

**К. В. Аврамов,**

д-р техн. наук

Институт проблем  
машиностроения  
им. А. Н. Подгорного  
НАН Украины,  
г. Харьков,  
e-mail: kvavr@kharkov.ua

УДК 539.3

**ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК  
С ДОЗВУКОВЫМ, ТРЕХМЕРНЫМ  
ПОТЕНЦИАЛЬНЫМ ТЕЧЕНИЕМ ГАЗА**

Для дослідження взаємодії пологої оболонки з тривимірною дозвуковою течією виводиться система сингулярних інтегральних рівнянь відносно аеродинамічних похідних перепаду тиску. Ця система рівнянь розв'язується за допомогою методу дискретних вихорів. В результаті його застосування ця система зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь великої розмірності. Для описання коливань пологої оболонки отримана система диференціальних рівнянь за допомогою методу заданих форм. Для дослідження динамічної нестійкості оболонки розраховуються характеристичні показники. Чисельно досліджується вплив кривини пологої оболонки на параметри динамічної нестійкості.

**Ключові слова:** сингулярні інтегральні рівняння, динамічна нестійкість, положиста оболонка, характеристичні показники.

**Введение**

Аэрокосмические системы и узлы энергетических машин содержат пологие оболочки, взаимодействующие с дозвуковым газовым течением. Основными элементами тормозных аэрокосмических систем и конструкций оперения ракет являются тонкие пологие оболочки, взаимодействующие с газовым потоком. Большинство исследований посвящено анализу взаимодействия тонких пластин с газовыми потоками. Взаимодействие газовых течений с колеблющимися пологими оболочками практически не исследовано. Подробные обзоры исследований, посвященных взаимодействию тонкостенных конструкций с газовыми течениями, представлены в [1–3].

В этой статье выведена система гиперсингулярных интегральных уравнений, описывающая взаимодействие пологой оболочки с потенциальным, несжимаемым, идеальным трехмерным газовым потоком. Такая система уравнений чрезвычайно эффективна для решения задач аэроупругости. Исследована динамическая неустойчивость пологих оболочек и влияние кривизны конструкции на области динамической неустойчивости.

**1. Постановка задачи**

Рассмотрим обтекание дозвуковым газовым течением цилиндрической панели с постоянной толщиной (рис. 1). Так как оболочка тонкая, то сдвигом и инерцией вращения можно пренебречь. Вдоль криволинейной координаты  $\theta$  длина панели  $a$ , а вдоль оси  $y$  ее длина  $b$ . Радиусы кривизн координатных линий  $\theta$  и  $y$  предполагаются постоянными; они равны  $R_1$  и  $\infty$ . Перемещения точек срединной поверхности оболочки вдоль координатных осей  $\theta$ ,  $y$ ,  $z$  обозначим через  $u(\theta, y, t)$ ,  $v(\theta, y, t)$ ,  $w(\theta, y, t)$ . Перемещения и деформации предполагаются малыми; они удовлетворяют следующим соотношениям [4]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x,0} &= \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{w}{R_1}; & \varepsilon_{y,0} &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \gamma_{xy,0} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta}; \\ k_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}; & k_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; & k_{xy} &= -2\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial \theta}. \end{aligned} \quad (1)$$

Напряжения и деформации удовлетворяют закону Гука. Потенциальная энергия оболочки принимает следующий вид [4]:

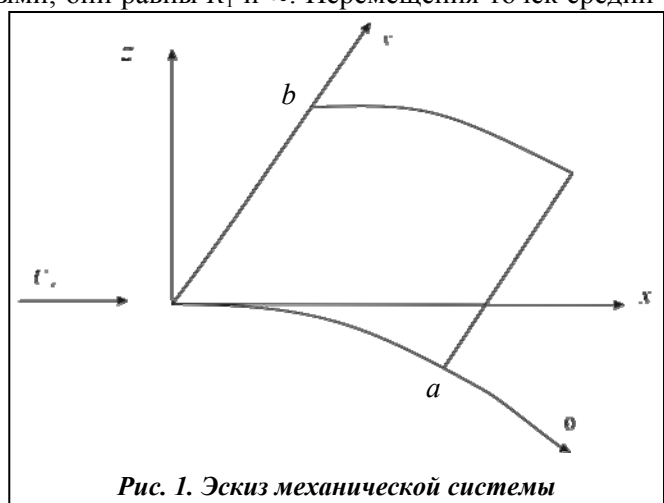


Рис. 1. Эскиз механической системы

$$U_s = \frac{D}{R_1} \int_0^a \int_0^b \left( \varepsilon_{x,0} k_x + \varepsilon_{y,0} k_y + \nu \varepsilon_{x,0} k_y + \nu \varepsilon_{y,0} k_x + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy,0} k_{xy} \right) d\theta dy +$$

