сумму плоских волн, приходящих в точку  $\vec{r}$  фокальной области из разных направлений в пределах углов раскрытия волнового фронта.

Формула (24) для акустического давления позволяет непосредственно использовать при исследовании ВРЧ и ВСЧ уравнение Вестервельта (2), по поводу которого необходимо сделать следующее замечание. В действительности истинная правая часть уравнения для акустического давления (2) имеет существенно более сложный вид (см., напри-



мер, [12, 36]):

$$4\pi Q = \frac{\varepsilon - 1}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 P^2}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho_0 c_0^4} \left( \frac{\partial P}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho_0 \Delta \vec{v}^2 + \rho_0 \vec{v} \Delta \vec{v}. \quad (25)$$

В работе [36] показано, однако, что величина (25) может быть представлена в виде двух слагаемых:

$$4\pi Q = \left[ \Delta L - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 L}{\partial t^2} \right] + \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 P^2}{\partial t^2},$$

одно из которых представляет собой полный даламбертиан от функции Лагранжа  $L$  плотности энергии акустического поля:

$$L = \frac{\rho_0 \vec{v}^2}{2} - \frac{P^2}{2\rho_0 c_0^2}.$$

По этой причине все решения для полей волн комбинационных частот, даваемые уравнением Вестервельта, справедливы, строго говоря, с точностью до слагаемого, пропорционального той части функции Лагранжа, которая содержит перекрестные произведения скоростей частиц и акустических давлений первичных волн. В то же время, в рассматриваемом случае малых углов раскрытия волновых фронтов непосредственное вычисление правой части с нужной степенью точности приводит либо к уравнению для возмущений плотности с правой частью вида (6), либо к уравнению Вестервельта. Это связано с тем, что для идеальных плоских волн лагранжиан тождественно равен нулю.

В то же время, из выражений для потенциала скоростей и вытекающих из него интегральных формул для акустического давления и колебательной скорости первичных волн вдали от фокальной области следует, что скорости направлены вдоль радиус-векторов, проведенных из центра излучающей поверхности, поскольку волны становятся сферически расходящимися. Следовательно, в дальней зоне излучения фокусированных пучков волн, где справедливо использованное ранее приближение запаздывающего потенциала (7), соответствующий перекрестный член функции Лагранжа с хорошей степенью точности обращается в ноль ввиду выполнения для сферически расходящихся волн равенства  $P_j \equiv -\rho_0 c_0 v_j$ . Таким образом, в дальней зоне излучения первичных акустических волн решение уравнения (2) с правой частью (25) также может быть сведено к решению уравнения Вестервельта. Вклад нелинейного взаимодействия первичных волн со средой в этой

области имеет, очевидно, кумулятивный характер и потому здесь не рассматривается. Отметим, наконец, что при конечной апертуре взаимодействующих со средой волн такого рода добавочными членами в решении всегда можно пренебречь для решений, записываемых в области, где отсутствует (либо пренебрежимо мала) хотя бы одна из первичных волн. Подчеркнем, что эти выводы никак не связаны с предположением о малости углов раскрытия волновых фронтов ультразвуковых пучков волн.

Подставляя выражение (24) в правую часть уравнения Вестервельта, приходим к следующему выражению для источников ВРЧ и ВСЧ:

$$Q_{\pm}(r, x; t) = \pm \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{P_{10} P_{20}}{\rho_0 c_0^4} F^2 \Omega_{\pm}^2 \frac{\omega_1 \omega_2}{c_0^2} \times \int_{\alpha_1}^{\tilde{\alpha}_1} \int_{\alpha_2}^{\tilde{\alpha}_2} J_0 \left( \frac{\omega_1}{c_0} r \sin \theta_1 \right) J_0 \left( \frac{\omega_2}{c_0} r \sin \theta_2 \right) \times \cos \Omega_{\pm} \left( t - \frac{x}{c_{\pm}} \right) \sin \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_1 d\theta_2, \quad (26)$$

$$c_{\pm} = c_0 \Omega_{\pm} (\omega_1 \cos \theta_1 \pm \omega_2 \cos \theta_2)^{-1}. \quad (27)$$

Представляя решение в виде запаздывающего потенциала, аналогичного формуле (7), и проводя в (26) интегрирование по координате  $x$  и угловой переменной, отражающей цилиндрическую симметрию задачи, получаем выражение для амплитуды полей комбинационных частот:

$$P_{\pm}(r_0, \varphi; t) = \pi \varepsilon \frac{1}{r_0} \frac{P_{10} P_{20}}{\rho_0 c_0^4} F^2 \Omega_{\pm}^2 \frac{\omega_1 \omega_2}{c_0^2} \times \int_{\alpha_1}^{\tilde{\alpha}_1} \int_{\alpha_2}^{\tilde{\alpha}_2} \delta \left( \frac{\Omega_{\pm}}{c_{\pm}} - \frac{\Omega_{\pm}}{c_0} \cos \varphi \right) \int_0^{\infty} J_0 \left( \frac{\omega_1}{c_0} r \sin \theta_1 \right) \times J_0 \left( \frac{\omega_2}{c_0} r \sin \theta_2 \right) J_0 \left( \frac{\Omega_{\pm}}{c_0} r \sin \varphi \right) r dr \times \sin \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_1 d\theta_2. \quad (28)$$

Здесь  $\delta$ -функция появляется в результате интегрирования по координате  $x$  и предельного перехода

$$\int_{-F'}^{F'} \cos \frac{\Omega_{\pm} x}{c_{\pm}} dx = 2 \frac{\sin \left\{ F' \left( \frac{\Omega_{\pm}}{c_{\pm}} - \frac{\Omega_{\pm}}{c_0} \cos \varphi \right) \right\}}{\frac{\Omega_{\pm}}{c_{\pm}} - \frac{\Omega_{\pm}}{c_0} \cos \varphi} \rightarrow 2\pi \delta \left( \frac{\Omega_{\pm}}{c_{\pm}} - \frac{\Omega_{\pm}}{c_0} \cos \varphi \right),$$

предполагающего выполнение неравенства  $F' \gg \lambda_{\pm}$  [38].

