

9. Козюрин, С. В. Динамика и прочность рабочих колес со двояными листовыми лопатками осевых вентиляторов главного проветривания: Автореф дис. ... д-ра техн. наук / Козюрин Сергей Владимирович, – Новосибирск, 2004. – 125 с.
10. Мелехина, О. В. Проектирование и анализ нового шахтного вентилятора инструментом ANSYS Workbench [Электронный ресурс] / О. В. Мелехина, Г. С. Новаковский. – Режим доступа: или URb: <http://www.mining-media.ru/ru/article/newtech/118-proektirovanie-i-analiz-novogo-shakhtnogo-ventilyatora-instrumentom-ansys-workbench>. – 17.05.2011 г.
11. *Temperature, density, specific heat, thermal conductivity, expansion coefficient, kinematic viscosity and Prandtl's number for temperatures ranging –150–400 °C* [Электронный ресурс] – Режим доступа: или URb: [http://www.engineeringtoolbox.com/air-properties-d\\_156.html](http://www.engineeringtoolbox.com/air-properties-d_156.html).
12. Кубо, Р. Термодинамика / Р. Кубо. – М.: Мир, 1970. – 304 с.
13. Биргер, И. А. Прочность и устойчивость: В 2-х т. / И. А. Биргер, Я. Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1988. – Т. 1 – 831 с.
14. Серенсен, С. Динамическая прочность в машиностроении / С. Серенсен, И. Тетельбаум. – Л.: Гос. науч.-техн. изд. машиностроит. лит., 1940. – 376 с.
15. Бабаков, И. М. Теория колебаний / И. М. Бабаков. – М.: Дрофа, 2004. – 591 с.
16. Колесников, К. С. Вибрации в технике. Колебания машин, конструкций и их элементов / К. С. Колесников. – М.: Машиностроение, 1978. – 544 с.

*Поступила в редакцию 25.10.15*

**Р. У. Оруджева,**  
канд. физ.-мат. наук

Азербайджанский  
аграрный университет  
Азербайджан, г. Баку,  
e-mail: brrustam@mail.ru

УДК 539.375

## ЗАРОЖДЕНИЕ ТРЕЩИНЫ В ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ В НЕОДНОРОДНОМ НАПРЯЖЕННОМ ПОЛЕ

*Дається математичний опис розрахункової моделі зародження тріщини в ізотропному середовищі в неоднорідному напруженому полі. Використовується модель зони передруйнування зі зв'язками між берегами. Задача про рівновагу зони передруйнування (зони ослаблених міжчасткових зв'язків матеріалу) в ізотропному середовищі під дією неоднорідного напруженого поля зводиться до розв'язання системи двох інтегродиференціальних рівнянь. Інтегральні рівняння потім зводяться до системи нелінійних алгебраїчних рівнянь, яка розв'язується методом послідовних наближень. Сформульовано критерій зародження тріщини. Знайдено зусилля в зв'язках між берегами зони передруйнування, її розмір, граничні зовнішні навантаження, за яких в середовищі виникає тріщина.*

**Ключові слова:** *ізотропне середовище в неоднорідному напруженому полі, зона передруйнування зі зв'язками між берегами, сила зчеплення, зародження тріщини.*

### Введение

Разрушение реальных материалов является сложным процессом и для различных материалов протекает по-разному в зависимости от особенностей структуры материала, его химического состава, вида напряжения и прочих факторов. В настоящее время известно несколько механизмов трещинообразования [1–4]. Для практики исследования вопросов зарождения трещины в материалах и конструкциях имеет важное значение.

### Постановка задачи

Рассмотрим однородную изотропную среду. На бесконечности действуют напряжения, являющиеся полиномиальными функциями декартовых координат  $x$  и  $y$ . По мере нагружения среды силовой нагрузкой в ней будут возникать зона предразрушения, которую моделируем как область ослабленных межчастичных связей материала. Трещинообразование в среде под действием силовой нагрузки исследуется с помощью модели зоны предразрушения со связями между берегами [3]. Размеры зоны предразрушения заранее неизвестны и зависят от вида материала. Принято, что между берегами зоны предразрушения имеются связи (силы сцепления между частицами материала среды),

© Р. У. Оруджева, 2015

физическая природа которых также определяется типом материала. Межчастичные связи моделируют взаимодействие между берегами зоны предразрушения и имеют заданную диаграмму деформирования. Будем считать, что закон деформирования межчастичных связей задан. Отметим, что в общем случае он является нелинейным. Законы деформирования связей рассматривались в работах [5–8] для различных материалов.