$$\frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left( k_x^2 + k_y^2 + 2\nu k_x k_y + \frac{1-\nu}{2} k_{xy}^2 \right) d\theta dy + \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^a \int_0^b \left( \varepsilon_{x,0}^2 + \varepsilon_{y,0}^2 + 2\nu \varepsilon_{x,0} \varepsilon_{y,0} + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy,0}^2 \right) d\theta dy,$$
(2)

где  $h$  – толщина оболочки;  $E, \nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона;  $D$  – цилиндрическая жесткость. Кинетическую энергию оболочки представим так:  $T_S = \frac{1}{2} \rho_s h \int_0^a \int_0^b (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) d\theta dy$ , где  $\rho_s$  – плотность материала оболочки.

Для вывода уравнений движений оболочки с конечным числом степеней свободы применим метод заданных форм [5]. Движения разложим по собственным формам линейных колебаний

$$w = \sum_{i=\bar{N}}^{\bar{N}+N_w} q_{i-\bar{N}+1}^{(w)} W_i(\theta, y); \quad u = \sum_{i=\bar{N}}^{\bar{N}+N_w} q_{i-\bar{N}+1}^{(u)} U_i(\theta, y); \quad v = \sum_{i=\bar{N}}^{\bar{N}+N_w} q_{i-\bar{N}+1}^{(v)} V_i(\theta, y),$$
(3)

где  $U_i, V_i, W_i$  – собственные формы колебаний оболочки;  $q^{(w)} = [q_1^{(w)}, \dots, q_{N_w}^{(w)}]$ ;  $q^{(u)} = [q_1^{(u)}, \dots, q_{N_w}^{(u)}]$ ;  $q^{(v)} = [q_1^{(v)}, \dots, q_{N_w}^{(v)}]$ ; – вектора обобщенных координат конструкции. Предположим, что изгибные колебания оболочки близки к моногармоническим [6]

$$q_j^{(w)}(t) \approx \gamma_j \cos(\omega t) + \delta_j \sin(\omega t), \quad j = 1, \dots, N_w.$$
(4)

Оболочка обтекается трехмерным газовым потоком. Течение предполагается потенциальным, идеальным и несжимаемым. На значительном удалении от оболочки поток параллелен оси  $x$  и движется с постоянной скоростью  $U_\infty$ . Вблизи оболочки наблюдаются возмущения в потоке. Потенциал скоростей  $\varphi(x, y, z)$  и давления  $p(x, y, z, t)$  удовлетворяют уравнениям Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0; \quad \nabla^2 p = 0.$$
(5)

Теперь рассмотрим граничные условия, которым должны удовлетворять решения уравнений (5). На большом удалении от оболочки компоненты возмущенной скорости потока затухают до нуля:

$$\lim_{x^2+y^2+z^2 \rightarrow \infty} \text{grad} \varphi = 0. \text{ Перепад давления } \Delta p(x, y, t) = p(x, y, z)|_{z=0^+} - p(x, y, z)|_{z=0^-} \text{ равен нулю на гра-}$$

нице оболочки  $\partial S: \Delta p|_{\partial S} = 0$ . Теперь рассмотрим условия непротекания, которые выражают равенство скоростей поверхностей оболочки и скоростей потока, соприкасающегося с оболочкой. Если оболочка находится в состоянии покоя, то ее срединная поверхность описывается функцией  $z = R(x, y)$ . Если оболочка совершает колебания, то уравнение срединной поверхности опишем функцией  $F(x, y, z, t) = z - f(x, y, t) = 0$ . Функцию  $f(x, y, t)$  представим в следующем виде:

$$f(x, y, t) = R(x, y) + w(\theta, y, t). \text{ Тогда условие непроникания запишем так: } (\text{grad} F, \vec{V}) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \text{ где } \vec{V} -$$

вектор скорости течения на поверхности оболочки. Это граничное условие можно представить как

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=f(x,y,t)} = U_\infty \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}. \text{ Используя свойства функции } R(x, y), \text{ условие непроникания запишем в ви-}$$

де:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=R(x,y)} = U_\infty \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}.$$
(6)

Итак, рассмотрены все граничные условия для решения уравнений (5).