Дельтаобразная особенность в соотношении (28) устанавливает связь между направлением рассеяния волн комбинационных частот и скоростью источников этих волн. Из выражения (27) следует, в частности, что при наложении коаксиальных сферически фокусированных первичных пучков волн ВРЧ могут рассеиваться на большие углы, независимо от того, насколько сильно фокальная область ограничивает нелинейное взаимодействие. На эту возможность впервые было указано в [14]. Она связана с черенковским излучением в результате появления в фокальной области сверхзвуковых нелинейных источников ВРЧ. По физическому смыслу этот эффект близок к известному эффекту конуса Маха, ограничивающему в сверхзвуковом потоке область, в которой сосредоточены звуковые волны от точечного источника возмущений. Нетрудно убедиться, что  $c_- > c_0$  для источников ВРЧ, образовавшихся в среде в результате локального нелинейного взаимодействия с ней составляющих первичных волн с углами  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , удовлетворяющими неравенству

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\Omega_-}{\omega_1}\right) \sin^2 \frac{\theta_2}{2} < \sin^2 \frac{\theta_1}{2} \leq \\ \leq \frac{\Omega_-}{2\omega_1} + \left(1 - \frac{\Omega_-}{\omega_1}\right) \sin^2 \frac{\theta_2}{2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Знак равенства в правой части (29) соответствует источникам, скорость которых  $c_- \rightarrow \pm\infty$ . Если же

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_-}{2\omega_1} + \left(1 - \frac{\Omega_-}{\omega_1}\right) \sin^2 \frac{\theta_2}{2} < \sin^2 \frac{\theta_1}{2} \leq \\ \leq \frac{\Omega_-}{\omega_1} + \left(1 - \frac{\Omega_-}{\omega_1}\right) \sin^2 \frac{\theta_2}{2}, \end{aligned} \quad (30)$$

то  $c < -c_0$  – такие источники движутся в направлении, противоположном направлению распространения первичных волн. Из соотношения (28) следует, что связь между направлением распространения вторичных ВРЧ и ВСЧ и скоростью нелинейных источников  $c_{\pm}$  дается известной формулой черенковского конуса [37] либо конуса Маха:

$$\cos \varphi = \frac{c_0}{c_{\pm}}, \quad (31)$$

которая обеспечивает в выражении (28) отличие от нуля интеграла, содержащего  $\delta$ -функцию. Легко видеть, что нелинейные источники ВРЧ (30) могут приводить к рассеянию назад, поскольку в этом случае  $\varphi > \pi/2$  (см. соотношение (31)).

Аналогичным образом формула черенковского конуса (31) вместе с формулой (27) позволяет установить, что максимальные углы раскрытия ВРЧ

и ВСЧ описываются выражениями

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{0-} = 2 \arcsin \left\{ \sin^2 \frac{\alpha_2}{2} + \right. \\ \left. + \frac{\omega_1}{\Omega_-} \left( \sin^2 \frac{\tilde{\alpha}_1}{2} - \sin^2 \frac{\alpha_2}{2} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{0+} = 2 \arcsin \left\{ \sin^2 \frac{\alpha_2}{2} + \right. \\ \left. + \frac{\omega_1}{\Omega_+} \left( \sin^2 \frac{\tilde{\alpha}_1}{2} - \sin^2 \frac{\alpha_2}{2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (33)$$

Поэтому диаграмма направленности ВСЧ не может быть шире диаграммы первичных взаимодействующих волн, несмотря на наличие сверхзвуковых источников. Что касается диаграммы ВРЧ, она будет тем шире, чем меньше  $\Omega_-$ . Таким образом, корректный учет нелинейного взаимодействия различных волновых составляющих первичных волн указывает на еще больший интервал разрешенных углов рассеяния для ВРЧ, чем предсказывают оценочные формулы (13) и (17).

В заключение отметим, что в дальней зоне излучения, где первичные волны становятся сферически расходящимися, скорость возникающих нелинейных источников ВРЧ  $c_- \equiv c_0$ . Следовательно, область, где скорость нелинейных источников среды может быть существенно больше скорости звука, эффективно ограничена некоторой величиной  $F' \sim a_j < F$ , поэтому при  $\Omega_- \leq c_0/F'$  необходимо учитывать еще и дифракцию при рассеянии ВРЧ. В этом случае соотношение (31) описывает не направление распространения ВРЧ, возбуждаемой такими источниками, а направление, соответствующее главному максимуму рассеяния, как это следует из выражения до предельного перехода к  $\delta$ -функции. Иными словами, при интегрировании величины  $Q_{\pm}(r, x; t)$  по  $x$  в выражении для запаздывающего потенциала дельтаобразная особенность, приводящая к большим углам рассеяния ВРЧ по черенковскому механизму, формируется только при достаточно протяженной фокальной области. Для плоских же волн, распространяющихся в одном направлении, скорость источников вторичных волн совпадает со скоростью звука. Поэтому черенковского рассеяния на большие углы нет, несмотря на достаточную протяженность области нелинейного взаимодействия. Рассеяние на большие углы появляется лишь при локализации области взаимодействия плоских первичных волн со средой и носит исключительно дифракционный характер.