Зона предразрушения мала по сравнению с остальной частью изотропной среды и её можно мысленно заменить разрезами, поверхности которых взаимодействуют по некоторому закону, соответствующему действию удаленного материала среды, где он деформируется за пределом упругости. Зона предразрушения считается ориентированной в направлении максимальных растягивающих напряжений, возникающих в среде под действием силовой нагрузки.

Пусть ось  $x$  системы координат  $Oxy$  совмещена с линией зоны предразрушения ( $a \leq x \leq b$ ) (рис. 1). Взаимодействие между берегами зоны предразрушения (связи между берегами) сдерживает зарождение трещины. Требуется найти напряженно-деформированное состояние изотропной среды и определить предельную нагрузку, при которой произойдет трещинообразование. При действии силовой нагрузки на изотропную среду в связях, соединяющих берега зоны предразрушения, будут возникать усилия  $q(x) = q_y(x) + iq_{xy}(x)$ . Величина напряжений  $q_y, q_{xy}$ , как и размер зоны предразрушения, заранее неизвестны и определяются в процессе решения задачи механики разрушения о зарождении трещины.

Граничное условие рассматриваемой задачи будет иметь вид

$$\sigma_y + i\tau_{xy} = q(x) \quad \text{при } y = 0, a \leq x \leq b. \quad (1)$$

Здесь напряжения являются полиномиальными функциями декартовых координат  $x$  и  $y$  на бесконечности.

В постановку рассматриваемой задачи механики разрушения о зарождении трещины в изотропной среде входит соотношение, связывающее усилия в связях и раскрытие берегов зоны предразрушения

$$(v_1^+ - v_1^-) - i(u_1^+ - iu_1^-) = \Pi(x, \sigma)[q_y(x) - iq_{xy}(x)], \quad (2)$$

где функция  $\Pi(x, \sigma)$  рассматривается как зависящая от натяжения связей их эффективная податливость;  $\sigma = \sqrt{q_y^2 + q_{xy}^2}$  – модуль вектора усилий в соответствующих связях;  $(v_1^+ - v_1^-)$  – нормальная,  $(u_1^+ - iu_1^-)$  – касательная составляющие раскрытия берегов зоны предразрушения.

Для определения значения внешней нагрузки, при которой происходит зарождение трещины, необходимо условие (критерий) появления трещины (разрыва межчастичных связей материала). В качестве такого условия можно взять критерий критического раскрытия берегов зоны предразрушения

$$\left| (v_1^+ - v_1^-) - i(u_1^+ - iu_1^-) \right| = \delta_c, \quad (3)$$

где  $\delta_c$  – характеристика сопротивления материала изотропной среды трещинообразованию.

### Метод решения задачи

С помощью принципа суперпозиции напряженное состояние в среде с зоной предразрушения со связями между берегами представим в виде суммы двух напряженных состояний

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_x^1, \quad \sigma_y = \sigma_y^0 + \sigma_y^1, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}^1, \quad (4)$$

где  $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$  – компоненты тензора напряжений в сплошной среде (без зоны предразрушения), при действии на бесконечности напряжений, являющихся полиномиальными функциями декартовых



координат  $x$  и  $y$ ;  $\sigma_x^1, \sigma_y^1, \tau_{xy}^1$  – компоненты тензора напряжений в среде с зоной предразрушения с исчезающими на бесконечности напряжениями.

Для компонент напряжений  $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$  имеем

$$\begin{aligned} \sigma_x^0 + \sigma_y^0 &= 2[\Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(z)}], & z &= x + iy, \\ \sigma_y^0 - \sigma_x^0 + 2i\tau_{xy}^0 &= \Phi_0(z) + \Omega_0(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_0'(z)}, \\ \Phi_0(z) &= A_0z^m + A_1z^{m-1} + A_2z^{m-2} + \dots + A_m, \\ \Psi_0(z) &= B_0z^m + B_1z^{m-1} + B_2z^{m-2} + \dots + B_m. \end{aligned} \quad (5)$$

Функции (5) в зависимости от значений коэффициентов  $A_j$  и  $B_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, m$ ) определяют напряженное состояние в изотропной среде без зоны предразрушения.