## 2. Сингулярные интегральные уравнения

В этом разделе выводится система сингулярных интегральных уравнений, описывающая обтекание пологих оболочек дозвуковым газовым потоком. Аналогичная система сингулярных интегральных уравнений, описывающая обтекание пластинки газовым потоком, выведена в статье [7].

Давление и потенциал скоростей удовлетворяют уравнению Бернулли, которое запишем в следующем виде:  $p(x, y, z) = -\rho_\infty \left( \frac{\partial \varphi(x, y, z, t)}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \varphi(x, y, z, t)}{\partial x} \right)$ , где  $\rho_\infty$  – плотность газа. Потенциал скоростей и функцию давления при колебаниях оболочки представим в виде линейной функции относительно обобщенных координат и обобщенных скоростей конструкции [7]

$$\varphi = \sum_{j=1}^{N_1} [\varphi_j^{(0)}(x, y, z)q_j(t) + \varphi_j^{(1)}(x, y, z)\dot{q}_j(t)]; \quad p = \sum_{j=1}^{N_1} [p_j^{(0)}(x, y, z)q_j(t) + p_j^{(1)}(x, y, z)\dot{q}_j(t)]. \quad (7)$$

Отметим, что функции  $\varphi_j^{(0)}(x, y, z)$ ,  $\varphi_j^{(1)}(x, y, z)$ ,  $p_j^{(0)}(x, y, z)$ ,  $p_j^{(1)}(x, y, z)$  называются аэродинамическими производными; они удовлетворяют уравнению Лапласа [8]

$$\nabla^2 \varphi_j^{(k)} = 0; \quad \nabla^2 p_j^{(k)} = 0; \quad k = 0, 1; \quad j = 1, \dots, N_1. \quad (8)$$

Решение уравнения (8) представим в виде потенциала двойного слоя так:

$$p_j^{(k)}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_R \Delta p_j^{(k)}(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2 + (z-\xi_3)^2}} \right] dR_\xi, \quad (9)$$

где  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ;  $dR_\xi$  – элемент поверхности оболочки;  $n_\xi$  – нормаль к поверхности оболочки;  $\Delta p_j^{(k)} = p_j^{(k)}(x, y, z)|_{z=R+0} - p_j^{(k)}(x, y, z)|_{z=R-0}$  – аэродинамические производные перепада давления, действующего на поверхность оболочки. Соотношения (7) введем в уравнения Бернулли. В результате получим следующую систему уравнений в частных производных относительно аэродинамических производных:

$$U_\infty \frac{\partial \varphi_j^{(0)}}{\partial x} - \omega^2 \varphi_j^{(1)} = -\frac{p_j^{(0)}}{\rho_\infty}; \quad U_\infty \frac{\partial \varphi_j^{(1)}}{\partial x} + \varphi_j^{(0)} = -\frac{p_j^{(1)}}{\rho_\infty}. \quad (10)$$

Решение системы (10) представим так:

$$\begin{aligned} \varphi_j^{(1)}(x, y, z) &= -\frac{1}{U_\infty \rho_\infty \omega} \int_{-\infty}^x \left[ \omega p_j^{(1)}(\zeta, y, z) \cos\left(\frac{\omega}{U_\infty}(\zeta - x)\right) + p_j^{(0)}(\zeta, y, z) \sin\left(\frac{\omega}{U_\infty}(\zeta - x)\right) \right] d\zeta; \\ \varphi_j^{(0)}(x, y, z) &= \frac{1}{U_\infty \rho_\infty} \int_{-\infty}^x \left[ -p_j^{(0)}(\zeta, y, z) \cos\left(\frac{\omega}{U_\infty}(\zeta - x)\right) + \omega p_j^{(1)}(\zeta, y, z) \sin\left(\frac{\omega}{U_\infty}(\zeta - x)\right) \right] d\zeta. \end{aligned} \quad (11)$$