**4. УГЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛЕЙ ВРЧ И ВСЧ**

Проводя в неравенстве (29) интегрирование по одному из углов, например  $\theta_2$ , получаем выражение для амплитуды акустического давления в ВРЧ и ВСЧ:

$$P_{\pm}(r_0, \varphi) = \pi \varepsilon \frac{1}{r_0} \frac{P_{10} P_{20}}{\rho_0 c_0^4} F^2 \Omega_{\pm}^2 \frac{\omega_1}{c_0} \times \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} I_{\pm}(\theta_1) \sin \theta_1 d\theta_1, \tag{34}$$

$$I_{\pm}(\theta_1) = \int_0^{\infty} J_0 \left( \frac{\omega_1 r}{c_0} \sin \theta_1 \right) \times J_0 \left( \frac{r}{c_0} \left\{ \omega_2^2 - (\mp \omega_1 \cos \theta_1 \pm \Omega_{\pm} \cos \varphi)^2 \right\}^{1/2} \right) \times J_0 \left( \frac{\Omega_{\pm} r}{c_0} \sin \varphi \right) r dr. \tag{35}$$

Вообще говоря, пределы интегрирования  $\alpha_{\min}$  и  $\alpha_{\max}$  по угловой переменной  $\theta_1$  в выражении (34) не совпадают с  $\alpha_1$  и  $\tilde{\alpha}_1$  и зависят от угла  $\varphi$ . Иными словами, лишь часть нелинейных источников, созданных волнами с разными углами  $\theta_1$ , излучает ВРЧ в заданный интервал углов  $\varphi$ . Действительно,  $\delta$ -функция попадает в область интегрирования по  $\theta_2$ , если корень аргумента  $\delta$ -функции удовлетворяет неравенству  $\alpha_2 < \theta_2^{(0)}(\theta_1) < \tilde{\alpha}_2$ , которое для ВРЧ можно представить в виде  $\beta_1 < \theta_1 < \tilde{\beta}_1$ , причем

$$\beta_1 = \arccos[\cos \alpha_2 + \Omega_- \omega_1^{-1} (\cos \varphi - \cos \alpha_2)],$$

$$\tilde{\beta}_1 = \arccos[\cos \tilde{\alpha}_2 + \Omega_- \omega_1^{-1} (\cos \varphi - \cos \tilde{\alpha}_2)].$$

Отсюда следуют выражения для пределов интегрирования по угловой переменной  $\theta_1$ :

$$\alpha_{\min} = \max\{\alpha_1, \beta_1\}, \quad \alpha_{\max} = \min\{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1\},$$

определяющих амплитуду волн (34).

В частности, амплитуда акустического давления ВРЧ строго равна нулю при выполнении неравенства  $\tilde{\beta}_1 < \alpha_1$ , которому удовлетворяют углы [15]

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} < \sin^2 \frac{\varphi_{0-}}{2} = \sin^2 \frac{\tilde{\alpha}_2}{2} + \frac{\omega_1}{\Omega_-} \left( \sin^2 \frac{\alpha_1}{2} - \sin^2 \frac{\tilde{\alpha}_2}{2} \right), \tag{36}$$

а также при  $\beta_1 > \tilde{\alpha}_1$ , когда

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} > \sin^2 \frac{\varphi_{0-}}{2} = \sin^2 \frac{\alpha_2}{2} + \frac{\omega_1}{\Omega_-} \left( \sin^2 \frac{\tilde{\alpha}_1}{2} - \sin^2 \frac{\alpha_2}{2} \right). \tag{37}$$

Выражение (36) описывает минимальный угол рассеяния, который существует, если

$$\sin^2 \frac{\tilde{\alpha}_2}{2} < \frac{\omega_1}{\omega_2} \sin^2 \frac{\alpha_1}{2}.$$

Отсюда при  $\tilde{\alpha}_2 = \alpha_1$  имеем  $\varphi_{0-} = \tilde{\alpha}_2$  (сравните с формулой (18)). Выражение (37) аналогично выражению (32) и показывает, что при  $\tilde{\alpha}_1 > \alpha_2$  диаграмма волн разностной частоты тем шире, чем меньше  $\Omega_-$ , причем рассеяние в принципе возможно вплоть до углов  $\varphi = \pi$ .

Далее, нижний предел интегрирования равен  $\alpha_1$ , а верхний –  $\tilde{\beta}_1$  для углов рассеяния

$$\sin^2 \frac{\tilde{\alpha}_2}{2} + \frac{\omega_1}{\Omega_-} \left( \sin^2 \frac{\alpha_1}{2} - \sin^2 \frac{\tilde{\alpha}_2}{2} \right) < \sin^2 \frac{\varphi}{2} < \sin^2 \frac{\alpha_2}{2} + \frac{\omega_1}{\Omega_-} \left( \sin^2 \frac{\alpha_1}{2} - \sin^2 \frac{\alpha_2}{2} \right). \tag{38}$$

Соответственно, при

$$\sin^2 \frac{\alpha_2}{2} + \frac{\omega_1}{\Omega_-} \left( \sin^2 \frac{\alpha_1}{2} - \sin^2 \frac{\alpha_2}{2} \right) < \sin^2 \frac{\varphi}{2} < \sin^2 \frac{\tilde{\alpha}_2}{2} + \frac{\omega_1}{\Omega_-} \left( \sin^2 \frac{\tilde{\alpha}_1}{2} - \sin^2 \frac{\tilde{\alpha}_2}{2} \right) \tag{39}$$

нижний и верхний пределы интегрирования равны  $\beta_1$  и  $\tilde{\beta}_1$ . Наконец,  $\alpha_{\min} = \beta_1$  и  $\alpha_{\max} = \tilde{\alpha}_1$  для углов

$$\sin^2 \frac{\tilde{\alpha}_2}{2} + \frac{\omega_1}{\Omega_-} \left( \sin^2 \frac{\tilde{\alpha}_1}{2} - \sin^2 \frac{\tilde{\alpha}_2}{2} \right) < \sin^2 \frac{\varphi}{2} < \sin^2 \frac{\alpha_2}{2} + \frac{\omega_1}{\Omega_-} \left( \sin^2 \frac{\tilde{\alpha}_1}{2} - \sin^2 \frac{\alpha_2}{2} \right). \tag{40}$$