С учетом формул (4) краевое условие (1) запишем в виде

$$\sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 = q_y - iq_{xy} - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0), \quad y = 0, \quad a \leq x \leq b. \quad (6)$$

Напряжения  $\sigma_x^1, \sigma_y^1, \tau_{xy}^1$  и перемещения  $u_1, v_1$  выразим через две кусочно-аналитические функции комплексного переменного  $\Phi(z)$  и  $\Omega(z)$  [9]

$$\begin{aligned} \sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 &= \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \\ 2\mu \frac{\partial(u_1 + iv_1)}{\partial x} &= \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\mu$  – модуль сдвига материала;  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  для плоско-напряженного состояния,  $\kappa = 3 - 4\nu$  для плоской деформации;  $\nu$  – коэффициент Пуассона материала среды.

На основании краевого условия (6) приходим [9] к задаче линейного сопряжения с разрывными коэффициентами

$$\begin{aligned} [\Phi(t) + \Omega(t)]^+ + [\Phi(t) + \Omega(t)]^- &= 2f(t), \\ [\Phi(t) - \Omega(t)]^+ - [\Phi(t) - \Omega(t)]^- &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $t$  – аффикс точек контура зоны предразрушения;  $f(t) = q_y - iq_{xy} - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0)$  на  $a \leq t \leq b$ .

Напряжения в изотропной среде должны быть ограниченными, поэтому и решение краевой задачи (8) должно быть найдено в классе всюду ограниченных функций. Запишем его в виде

$$\Phi(z) = \Omega(z) = \frac{T(x)}{2\pi i} \int_a^b \frac{f(t) dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-z)}}. \quad (9)$$

При  $z \rightarrow \infty$   $T(x) = \sqrt{(z-a)(z-b)} = z + O(1/z)$ . Корень под знаком интеграла представляет собой значение ветви соответствующей функции, выделяемой приведенным условием на верхнем берегу зоны предразрушения. Из условия разрешимости краевой задачи (8) имеем два соотношения

$$\int_a^b \frac{f(t)}{T^+(t)} dt = 0, \quad \int_a^b \frac{tf(t)}{T^+(t)} dt = 0. \quad (10)$$

С помощью соотношений (10) определяем неизвестные величины  $a$  и  $b$ , характеризующие размер зоны предразрушения.

Неизвестные напряжения  $q_y(x)$  и  $q_{xy}(x)$  находятся из дополнительного соотношения (2). Используя полученное решение задачи, определяем раскрытие между противоположными берегами зоны предразрушения. С помощью второго соотношения (7) и граничных значений комплексных потенциалов на отрезке  $y = 0, a \leq x \leq b$ , получаем

$$\frac{2\mu}{1 + \kappa} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (u_1^+ - iu_1^-) + i \frac{\partial}{\partial x} (v_1^+ - v_1^-) \right] = \Phi^+(x) - \Phi^-(x).$$

Используя формулы Сохоцкого–Племеля [9], с учетом формулы (9) находим

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \frac{\sqrt{(x-a)(x-b)}}{\pi i} \int_a^b \frac{f(t)}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-x)}} dt.$$

Для определения усилий в связях получаем нелинейное сингулярное интегродифференциальное уравнение

$$-\frac{1+\kappa}{2\mu} \frac{\sqrt{(x-a)(x-b)}}{\pi} \int_a^b \frac{f(t)}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-x)}} dt = \frac{d}{dx} \Pi(x, \sigma) [q_y(x) + iq_{xy}(x)]. \quad (11)$$

Отделяя в (11) действительные и мнимые части, имеем систему нелинейных сингулярных интегродифференциальных уравнений относительно  $q_y(x)$  и  $q_{xy}(x)$

$$-\frac{1}{\pi} \sqrt{(x-a)(b-x)} \left[ \int_a^b \frac{q_y(t)}{\sqrt{(t-a)(b-t)(t-x)}} dt + f_y(x) \right] = \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{d}{dx} [\Pi(x, \sigma) q_y(x)]. \quad (12)$$

$$-\frac{1}{\pi} \sqrt{(x-a)(b-x)} \left[ \int_a^b \frac{q_{xy}(t)}{\sqrt{(t-a)(b-t)(t-x)}} dt + f_{xy}(x) \right] = \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{d}{dx} [\Pi(x, \sigma) q_{xy}(x)]. \quad (13)$$

Здесь  $f_y(x) = -\int_a^b \frac{\sigma_y^0}{\sqrt{(t-a)(b-t)(t-x)}} dt$ ,  $f_{xy}(x) = -\int_a^b \frac{\tau_{xy}^0}{\sqrt{(t-a)(b-t)(t-x)}} dt$ .