Граничное условие непроникания относительно аэродинамических производных запишем в виде

$$\left. \frac{\partial \varphi_j^{(0)}}{\partial z} \right|_{z=R(x, y)} = U_\infty \frac{\partial W_j}{\partial x}; \quad \left. \frac{\partial \varphi_j^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=R(x, y)} = W_j. \quad (12)$$

Из (9), (11) и (12) получим следующую систему гиперсингулярных интегральных уравнений:

$$4\pi U_\infty^2 \rho_\infty \frac{\partial W_j(x, y)}{\partial x} = \omega \iint_R \Delta p_j^{(1)}(\xi) K_S(x, y, \xi) dR_\xi - \iint_R \Delta p_j^{(0)}(\xi) K_C(x, y, \xi) dR_\xi; \quad (13)$$

$$4\pi U_\infty \rho_\infty \omega W_j(x, y) = -\omega \iint_S \Delta p_j^{(1)}(\xi) K_C(x, y, \xi) dR_\xi - \iint_S \Delta p_j^{(0)}(\xi) K_S(x, y, \xi) dR_\xi, \quad (14)$$

где  $K_C(x, y, \xi) = \int_{-\infty}^x \frac{\partial^2}{\partial n_\xi \partial z} \left[ \frac{1}{\sqrt{(\eta - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - \xi_3)^2}} \right]_{z=R(x, y)} \cos \frac{\omega}{U_\infty}(\eta - x) d\eta$ ;

$$K_s(x, y, \xi) = \int_{-\infty}^x \frac{\partial^2}{\partial n_\xi \partial z} \left[ \frac{1}{\sqrt{(\eta - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - \xi_3)^2}} \right]_{z=R(x, y)} \sin \frac{\omega}{U_\infty} (\eta - x) d\eta.$$

Функции  $K_c$ ,  $K_s$  удовлетворяют следующим соотношениям:  $\frac{\partial K_s}{\partial x} = -\frac{\omega}{U_\infty} K_c$ ;

$$\frac{\partial K_c}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial n_\xi \partial z} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - \xi_3)^2}} \right]_{z=R(x, y)} + \frac{\omega}{U_\infty} K_s. \text{ Продифференцируем уравнение (14) по}$$

$x$  и сложим с (13); получим следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$8\pi U_\infty \rho_\infty \frac{\partial W_j(x, y)}{\partial x} = - \iint_R \frac{\partial^2}{\partial n_\xi \partial z} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - \xi_3)^2}} \right]_{z=R(x, y)} \Delta p_j^{(1)}(\xi) dR_\xi. \quad (15)$$

Уравнение (13) продифференцируем по  $x$  и сложим с (14); имеем следующее гиперсингулярное интегральное уравнение:

$$4\pi U_\infty^2 \rho_\infty \left[ \frac{\partial^2 W_j(x, y)}{\partial x^2} - \frac{\omega^2}{U_\infty^2} W_j(x, y) \right] = - \iint_R \frac{\partial^2}{\partial n_\xi \partial z} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - \xi_3)^2}} \right]_{z=R(x, y)} \Delta p_j^{(0)}(\xi) dR_\xi. \quad (16)$$

Итак, получена система гиперсингулярных интегральных уравнений (15), (16) относительно аэродинамических производных перепада давления, описывающая обтекание потенциальным потоком тонкостенной пологой оболочки. Эту систему уравнений запишем относительно следующих безразмерных переменных и параметров

$$\bar{x} = \frac{x}{a}; \quad \bar{y} = \frac{y}{b}; \quad \bar{z} = \frac{z}{b}; \quad \Delta \bar{p}_j^{(1)} = \frac{\omega a}{\rho_\infty U_\infty^2} \Delta p_j^{(1)}; \quad \Delta \bar{p}_j^{(0)} = \frac{a}{\rho_\infty U_\infty^2} \Delta p_j^{(0)}; \quad \chi = \frac{\omega a}{U_\infty}; \quad r_1 = \frac{a}{b}; \quad r_2 = \frac{R_1}{a}. \quad (17)$$