В выражениях (38)–(40) при определенном соотношении между углами раскрытия волновых фронтов, а именно, при  $\tilde{\beta}_1 > \tilde{\alpha}_1$  и  $\beta_1 < \alpha_1$  интегрирование от  $\beta_1$  до  $\tilde{\beta}_1$  в выражении (34), соответствующее интервалу углов (39), может заменяться интегрированием от  $\alpha_1$  до  $\tilde{\alpha}_1$ . Интервалы углов, соответствующие (38)–(40), находятся в этом случае аналогично условию (39).

Для ВСЧ соответствующая  $\delta$ -функция попадает в область интегрирования по  $\theta_2$ , если в неравенстве  $\beta_1 < \theta_1 < \tilde{\beta}_1$  под величинами  $\beta_1$  и  $\tilde{\beta}_1$  понимать

выражения

$$\beta_1 = \arccos[\cos \tilde{\alpha}_2 + \Omega_+ \omega_1^{-1} (\cos \varphi - \cos \tilde{\alpha}_2)],$$

$$\tilde{\beta}_1 = \arccos[\cos \alpha_2 + \Omega_+ \omega_1^{-1} (\cos \varphi - \cos \alpha_2)],$$

которые аналогичны полученным для ВРЧ. По этой причине, например, предельный угол рассеяния ВСЧ описывается выражением, которое может быть получено из (37) с помощью простой замены  $\Omega_- \rightarrow \Omega_+$ :

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\varphi}{2} &> \sin^2 \frac{\tilde{\varphi}_{0+}}{2} = \\ &= \sin^2 \frac{\alpha_2}{2} + \frac{\omega_1}{\Omega_+} \left( \sin^2 \frac{\tilde{\alpha}_1}{2} - \sin^2 \frac{\alpha_2}{2} \right). \end{aligned} \tag{41}$$

Отсюда следует (см. комментарий к формуле (33)), что диаграмма направленности ВСЧ не может быть шире диаграммы первичных ультразвуковых волн. Аналогичным образом могут быть получены и различные интервалы для углов  $\varphi$ , соответствующие разным пределам интегрирования по угловой переменной  $\theta_1$  в выражении (34).

### 5. АМПЛИТУДНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛЯ ВРЧ

К настоящему времени синхронное рассеяние ВРЧ при кумулятивном нелинейном взаимодействии параллельных пучков плоских волн со средой широко используется для практических целей гидроакустики в так называемых параметрических антеннах (см., например, [33]). Сравнивая выражение (22) с величиной вторичного поля, возникающего в результате взаимодействия плоских волн [4, 17, 18], нетрудно убедиться, что рассеяние ВРЧ на большие углы в случае фокусированных пучков волн также может наблюдаться экспериментально при соответствующих значениях величин, входящих в правую часть (22). При этом остается открытым вопрос о зависимости амплитуды поля ВРЧ и ВСЧ от угла рассеяния  $\varphi$ , поскольку оценочная формула (22) предсказывает независимость поля ВРЧ от  $\varphi$  в пределах области распространения этих волн.

Выше было показано, что условия, получаемые при интегрировании в фокальной плоскости, оказываются, как правило, менее жесткими, чем при интегрировании вдоль оси излучения. В рассматриваемом случае интегрирование вдоль оси излучения  $x$  приводит к некоторым ограничивающим условиям для угловых переменных  $\theta_2$  и  $\theta_1$ . Исходя из этого, интегрирование по радиальной координате  $r$  производится до интегрирования по  $\theta_1$ .

Прежде всего, введем обозначения для коэффициентов, показывающих зависимость функций Бесселя от радиальной координаты:

$$\begin{aligned} a_{\pm} &= \frac{\Omega_{\pm}}{c_0} \sin \varphi, \\ b_{\pm} &= \frac{\omega_2}{c_0} \{1 - (\mp \omega_1 \cos \theta_1 \pm \Omega_{\pm} \cos \varphi)^2 \omega_2^{-2}\}^{1/2}, \tag{42} \\ c &= \frac{\omega_1}{c_0} \sin \theta_1. \end{aligned}$$

Несложно убедиться, что в случае ВРЧ для всех интервалов изменения угла рассеяния (36)–(40) выполняется неравенство  $c > a_-$ . Иными словами, даже минимальное значение параметра  $c$  на каждом из интервалов интегрирования по  $\theta_1$  оказывается больше максимальной величины  $a_-$  соответствующего интервала углов рассеяния. В частности, при  $\alpha_2 = 0$  и  $\alpha_1 = \tilde{\alpha}_2$  минимальное значение параметра  $c$  для интервала углов (39) есть

$$\begin{aligned} c &= \frac{\omega_1}{c_0} \sin \alpha_{\min} = \frac{\omega_1}{c_0} \sin \beta_1 = \\ &= \frac{2\Omega_-}{c_0} \sin \frac{\varphi}{2} \sqrt{\frac{\omega_1}{\Omega_-} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}} > \frac{\Omega_-}{c_0} \sin \varphi = a_-. \end{aligned}$$

Для интервала углов (38) аналогичное неравенство вытекает непосредственно из правой части двойного неравенства (38), которое при  $\alpha_2 = 0$  и  $\alpha_1 = \tilde{\alpha}_2$  может быть приведено к виду