Перейдем к алгебраизации интегродифференциальных уравнений (12), (13) с дополнительными условиями (10). Сделаем замену переменных

$$t = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \tau, \quad x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \eta,$$

приводим все интервалы интегрирования в уравнениях (12), (13) и в дополнительных условиях (10) к одному интервалу  $[-1, 1]$ .

Левые части интегродифференциальных уравнений (12), (13) соответственно принимают вид

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \sqrt{1-\eta^2} \left[ \int_{-1}^1 \frac{q_y(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-\eta)} + f_y(\eta) \right], \\ & -\frac{1}{\pi} \sqrt{1-\eta^2} \left[ \int_{-1}^1 \frac{q_{xy}(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-\eta)} + f_{xy}(\eta) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Производную, входящую в правую часть уравнений (12), (13), заменяем для произвольного внутреннего узла конечно-разностной аппроксимацией

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [\Pi(x, \sigma) q_y(x)]_i &= \frac{C(x_{i+1}, \sigma(x_{i+1})) q_y(x_{i+1}) - C(x_{i-1}, \sigma(x_{i-1})) q_y(x_{i-1})}{2\Delta x}, \\ \frac{d}{dx} [\Pi(x, \sigma) q_{xy}(x)]_i &= \frac{C(x_{i+1}, \sigma(x_{i+1})) q_{xy}(x_{i+1}) - C(x_{i-1}, \sigma(x_{i-1})) q_{xy}(x_{i-1})}{2\Delta x}, \end{aligned} \quad (15)$$

учитывая при этом граничные условия при  $\eta_0 = \pm 1$ :  $q_y(a) = q_y(b) = 0$ ;  $q_{xy}(a) = q_{xy}(b) = 0$ , соответствующие условиям  $v^+(a,0) - v^-(a,0) = 0$ ;  $v^+(b,0) - v^-(b,0) = 0$ ;  $u^+(a,0) - u^-(a,0) = 0$ ;  $u^+(b,0) - u^-(b,0) = 0$ . Используя квадратурную формулу

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-\eta)} d\tau &= \frac{1}{M \sin \theta} \sum_{k=1}^M g_k \cos \theta_k \sum_{m=0}^{M-1} \sin m\theta, \\ \tau = \cos \theta, \quad \eta_m = \cos \theta_m, \quad \theta_m &= \frac{2m-1}{2M} \pi, \quad (m = 1, 2, \dots, M), \end{aligned}$$

заменяем конечными суммами интегралы в (14) и конечноразностными аппроксимациями (15) производные в правых частях уравнений (12) и (13). Приведенные выше формулы дают возможность каждое интегродифференциальное уравнение заменить системой алгебраических уравнений относительно приближенных значений искомой функции в узловых точках. В результате получаем

$$\begin{aligned} & \frac{2}{M} \left[ \sum_{v=1}^M q_{y,v} \sum_{k=0}^{M-1} \cos k\theta_k \sin k\theta_m \right] + \frac{1}{\pi} \sqrt{1-\eta_m^2} f_{y,m} = \\ & = -\frac{M(1+\kappa)}{4(b-a)\mu} \left[ C(x_{m+1}, \sigma(x_{m+1}))q_{y,m+1} - C(x_{m-1}, \sigma(x_{m-1}))q_{y,m-1} \right] \\ & \frac{2}{M} \left[ \sum_{v=1}^M q_{xy,v} \sum_{k=0}^{M-1} \cos k\theta_k \sin k\theta_m \right] + \frac{1}{\pi} \sqrt{1-\eta_m^2} f_{xy,m} = \\ & = -\frac{M(1+\kappa)}{4(b-a)\mu} \left[ C(x_{m+1}, \sigma(x_{m+1}))q_{xy,m+1} - C(x_{m-1}, \sigma(x_{m-1}))q_{xy,m-1} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