Тогда гиперсингулярные интегральные уравнения (15), (16) в безразмерных переменных и параметрах примут вид

$$4\pi \left[ \frac{\partial^2 W_j(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}^2} - \chi^2 W_j(\bar{x}, \bar{y}) \right] = - \iint_{\bar{R}} \frac{\partial^2}{\partial \bar{n}_\xi \partial \bar{z}} \left[ \frac{1}{\sqrt{(\bar{x} - \bar{\xi}_1)^2 + r_1^{-2}(\bar{y} - \bar{\xi}_2)^2 + r_1^{-2}(\bar{z} - \bar{\xi}_3)^2}} \right]_{\bar{z}=\bar{R}(\bar{x}, \bar{y})} \Delta \bar{p}_j^{(0)}(\bar{\xi}) d\bar{R}_\xi; \quad (18)$$

$$8\pi \chi \frac{\partial W_j(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}} = - \iint_{\bar{R}} \frac{\partial^2}{\partial \bar{n}_\xi \partial \bar{z}} \left[ \frac{1}{\sqrt{(\bar{x} - \bar{\xi}_1)^2 + r_1^{-2}(\bar{y} - \bar{\xi}_2)^2 + r_1^{-2}(\bar{z} - \bar{\xi}_3)^2}} \right]_{\bar{z}=\bar{R}(\bar{x}, \bar{y})} \Delta \bar{p}_j^{(1)}(\bar{\xi}) d\bar{R}_\xi,$$

где  $\frac{\partial}{\partial n_\xi} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_\xi}$ ;  $\frac{\partial}{\partial n_\xi} = \cos \bar{\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + r_1 \cos \bar{\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} + r_1 \cos \bar{\gamma} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$  – безразмерная производная по нормали к срединной поверхности оболочки;  $\cos \bar{\alpha}$ ;  $\cos \bar{\beta}$ ;  $\cos \bar{\gamma}$  – направляющие косинусы нормали к срединной поверхности оболочки;  $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3)$ ;  $\bar{z} = \bar{R}(\bar{x}, \bar{y})$  – уравнение срединной поверхности оболочки в безразмерных координатах;  $d\bar{R}_\xi = \frac{1}{ab} dR_\xi$  – безразмерный бесконечно малый элемент срединной поверхности оболочки.

Для исследования аэроупругих колебаний преобразуем систему сингулярных интегральных уравнений (18) к уравнениям, не зависящим от  $\chi$ . Для этого введем следующую замену переменных:  $\Delta \bar{p}_j^{(1)} = \chi \Delta \hat{p}_j^{(1)}$ ;  $\Delta \bar{p}_j^{(0)} = \chi^2 \Delta \hat{p}_j^{(0)} + \Delta \bar{p}_j^{(0)}$ . С ее помощью систему двух сингулярных уравнений сведем к системе трех сингулярных уравнений. Эта система уравнений записывается относительно неизвестных функций  $\Delta \hat{p}_j^{(1)}$ ,  $\Delta \hat{p}_j^{(0)}$ ,  $\Delta \bar{p}_j^{(0)}$ .

**3. Уравнения движения оболочки и их анализ**

В этом разделе выводится система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая движение оболочки. Она записывается относительно обобщенных координат, участвующих в разложениях (3). Для вывода этих уравнений используется метод заданных форм [5]. Составим виртуальную работу перепада давления, действующего на оболочку, и трения в материале конструкции:

$$\delta A = \iint_R \Delta p \cdot \delta w dR_\xi - \iint_R \beta w \cdot \delta w dR_\xi, \text{ где } \beta - \text{коэффициент внутреннего трения в материале оболочки.}$$

Тогда вектор обобщенных сил  $Q^{(w)}$ , соответствующий обобщенным координатам  $q^{(w)}$ , запишем так:  $Q^{(w)} = \gamma q^{(w)} + \delta \dot{q}^{(w)} - B \ddot{q}^{(w)}$ , где  $\gamma = \{\gamma_{ij}\}_{j=1, \dots, N_w}^{i=1, \dots, N_w}$ ;  $\delta = \{\delta_{ij}\}_{j=1, \dots, N_w}^{i=1, \dots, N_w}$ ;  $B = \text{diag}(\beta, \dots, \beta)$ . Разложения (3) введем в кинетическую и потенциальную энергии, которые представлены выше. В результате получим

$$2T = \sum_{i,k=1}^{3N_w} a_{ik} q_i q_k; \quad 2U_s = \sum_{i,k=1}^{3N_w} c_{ik} q_i q_k. \text{ Здесь } q_i; i = 1, \dots, 3N_w - \text{набор обобщенных координат, в кото-}$$