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_-}{c_0} \sin \varphi &< \\ &< \sqrt{\frac{\omega_1^2}{c_0^2} \sin^2 \tilde{\alpha}_2 - \frac{2\Omega_- \omega_1}{c_0^2} \left( \frac{\omega_1}{\Omega_-} - 1 \right) (1 - \cos \tilde{\alpha}_2)} < \\ &< \frac{\omega_1}{c_0} \sin \tilde{\alpha}_2 = c. \end{aligned}$$

Далее несложно показать, что положительная разность величин  $c$  и  $a_-$  всегда больше  $b_-$ , поскольку из неравенства  $c - a_- > b_-$  после несложных преобразований получаем

$$\sin^2 \frac{\theta_1 - \varphi}{2} > 0,$$

что верно всегда. Заметим также, что интеграл  $I_-(\theta_1)$  по переменной  $r$  является табличным [32, с. 708] и условие его сходимости имеет вид

$$c > a_- + b_-. \tag{43}$$

В связи с этим необходимо отметить, что выражение (24) для величины акустического давления в первичных волнах, получающееся из формулы Гюйгенса–Френеля, равно как и из формулы

Рэлея, справедливо только для фокальной области. В то же время, интегрирование по радиальной координате в соотношении (35) продолжается до бесконечности. В силу этого, при условии выполнения неравенства (43) интеграл  $I_-(\theta_1)$ , строго говоря, оказывается равным нулю из-за слабого убывания на бесконечности осциллирующих функций Бесселя. Указанная трудность не возникает при проведенном ранее упрощенном рассмотрении, поскольку лямбда-функции первого порядка в формуле (8), являющиеся результатом интегрирования по угловым переменным, убывают на бесконечности быстрее и обеспечивают ненулевое значение интеграла  $I_2$  в соотношении (10).

Кроме того, из вида табличного интеграла [32, с. 708] следует, что появления минимального дополнительного обрезания подынтегральной функции (например, в виде дополнительного безразмерного степенного множителя  $(F/r)^{2-\rho}$ ,  $0 < \rho < 2$ ) вполне достаточно для сходимости интеграла к отличному от нуля значению. Введение такого обрезания вполне оправдано, поскольку формулы Рэлея и Гюйгенса – Френеля свидетельствуют о более быстром убывании полей, чем в формулах (24) и (26). В этом случае выражение (35) приобретает вид

$$I_-(\theta_1) = F^{2-\rho} \int_0^\infty J_0(cr) J_0(b-r) J_0(a-r) r^{\rho-1} dr. \quad (44)$$

В частности, для всех  $0 < \rho < 2$  имеем

$$I_-(\theta_1) = \frac{2^{\rho-1} F^{2-\rho} \Gamma(\rho/2)}{\Gamma(1-\rho/2)} \left( \frac{c_0}{\omega_1 \sin \theta_1} \right)^\rho \times \\ \times F_4 \left( \frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}; 1, 1; x, y \right),$$

где

$$x = \frac{\Omega_-^2 \sin^2 \varphi}{\omega_1^2 \sin^2 \theta_1}; \\ y = \frac{(\omega_1 - \Omega_-)^2 - (\omega_1 \cos \theta_1 - \Omega_- \cos \varphi)^2}{\omega_1^2 \sin^2 \theta_1};$$

$F_4(\alpha, \beta; \gamma, \gamma'; x, y)$  – гипергеометрическая функция двух переменных четвертого рода;  $\Gamma(x)$  – гамма-функция.

Провести интегрирование по угловой переменной с гипергеометрической функцией и выделить в явном виде зависимость от угла рассеяния в общем случае не представляется возможным. Понятно, однако, что при выборе степенной функции в качестве обрезавшей область интегрирова-

ния, вклад фокальной области в наибольшей степени учитывается при малых  $\rho$ . При этом в предельном случае  $\rho \rightarrow 0$  на нижнем пределе появляется логарифмическая расходимость, приводящая к бесконечным значениям для амплитуды рассеяния, поскольку  $\Gamma(\rho/2) \rightarrow \infty$ . Тем не менее, оценить угловую зависимость в явном виде можно, если воспользоваться другим близким к (44) интегралом [32, с. 709]

$$I_-(\theta_1) = F^{2-\rho} \times \\ \times \int_0^\infty r^{-1} J_0(a-r) J_{\rho/2}(b-r) J_{\rho/2}(cr) dr = \quad (45) \\ = \frac{F^2 - \rho b^{\rho/2} \Gamma(\rho/2)}{2c^{\rho/2} \Gamma(\rho/2 + 1) \Gamma(1)},$$

условие сходимости которого при  $\rho > 0$  также сводится к неравенству (43). В интеграле (45) часть степенной зависимости перенесена на функции Бесселя в соответствии с известным представлением этих функций в виде ряда [38]:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!(\nu+k)!} \left( \frac{x}{2} \right)^{\nu+2k}.$$

Интеграл (45) также расходится при  $\rho \rightarrow 0$ , однако при конечных  $\rho \ll 1$  указывает на очень слабую зависимость величины  $I_-(\theta_1)$  от углов  $\theta_1$  и  $\varphi$ . В этом приближении выражение для амплитуды акустического давления рассеянного поля ВРЧ имеет очень простой вид:

$$P_-(r_0, \varphi) = \pi \varepsilon \Gamma \left( \frac{\rho}{2} \right) \frac{1}{r_0} \frac{P_{10} P_{20}}{\rho_0 c_0^4} F^2 \Omega_-^2 \frac{\omega_1}{2c_0} \times \\ \times (\cos \alpha_{\min} - \cos \alpha_{\max}). \quad (46)$$