$(m = 1, 2, \dots, M).$

Принимая во внимание, что

$$2 \sum_{k=0}^{M-1} \cos k\theta_v \sin k\theta_m = \operatorname{ctg} \frac{\theta_m \mp \theta_v}{2},$$

алгебраические системы (16) приводим к виду

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^M A_{mv} q_{y,v} - \frac{1}{\pi} \sqrt{1-\eta_m^2} f_{y,m} &= \frac{(1+\kappa)M}{4(b-a)\mu} \left[ C(x_{m+1}, \sigma(x_{m+1}))q_{y,m+1} - C(x_{m-1}, \sigma(x_{m-1}))q_{y,m-1} \right] \\ \sum_{v=1}^M A_{mv} q_{xy,v} - \frac{1}{\pi} \sqrt{1-\eta_m^2} f_{xy,m} &= \frac{(1+\kappa)M}{4(b-a)\mu} \left[ C(x_{m+1}, \sigma(x_{m+1}))q_{xy,m+1} - C(x_{m-1}, \sigma(x_{m-1}))q_{xy,m-1} \right] \end{aligned}$$

где  $q_{y,v} = q_y(\tau_v)$ ;  $q_{xy,v} = q_{xy}(\tau_v)$ ;  $f_{y,m} = f_y(\tau_m)$ ;  $f_{xy,m} = f_{xy}(\tau_m)$ ;  $2x_{m+1} = (a+b) + (b-a)\eta_{m+1}$ ;  
 $A_{mv} = -\frac{1}{M} \operatorname{ctg} \frac{\theta_m \mp \theta_v}{2}$ , верхний знак берется, если число  $|m-v|$  нечетно и нижний, если оно четно.

Для алгебраизации уравнений для определения параметров  $a$  и  $b$  (условий разрешимости краевой задачи) используем замену переменных и квадратурную формулу Гаусса. В результате условия разрешимости задачи находим в виде

для интегрального уравнения (12)

$$\sum_{v=1}^M q_y(\tau_v) = -\sum_{v=1}^M \sigma_y^0(\tau_v), \quad \sum_{v=1}^M \tau_v q_y(\tau_v) = -\sum_{v=1}^M \tau_v \sigma_y^0(\tau_v);$$

для интегрального уравнения (13)

$$\sum_{v=1}^M q_{xy}(\tau_v) = -\sum_{v=1}^M \tau_{xy}^0(\tau_v), \quad \sum_{v=1}^M \tau_v q_{xy}(\tau_v) = -\sum_{v=1}^M \tau_v \tau_{xy}^0(\tau_v).$$

В итоге вместо каждого сингулярного интегродифференциального уравнения с соответствующими дополнительными уравнениями получаем  $M + 2$  алгебраических уравнений для определения напряжений  $q_y(x)$  и  $q_{xy}(x)$  в узловых точках и размеров зоны предразрушения.

На основе полученного решения условие появления трещины в изотропной среде запишется в виде

$$\Pi(x_*, \sigma(x_*))\sigma(x_*) = \delta_c,$$

где  $x_*$  – точка, в которой имеет место разрыв связей на берегах зоны предразрушения.

Поскольку размер зоны предразрушения является заранее неизвестной величиной, полученные системы уравнений оказываются нелинейными даже при линейно-упругих связях. Для их решения использовался в случае линейного закона деформирования связей метод последовательных приближений [10]. В случае нелинейного закона для определения усилий в зоне предразрушения также использовался алгоритм, подобный методу упругих решений [11]. Закон деформирования межчастичных связей полагался линейным при  $V \leq V_*$ . При  $V(x) > V_*$  выполняются последующие итерации и для них решается система уравнений в каждом приближении, причем эффективная податливость связей переменна вдоль зоны предразрушения и зависит от величины модуля вектора усилий в связях, полученного на предыдущем шаге расчета. Эффективной податливостью определяется подобно секущему модулю в методе переменных параметров упругости [12]. Процесс последовательных приближений заканчивается, когда полученные на двух последовательных шагах усилия в зоне предразрушения, мало отличаются. Алгебраическая система в каждом приближении решалась численно методом Гаусса с выбором главного элемента.