ром присутствуют все координаты из векторов  $q^{(w)}$ ,  $q^{(u)}$ ,  $q^{(v)}$ . Теперь уравнения движения конструкции запишем в виде уравнений Лагранжа. Тогда в результате получим

$$\begin{aligned} A^{(1,1)} \ddot{q}^{(w)} + C^{(1,1)} \dot{q}^{(w)} + C^{(1,2)} \dot{q}^{(u)} + C^{(1,3)} \dot{q}^{(v)} &= Q^{(w)}; \\ A^{(2,2)} \ddot{q}^{(u)} + C^{(2,1)} \dot{q}^{(w)} + C^{(2,2)} \dot{q}^{(u)} + C^{(2,3)} \dot{q}^{(v)} &= 0; \\ A^{(3,3)} \ddot{q}^{(v)} + C^{(3,1)} \dot{q}^{(w)} + C^{(3,2)} \dot{q}^{(u)} + C^{(3,3)} \dot{q}^{(v)} &= 0, \end{aligned} \tag{19}$$

где  $A^{(i,i)}$ ,  $C^{(i,j)}$  – матрицы соответствующих размеров.

Собственные частоты колебаний оболочки с преобладанием движений  $u$ ,  $v$  значительно выше собственных частот с преобладанием движений  $w$ . Поэтому инерционными слагаемыми в направлении  $u$ ,  $v$  пренебрежем:  $\ddot{q}^{(u)} = \ddot{q}^{(v)} = 0$ . Тогда второе и третье матричное уравнение системы (19) можно записать в следующем виде:

$$C^{(2,2)} \dot{q}^{(u)} + C^{(2,3)} \dot{q}^{(v)} = -C^{(2,1)} \dot{q}^{(w)}; \quad C^{(3,2)} \dot{q}^{(u)} + C^{(3,3)} \dot{q}^{(v)} = -C^{(3,1)} \dot{q}^{(w)}. \tag{20}$$

Решение систем линейных алгебраических уравнений (20) представим в следующем матричном виде:  $\dot{q}^{(u)} = \alpha \dot{q}^{(w)}$ ;  $\dot{q}^{(v)} = \beta \dot{q}^{(w)}$ . Эти матричные соотношения введем в первое матричное уравнение системы (19). В результате получим динамическую систему относительно обобщенных координат изгибных колебаний оболочки

$$A^{(1,1)} \ddot{q}^{(w)} + K \dot{q}^{(w)} + B \ddot{q}^{(w)} = \gamma \dot{q}^{(w)} + \delta \dot{q}^{(w)}, \tag{21}$$

где  $K = C^{(1,1)} + C^{(1,2)}\alpha + C^{(1,3)}\beta$ . Приведем динамическую систему (21) к безразмерным переменным и параметрам. Для этого воспользуемся безразмерными параметрами (17) и введем дополнительные безразмерные переменные  $\tau = \omega t$ ;  $\vartheta = q^{(w)}/h$ , где  $\vartheta$  – вектор безразмерных поперечных колебаний оболочки. Тогда динамическая система (21) примет следующий вид:

$$\chi^2 \tilde{A}^{(1,1)} \vartheta'' + \chi_1^2 \tilde{K} \vartheta' = (\chi^2 \Pi + H) \vartheta + \chi Z \vartheta' - \chi_1 \chi \tilde{B} \vartheta', \tag{22}$$

где  $\vartheta' = \frac{d\vartheta}{d\tau}$ ;  $\chi_1 = \frac{\omega_1 a}{U_\infty}$ ;  $\omega_1$  – первая собственная частота линейных колебаний оболочки в вакууме.

Теперь рассмотрим адекватность описания системой уравнений (22) критических параметров, при которых возбуждаются автоколебания. Для этого собственные частоты форм колебаний сравниваются с критической частотой автоколебаний  $\omega_*$ , которая получается из решения системы (22). В разложении (3) будут выбираться только те собственные формы, которые возбуждаются при колебаниях оболочки с частотой  $\omega_*$ . Предполагаем, что при потере устойчивости возбуждаются формы колебаний, частоты которых ближе к критической частоте автоколебаний. Формы колебаний в разложении (3) выбираются так, чтобы их собственные частоты  $\omega_N, \dots, \omega_{N+N_w}$  удовлетворяли следующему условию:  $\omega_N < \omega_* < \omega_{N+N_w}$ . Более того, формы колебаний желательно выбрать так, чтобы  $\omega_*$  было как можно ближе к числу  $0,5(\omega_N + \omega_{N+N_w})$ . Поэтому расчет динамической неустойчивости ведется итера-