В соответствии с выражением (46) в интервале углов (38) акустическое давление ВРЧ будет

$$P_-(r_0, \varphi) = \pi \varepsilon \Gamma \left( \frac{\rho}{2} \right) \frac{1}{r_0} \frac{P_{10} P_{20}}{\rho_0 c_0^4} F^2 \Omega_-^2 \frac{\omega_1}{2c_0} \times \\ \times \left[ \frac{\omega_2}{\omega_1} (\cos \alpha_1 - \cos \tilde{\alpha}_2) - \frac{\Omega_-}{\omega_1} (\cos \varphi - \cos \alpha_1) \right]. \quad (47)$$

Указанный интервал углов соответствует области возрастания амплитуды рассеянных ВРЧ от нулевого значения в интервале углов (36) до некоторого максимального значения, соответствующего интервалу (39), для которого находим

$$P_-(r_0, \varphi) = \pi \varepsilon \Gamma \left( \frac{\rho}{2} \right) \frac{1}{r_0} \frac{P_{10} P_{20}}{\rho_0 c_0^4} F^2 \Omega_-^2 \frac{\omega_2}{2c_0} \times \\ \times (\cos \alpha_2 - \cos \tilde{\alpha}_2). \quad (48)$$

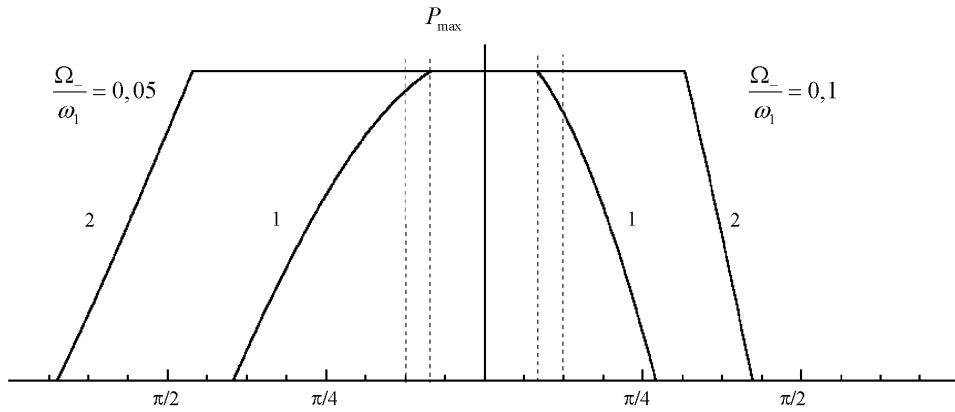


Рис. 3. Угловая зависимость нормированной на максимальное значение амплитуды акустического давления рассеянных ВРЧ при  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  и различных углах максимального раскрытия волновых фронтов первичных волн (штриховыми показаны углы  $\pi/12$  и  $\pi/8$ ):  
 1 -  $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = \pi/12$ , 2 -  $\tilde{\alpha}_1 = \pi/8$ ,  $\alpha_2 = \pi/12$

Несложно видеть, что этот результат хорошо согласуется с выражением (16) при  $\alpha_2 = 0$ , не зависит от угла  $\varphi$  и соответствует максимальной величине рассеянных волн.

По мере дальнейшего роста угла рассеяния в интервале углов (40) амплитуда ВРЧ убывает по закону

$$P_-(r_0, \varphi; t) = \pi \varepsilon \Gamma \left( \frac{\rho}{2} \right) \frac{1}{r_0} \frac{P_{10} P_{20}}{\rho_0 c_0^4} F^2 \Omega_-^2 \frac{\omega_1}{2c_0} \times \left[ \frac{\omega_2}{\omega_1} (\cos \alpha_2 - \cos \tilde{\alpha}_1) + \frac{\Omega_-}{\omega_1} (\cos \varphi - \cos \tilde{\alpha}_1) \right] \quad (49)$$

и достигает нуля для углов  $\varphi$ , определяемых неравенством (37). Понятно, что выражения (46) и (47) не учитывают дополнительного уширения области распространения ВРЧ, связанного с ограниченностью фокальной области в продольном направлении и приводящем к дополнительному дифракционному рассеянию, о котором речь шла выше.

На рис. 3 представлена угловая зависимость нормированной на максимальное значение амплитуды рассеяния ВРЧ для частного случая углов раскрытия первичных взаимодействующих со средой волн, который соответствует ультразвуковым фокусирующим преобразователям, используемым на практике для медицинской диагностики и визуализации. Как видно из рисунка, благодаря черенковскому излучению нелинейных источников среды значительное раскрытие волнового фронта ВРЧ (тем большее, чем меньше  $\Omega_-$ ) имеет место даже при полном совпадении в приближении геометрической акустики первичных взаимодействующих

пучков волн со средой, однако при меньшей амплитуде излучения.

Общие выражения для амплитуды акустического давления ВРЧ могут быть получены аналогично формулам (44) – (49), однако с точки зрения ультразвуковой диагностики нелинейного параметра мягких тканей эти величины не представляют большого интереса. Как показано выше, угловые характеристики и амплитуда ВРЧ испытывают очень незначительное влияние как дифракционных эффектов, так и эффекта черенковского рассеяния.

Как отмечалось в работе [12], развитые к настоящему времени методы ультразвуковой томографии, позволяющие реконструировать распределение неоднородностей плотности и сжимаемости исследуемой ткани, основаны на использовании многочастотного ультразвукового облучения некоторой области внутри ткани. Поэтому они могут эффективно сочетаться с методами, использующими нелинейное взаимодействие волн тех же частот для восстановления неоднородностей нелинейного параметра тканей. Возможны различные практические схемы сбора экспериментальных данных для решения общей обратной задачи нелинейного рассеяния. В связи с этим в [12] указывалось, что соотношения синхронизма свидетельствуют о большой информационной избыточности полного волнового томографического эксперимента по нелинейному рассеянию, поскольку одна и та же Фурье-компонента нелинейного параметра  $\varepsilon(\vec{k})$  может быть восстановлена по измерению нелинейного рассеяния с использованием раз-

личных комбинаций волновых векторов  $\vec{k}_1$  и  $\vec{k}_2$ , взаимодействующих со средой возмущений в виде плоских волн.