Совместное решение полученных уравнений и условия (3) позволяет при заданных характеристиках связей определить критическую величину внешней нагрузки и размер зоны предразрушения для состояния предельного равновесия, при которых происходит появление трещины. Выбирая многочлены (5) определенного вида, получим решение практических важных задач. Полагая в формулах (5)

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, & A_1 &= 0, & A_2 &= \frac{M}{4I}, & A_3 &= 0, \\ B_0 &= 0, & B_1 &= 0, & B_2 &= \frac{3M}{4I}, & B_3 &= 0, \end{aligned}$$

где  $I$  – момент инерции площади сечения полосы, можно увидеть, что в этом случае функции  $\Phi_0(z)$  и  $\Omega_0(z)$  дают решение задачи о чистом изгибе моментами  $M$  бесконечной полосы (балки) без полосы предразрушения.

При

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{q}{24I}, & A_1 &= 0, & A_2 &= \frac{q}{8I} \left( L^2 + \frac{2c^2}{5} \right), & A_3 &= -\frac{qc^3}{12I}, \\ B_0 &= \frac{7q}{24I}, & B_1 &= 0, & B_2 &= \frac{q}{8I} \left( 3L^2 - \frac{11c^2}{5} \right), & B_3 &= \frac{qc^3}{12I} \end{aligned}$$

функции (5) дают решение задачи об изгибе балки длиной  $2L$  без зоны предразрушения, когда балка нагружена равномерным давлением интенсивностью  $q$ . В этом случае принято, что балка свободно расположена на двух опорах, а опорные реакции определяются как касательные усилия, приложенные к торцам балки. Если же

$$A_0 = 0, \quad A_1 = -\frac{iQ}{8I}, \quad A_2 = -\frac{Q(2L-d)}{4I}, \quad A_3 = 0,$$

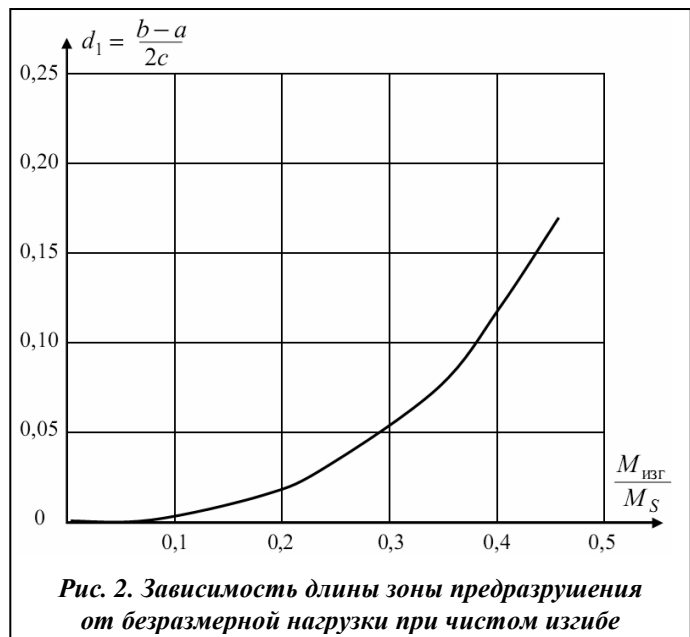
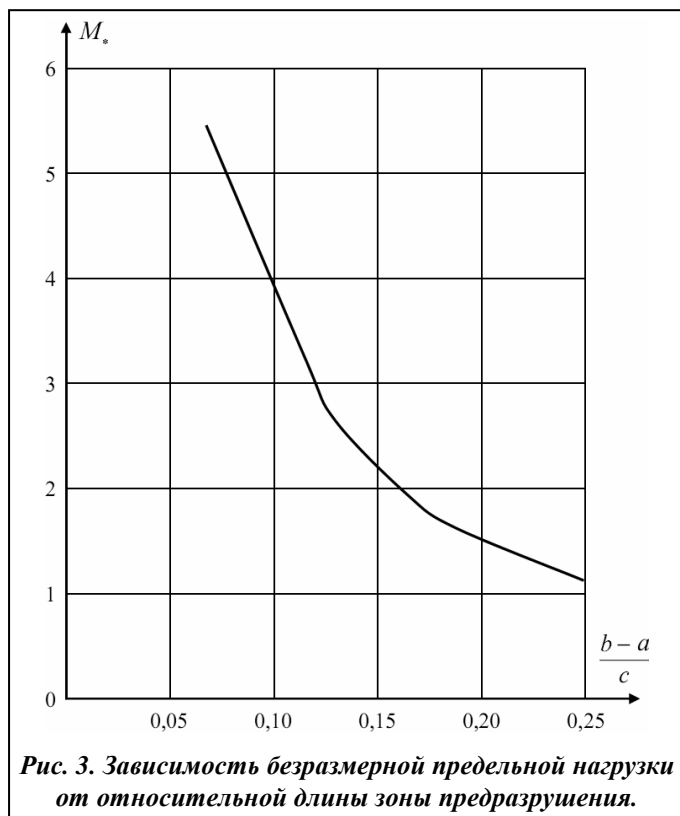