ционно. Сначала выбирается разложение (3). В результате расчета динамической неустойчивости определяется частота  $\omega_*$ . Потом по частоте  $\omega_*$  подбираются новые собственные формы для разложения (3), и расчет повторяется. Такой итерационный процесс должен повторяться, пока  $\omega_*$  не будет близка к  $0,5(\omega_{\bar{N}} + \omega_{\bar{N}+N_w})$ . В результате данного расчета определяются два параметра (критическая скорость потока  $U_\infty^*$  и критическая частота автоколебаний  $\omega_*$ ).

Для оценки динамической неустойчивости рассчитываются характеристические показатели тривиального состояния равновесия динамической системы (22). Подход к их расчету представлен в [6].

#### 4. Результаты численного анализа

Для численного решения системы гиперсингулярных интегральных уравнений (18) применялся модифицированный метод дискретных вихрей, который предложен в работе [7].

Рассмотрим динамику цилиндрической панели со следующими численными значениями параметров:

$$E = 70,56 \cdot 10^9 \text{ Па}; \quad \rho_s = 2,84 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \quad \nu = 0,3; \quad a = 0,27 \text{ м}; \quad b = 0,127 \text{ м}; \quad h = 0,39 \cdot 10^{-3} \text{ м}. \quad (23)$$

Численно исследуем динамическую неустойчивость оболочки в газовом потоке. Найдем значения параметров  $\chi^*$ ,  $\chi_1^*$ ,  $U_\infty^*$ ,  $\omega_*$ , при которых оболочка теряет динамическую устойчивость и наблюдается бифуркация Хопфа. При  $U_\infty < U_\infty^*$ ;  $\chi_1 > \chi_1^*$  наблюдается устойчивое состояние равновесия, а при  $U_\infty > U_\infty^*$ ;  $\chi_1 < \chi_1^*$  состояние равновесия неустойчиво. Итак, численные расчеты динамической неустойчивости сводятся к нахождению величин  $U_\infty^*$ ;  $\chi_1^*$ .

Проводилось определение параметров начала динамической неустойчивости оболочек в потоке при значении параметров конструкции (23) и при  $\rho_\infty = 1,43 \text{ кг/м}^3$ . Расчеты проводились для оболочек со следующими значениями радиусов кривизны: 3, 4 и 5 м. Результаты расчета приведены в табл. 1. В первом столбце указаны номера мод собственных колебаний оболочки, которые учитываются в разложении (3). Во втором – представлены радиусы кривизны конструкции; в третьем – число степеней свободы динамической модели оболочки. В четвертом столбце показаны критические скорости потока, а в пятом – частоты колебаний при начале динамической неустойчивости. В этих расчетах частота автоколебаний  $\omega_*$  лежит между собственными частотами мод, учитываемых в разложении (3). Проводилась проверка полученных результатов с помощью теории газового течения вокруг колеблющейся пластинки Теодорсена [9]. Эта теория хорошо себя зарекомендовала в расчетах летательных аппаратов. Результаты таких расчетов представлены в шестом и седьмом столбцах таблицы. Относительная разница критических скоростей движения газа, полученных двумя методами, рассчитывалась так:  $\Delta = |U_\infty^* - U_\infty^{(T)}| / U_\infty^*$ .

Таблица 1. Значения критических параметров оболочек

Учитываемые моды	$R_1$ , м	$N_w$	$U_\infty^*$	$\omega_*$	$U_\infty^{(T)}$	$\omega^{(T)}$
10÷15	4	6	257,12	2571	–	–
10÷16		7	252,3	2616	–	–
9÷16		8	284,5	2528	313,7	2556,4
9÷17		9	284,5	2528,8	–	–
10÷17		8	247,6	2567,7	–	–
5÷13	5	9	275,6	2347,7	–	–
5÷14		10	270,58	2329,99	–	–
5÷15		11	259,6	2278,7	255,1	–
9÷17	3	9	214,6	2702,8	–	–
9÷18		10	224,4	2742	–	–
9÷19		11	224,35	2742	425,21	–

Теперь исследуем критические скорости потока, полученные с помощью гиперсингулярных уравнений,  $U_\infty^*$  и по приближенной теории Теодорсена. Анализируется зависимость кривизны конструкции  $\varepsilon$  от относительной разницы критических скоростей потока  $\Delta$ . Из этой таблицы следует, что чем меньше кривизна, то есть чем ближе оболочка к пластинки, тем ближе критические скорости, полученные по двум теориям. Итак, теория Теодорсена более точна при анализе пластин и пологих оболочек с малой кривизной. При увеличении кривизны оболочки критические скорости, полученные по теории Теодорсена, не точны.