В то же время, из соотношений синхронизма следует, что точность определения неоднородностей нелинейного параметра  $\varepsilon(\vec{r})$  с помощью ВСЧ или гармоник первичных падающих волн связана с неопределенностью волновых векторов падающих волн, которая обусловлена ограниченностью апертуры излучения реальных пучков и дифракционным искривлением плоских волновых фронтов. Очевидно, что такой неопределенностью для мелкомасштабных неоднородностей, характеризующихся преимущественно большими волновыми векторами  $\vec{k}$ , можно пренебречь. Для относительно крупномасштабных неоднородностей (малые  $\vec{k}$ ) выгодно использовать длинноволновые ВРЧ, однако пренебрегать при этом неопределенностью векторов  $\vec{k}_1$  и  $\vec{k}_2$  уже нельзя, поскольку она может быть сравнима с разностью  $\vec{k}_1 - \vec{k}_2$ . Как показано в настоящем разделе, фокусирование первичных волн оставляет фактически неизменными характеристики рассеяния ВСЧ и способность определять с их помощью коротковолновые компоненты Фурье-образа нелинейного параметра. В то же время, для коаксиальных пучков волн появляется существенно большая неопределенность волнового вектора  $\vec{k}_-$ , что уменьшает точность определения длинноволновых компонент неоднородностей нелинейного параметра. Это связано как с некоторым ограничением области взаимодействия первичных волн окрестностью фокальной области, так и с возникновением рассеяния по механизму черенковского излучения.

Тем не менее, применение слабого фокусирования первичных волн может оказаться целесообразным, благодаря упомянутой избыточности данных полного томографического эксперимента по реконструкции пространственного распределения неоднородностей. Чтобы достичь этого, при реализации томографического метода достаточно исключить из схемы облучения исследуемого биологического объекта соосное и софокусное распространения первичных волн. Кроме того, рассмотренные в настоящем разделе локальные эффекты нелинейного рассеяния волн средой относятся только к непрерывному режиму излучения волн.

В заключение отметим, что в работах [39, 40] предложен и экспериментально реализован способ корректировки томографических данных, заключающийся в измерении рассеянного поля в модельной среде с однородным полем нелинейного пара-

метра при заданных характеристиках ультразвуковых преобразователей и формируемых ими падающих первичных волн с последующим нормированием получаемых томографических изображений реальных объектов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное рассмотрение показывает, что возможность рассеяния ВРЧ на большие углы при нелинейном взаимодействии со средой фокусированных ультразвуковых волн связана не только с локальностью взаимодействия в фокальной плоскости, приводящей к дифракции ВРЧ, но и с наличием сверхзвуковых нелинейных источников ВРЧ, распространяющихся вдоль акустической оси взаимодействующих фокусированных пучков волн. Это обстоятельство вместе с нетривиальной структурой зон Френеля источников ВРЧ приводит к тому, что наряду с общими чертами, присущими дифракционному рассеянию, при наложении фокусированных пучков волн имеются и отличия: например, в определенных случаях может отсутствовать рассеяние вперед, как при черенковском излучении.

Проведенная оценка зависимости амплитуды акустического давления ВРЧ от угла рассеяния показывает, что, в отличие от ВСЧ, значительное раскрытие волнового фронта ВРЧ (тем большее, чем меньше разностная частота) может иметь место даже при полном совпадении (в приближении геометрической акустики) первичных взаимодействующих пучков волн. На основании проведенного исследования доказано, что фокусирование первичных пучков в случае соосного распространения волн одновременно приводит к большей неопределенности параметров ВРЧ и, соответственно, меньшей точности определения в томографическом эксперименте длинноволновых компонент неоднородностей нелинейного параметра исследуемой области. В то же время, известная избыточность полных данных томографического эксперимента по реконструкции параметров нелинейности среды при многочастотном облучении позволяет использовать для этих целей фокусированные первичные пучки ультразвуковых волн.

1. *Применение ультразвука в медицине: Физические основы* / Под ред. К. Хилла. – М.: Мир, 1989. – 568 с.
2. Duck F. A. Nonlinear acoustic in diagnostic ultrasound // *Ultrasound Med. Biol.* – 2002. – 28, N 1. – P. 1–18.