Рис. 2. Зависимость длины зоны предразрушения от безразмерной нагрузки при чистом изгибе



$$B_0 = 0, \quad B_1 = \frac{5iQ}{8I},$$

$$B_2 = -\frac{3Q(2L-d)}{4I}, \quad B_3 = -\frac{iQc^2}{2I},$$

то функции (5) дают решение задачи об изгибе жестко заземленной консольной балки без зоны предразрушения под действием постоянной поперечной силы  $Q$ , приложенной на ее свободном конце.

На рис. 2 представлена зависимость длины зоны предразрушения от безразмерной нагрузки  $M_{изг}/M_S$  при чистом изгибе. В расчетах принималось  $\nu = 0,3$ ;  $M = 30$ . На рис. 3 показана зависимость безразмерной предельной

нагрузки  $M_c = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{M_{изг}}{h\sqrt{c^3}} \frac{1}{\sqrt{E\sigma_s\delta_c}}$  от относительной длины зоны предразрушения  $(b-a)/c$ , где  $\sigma_s$  – предел текучести материала среды на растяжение,  $M_S = \sigma_s h^2/4$ .

#### Заключение

Анализ предельно-равновесного состояния изотропной среды, при котором появляется трещина, сводится к параметрическому исследованию полученных алгебраических систем и критерия появления трещины при различных законах деформирования связей, упругих постоянных материала и геометрических характеристиках среды. Непосредственно из решения полученных алгебраических систем определяются усилия в связях и раскрытие берегов зоны предразрушения.

#### Литература

1. Левин, В. А. Избранные нелинейные задачи механики разрушения / В. А. Левин, Е. М. Морозов, Ю. Г. Матвиенко. – М.: Физматлит. 2004. – 408 с.
2. Мирсалимов, В. М. Зарождение дефекта типа трещины во втулке контактной пары / В. М. Мирсалимов // Мат. моделирование. – 2005. – Т. 17, № 2. – С. 35–45.
3. Мирсалимов, В. М. К решению задачи механики контактного разрушения о зарождении и развитии трещины со связями между берегами во втулке фрикционной пары / В. М. Мирсалимов // Прикл. математика и механика. – 2007. – Т. 71, Вып. 1. – С. 132–151.
4. Панасюк, В. В. Механика квазихрупкого разрушения материалов / В. В. Панасюк. – Киев: Наукова думка, 1991. – 416 с.
5. Гольдштейн, Р. В. Моделирование трещиностойкости композиционных материалов / Р. В. Гольдштейн, М. Н. Перельмутер // Вычисл. механика сплош. сред. – 2009. – Т. 2, № 2. – С. 22–39.
6. Cox, B. N. Concepts for bridged cracks fracture and fatigue / B. N. Cox, D. B. Marshall // Acta Met. Mater. – 1994. – Vol. 42, № 2. – P. 341–363.
7. Ji, H. Adhesion via connector molecules: The many-stitch problem / H. Ji, P. G. de Gennes // Macromolecules. – 1993. – Vol. 26. – P. 520–525.
8. The special issue: Cohesive models // Eng. Fract. Mech. – 2003. – Vol. 70, № 14. – P. 1741–1987.
9. Мухелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
10. Мирсалимов, В. М. Неоднородные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов – М.: Наука, 1987. – 256 с.
11. Ильюшин, А. А. Пластичность / А. А. Ильюшин – М.: Логос, 2003. – 376 с.
12. Биргер, И. А. Общие алгоритмы решения задач теорий упругости, пластичности и ползучести / И. А. Биргер. Успехи механики деформируемых сред. – М.: Наука, 1975. – С. 51–73.

Поступила в редакцию 24.09.15