**Таблица 2. Данные при разных кривизнах оболочек**

$\varepsilon$	$\Delta$	$U_\infty^*$
0,2	0,017	259,6
0,25	0,1	284,5
0,33	0,89	224,35

Теперь рассмотрим зависимость критических скоростей потока от кривизны оболочки. В статьях [6, 8] показано, что при увеличении жесткости пластинки критические скорости потока растут. Однако, как следует из табл. 2, для оболочек это утверждение не выполняется. При увеличении кривизны жесткость оболочки растет. Величина критической скорости потока ведет себя нелинейно при увеличении кривизны.

### Заключение

Для выбора форм колебаний, которые учитываются в разложениях перемещений, предлагается сравнивать частоту автоколебаний с собственными частотами учитываемых форм колебаний. Формы колебаний выбираются так, чтобы полусумма максимальной и минимальной частоты была как можно ближе к частоте автоколебаний.

В этой работе предложена система гиперсингулярных интегральных уравнений относительно аэродинамических производных перепада давлений. Эта система чрезвычайно удобна для описания поля давлений, действующих на колеблющуюся пологую оболочку.

Численно исследованы критические скорости потоков и критические частоты автоколебаний для пологих оболочек с разными радиусами кривизны. Результаты расчетов сравнивались с данными, полученными по приближенной теории Теодорсена. Из результатов этого сравнения сделан вывод, что чем меньше кривизна оболочки, то есть чем ближе оболочка к пластинке, тем ближе критические скорости, полученные по двум теориям.

Работа выполнена при поддержке Целевой комплексной программы НАН Украины по научным космическим исследованиям на 2012–2016 гг. в рамках договора «Расчетная оценка вибраций элементов аэрокосмических систем при силовых и аэродинамических нагружениях».

### Литература

1. *Friedmann, P. P.* Renaissance of aeroelasticity and its future / P. P. Friedmann // *J. Aircrafts*. – 2002. – Vol. 36. – P. 105–121.
2. Theoretical study of paper flutter / Y. Watanabe, K. Isogai, S. Suzuki, M. Sugihara // *J. Fluids and Structures*. – 2002. – Vol. 16. – P. 543–560.
3. *Dowell, E. H.* Modeling of fluid-structure interaction / E. H. Dowell, K. Hall // *Annual Review Fluid Mechanics*. – 2001. – Vol. 33. – P. 445–490.
4. *Вольмир, А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек / А. С. Вольмир. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
5. *Аврамов, К. В.* Нелинейная динамика упругих систем: В 2-х т. Т. 1. Модели, методы, явления / К. В. Аврамов, Ю. В. Михлин. – М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ин-т компьютер. исслед., 2010. – 704 с.
6. *Avramov, K. V.* Resonant many-mode periodic and chaotic self-sustained aeroelastic vibrations of cantilever plates with geometrical nonlinearities in incompressible flow / K. V. Avramov, E. A. Strel'nikova, C. Pierre // *Nonlinear Dynamics*. – 2012. – Vol. 70. – P. 1335–1354.
7. *Аврамов, К. В.* К аэроупругому взаимодействию пластин с трехмерным, безвихревым, идеальным газовым потоком / К. В. Аврамов // *Доп. НАН України*. – 2013. – № 9. – С. 57–63.
8. *Бифуркации* установившихся автоколебаний гибких пластин при взаимодействии с потенциальным газовым течением / К. В. Аврамов, Ю. В. Михлин, В. Н. Романенко, А. А. Киреевков // *Прикл. гидромеханика*. – 2014. – № 16. – С. 3–9.
9. *A modern course in aeroelasticity* / E. H. Dowell, H. C. Curtiss, R. H. Scanlan, F. Sisto. – New York: Kluwer Academic Publishers, 1995. – 876 p.

Поступила в редакцию 15.04.15