3. Duck F. A. Physical properties of tissue: A comprehensive reference book.– London: Academic Press, 1990.
4. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики.– М.: Наука, 1975.– 228 с.
5. Tsian T. Non-linear acoustic parameter and its application in ultrasonic imaging // Appl. Acoust.– 1987.– 6, N 3.– P. 1–7.
6. Ichida N., Sato T., Linzer M. Imaging the nonlinear ultrasonic parameter // Ultrason. Imaging.– 1983.– 9, N 2.– P. 295–299.
7. Ichida N., Takuso S., Miwa H., Murakami K. Real-time nonlinear parameter tomography using impulsive pumping waves // IEEE Trans. Son. Ultrason.– 1984.– 31, N 3.– P. 635–641.
8. Nakagava Y. Ultrasonic nonlinear parameter CT by nonlinear interaction // Trans. IECSE.– 1988.– J69, N 8.– P. 1215–1222.
9. Nakagava Y., Aou W., Cai A. et al. Imaging the acoustic nonlinearity parameter with sound waves // Trans. IECSE.– 1988.– E71, N 8.– P. 799–808.
10. Zhang D., Gong X. F., Ye S. G. Acoustic nonlinearity parameter tomography for biological specimens via measurement of the second harmonics // J. Acoust. Soc. Amer.– 1996.– 99, N 8.– P. 2397–2402.
11. Zhang D., Gong X. F. Experimental investigation of acoustic nonlinearity parameter tomography for excised pathological biological tissues // Ultrasound Med. Biol.– 1999.– 25, N 2.– P. 593–599.
12. Буров В. А., Гуринович И. Е., Руденко О. В., Тагунов Е. Я. Реконструкция пространственного распределения параметра нелинейности и скорости звука в акустической нелинейной томографии // Акуст. ж.– 1994.– 40, N 6.– С. 922–929.
13. Баранник Е. А., Кадников О. Г., Папакица В. В. О рассеянии звука звуком при наложении фокусированных пучков волн // Акуст. ж.– 1986.– 32, N 4.– С. 513–517.
14. Баранник Е. А., Кадников О. Г. О нелинейных источниках в области наложения сходящихся сферических волн // Акуст. ж.– 1987.– 33, N 2.– С. 353–354.
15. Баранник Е. А. Акустическая томография нелинейного параметра и нелинейное взаимодействие волн // Вісн. Харків. нац. ун-ту Сер. фізична “Ядра, частинки, поля”.– 2000.– N 481, вип. 2(10).– С. 53–58.
16. Westervelt P. J. Parametric acoustic array // J. Acoust. Soc. Amer.– 1963.– 35, N 2.– P. 535–537.
17. Зверев В. А., Калачев А. И. Измерение рассеяния звука звуком при наложении параллельных пучков // Акуст. ж.– 1968.– 14, N 2.– С. 214–220.
18. Зверев В. А., Калачев А. И. Излучение звука из области пересечения двух звуковых пучков // Акуст. ж.– 1969.– 15, N 3.– С. 369–376.
19. Naze Tjotta J., Tjotta S. Effects of focusing on the nonlinear interaction between two collinear finite amplitude sound beams // J. Acoust. Soc. Amer.– 1991.– 89, N 3.– P. 1017–1027.
20. Aanonsen S. I., Barkve T., Naze Tjotta J., Tjotta S. Distortion and harmonic generation in the nearfield of a finite amplitude sound beam // J. Acoust. Soc. Amer.– 1984.– 75, N 4.– P. 749–768.
21. Hamilton M. F., Naze Tjotta J., Tjotta S. Nonlinear effects in the farfield of a directive sound source // J. Acoust. Soc. Amer.– 1985.– 78, N 1.– P. 202–216.
22. Baker A. C., Anastasiadis K., Humphrey V. F. The nonlinear pressure field of a plane circular piston: Theory and experiment // J. Acoust. Soc. Amer.– 1988.– 84, N 7.– P. 1483–1487.
23. Naze Tjotta J., Tjotta S., Vefring E. H. Propagation and interaction of two collinear finite amplitude sound beams // J. Acoust. Soc. Amer.– 1990.– 88, N 2.– P. 2859–2870.
24. Hart T. S., Hamilton M. F. Nonlinear effects in focused sound beams // J. Acoust. Soc. Amer.– 1988.– 84, N 4.– P. 1488–1496.
25. Колмаков И. А. Изменение частот акустических комбинационных волн в движущихся средах // Акуст. ж.– 1995.– 41, N 2.– С. 341–343.
26. Антонов Н. Н., Колмаков И. А., Самарцев В. В., Шкалик В. А. Акустическое черенковское излучение и его использование в голографических методах при исследовании движущихся сред // ПМТФ.– 1989.– N 6.– С. 29–34.
27. Колмаков И. А., Антонов Н. Н. Эффект усиления черенковских волн течением среды // Письма в ЖТФ.– 1989.– 15, N 2.– С. 91–93.
28. Наугольных К. А., Рыбак С. А. Взаимодействие плоской волны с акустическим импульсом // Акуст. ж.– 1989.– 35, N 1.– С. 101–103.
29. Абаимов С. Г., Рыбак С. А. Рассеяние плоской волны на звуковом импульсе // Акуст. ж.– 1996.– 42, N 2.– С. 262–263.
30. Каневский И. Н. Фокусирование звуковых и ультразвуковых волн.– М.: Наука, 1977.– 326 с.
31. Кайно Г. Акустические волны. Устройства, визуализация и аналоговая обработка сигналов.– М.: Мир, 1990.– 656 с.
32. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.– М.: Наука, 1971.– 1108 с.
33. Новиков Б. К., Руденко О. В., Тимошенко В. И. Нелинейная гидроакустика.– Л.: Судостроение, 1981.– 264 с.
34. Гаврилов Л. Р., Цирульников Е. М. Фокусированный ультразвук в биологии и медицине.– Л.: Наука, 1980.– 179 с.
35. Баранник Е. А., Залобовский И. И., Кадников О. Г., Кобизской В. И. Способ ультразвукового воздействия на объект в оптически непрозрачной среде // Авт. свид. СССР N 1300379.– Запат. 01.12.1986.– Бюл. N 12, 1987.
36. Naze Tjotta J., Tjotta S. Interaction of sound waves. Part I. Basic equations and plane waves // J. Acoust. Soc. Amer.– 1987.– 82, N 4.– P. 1425–1428.
37. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Электродинамика сплошных сред.– М.: Наука, 1982.– 624 с.
38. Арфкен Г. Математические методы в физике.– М.: Атомиздат, 1970.– 712 с.
39. Zhang J., Dunn F. A small volume thermodynamic system for B/A measurement // J. Acoust. Soc. Amer.– 1991.– 89, N 1.– P. 73–79.
40. Zhang J., Dunn F. In vivo B/A determination in a mammalian organ // J. Acoust. Soc. Amer.– 1987.– 81, N 6.– P. 1635–1637.