

УДК 536.5.08

Д. Ф. Симбирский\*, д-р техн. наук

С. В. Епифанов\*, д-р техн. наук

Г. Д. Симбирский\*\*, канд. техн. наук

\* Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»  
(e-mail: aedlab@gmail.com)\*\* Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет  
(e-mail: simgn27@ukr.net)

## ТОЧНОСТЬ И ПЛАНИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТАХ.

### Часть 2. Планирование параметрической идентификации теплопереноса

*Изложена методология планирования параметрической идентификации теплопереноса. Планируются этапы постановки соответствующих обратных задач теплопроводности и получения необходимой экспериментальной информации. Как целевые функции планирования используются совместные доверительные области и интервалы априорных оценок искомых параметров.*

*Викладено методологію планування параметричної ідентифікації теплопереносу. Плануються етапи постановки відповідних обернених задач теплопровідності та одержання необхідної експериментальної інформації. Як цільові функції планування використовуються сумісні довірчі області та інтервали априорних оцінок шуканих параметрів.*

### 1. Постановка задач исследования

В [1] изложена методология *апостериорного* (после проведения экспериментов и решения обратной задачи теплопроводности (ОЗТ)) определения погрешностей оценок  $\hat{\Theta}$  вектора идентифицируемых параметров теплопереноса  $\Theta = [\theta_j]_{j=1}^r$ , сформированного в рамках математической модели (далее – модели) теплопереноса в техническом объекте (ТО). В качестве показателей погрешности предложены *совместные доверительные области (СДО)* оценок, применяемые при анализе явлений статистическими методами [2], а также *совместные доверительные интервалы (СДИ)* оценок, введенные в работах [3–5]. При этом в качестве исходной информации используются измеряемые в  $k$ -е дискретные моменты времени  $\tau_k = k\Delta t$   $i$ -е температуры  $t_{ik}$  в  $m$  точках ТО, образующие *( $m \times 1$ )-вектор измерения*

$$Y_k = [y_{ik}]_{i=1}^m = C T_k + \varepsilon_k, \quad (1)$$

где  $T_k = [t_{zk}]_{z=1}^l$  – ( $l \times 1$ )-вектор температурного состояния ТО;  $C$  – ( $m \times n$ )-матрица измерений;  $\varepsilon_k$  – ( $m \times 1$ )-вектор случайных погрешностей (шумов) в измерениях;  $k = 1, 2, \dots, n$ ;  $i = 1, 2, \dots, m$  и  $z = 1, 2, \dots, l$ .

В [1] предполагается, что существует адекватная реальному теплопереносу в ТО модель, позволяющая рассчитывать вектор температурного состояния  $T_k$  и, в соответствии с (1) при  $\varepsilon = 0$ , прогноз (модельное значение) вектора измерений  $\hat{Y}_k(\Theta)$ . Показано, что для построения СДО и СДИ используются функции чувствительности  $u_{ijk}$  измеряемых  $i$ -х температур ТО  $y_{ik}$  к  $j$ -м искомым параметрам  $\theta_j$  в  $k$ -е моменты времени  $\tau_k$ .

Так как  $u_{ijk}$  зависят от всех *значимых факторов* процесса параметрической идентификации теплопереноса в ТО, то методология [1] может быть использована для решения актуальной проблемы *оптимального планирования* этого процесса, подход к которому был заложен в работах [5–7].

Отсюда *задачами второй части публикации являются*:

- 1) изложить вопросы использования СДО и СДИ для решения проблемы планирования параметрической идентификации теплопереноса в ТО;
- 2) в качестве иллюстрации выполнить планирование параметрической идентификации теплопереноса в одномерных градиентных приемниках (измерителях) плотности тепловых потоков.

## 2. СДО и СДИ апостериорных оценок искомых параметров

2.1. В [1] приведены основные положения *метода параметрической идентификации теплопереноса*, необходимые для получения СДО и СДИ апостериорных оценок  $\hat{\Theta}$ . Показано, что в линейном случае параметрическая идентификация аналогична хорошо изученному в математической и технической литературе *обобщенному методу наименьших квадратов (МНК)* [2]. Это позволяет воспользоваться известными решениями для *оптимальных оценок  $\hat{\Theta}$  и ковариационной ( $r \times r$ )-матрицы  $\mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1}$*  ошибок этих оценок, где  $\mathbf{A}$  – матрица Грама функций чувствительности  $u_{ijk}$ , рассчитанная для значений  $\hat{\Theta}$  [1] и имеющая вид

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{ccc} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m u_{i1k}^2 & \dots & \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m u_{i1k} u_{irk} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m u_{irk} u_{i1k} & \dots & \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m u_{irk}^2 \end{array} \right]_{\Theta=\hat{\Theta}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Обратную матрицу Грама  $\mathbf{A}^{-1}$ , которую можно получить из (2) с помощью стандартных вычислительных процедур, будем записывать в виде

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^* & \dots & a_{r1}^* \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1}^* & \dots & a_{rr}^* \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Прямая  $\mathbf{A}$  и обратная  $\mathbf{A}^{-1}$  матрицы Грама являются основой для построения СДО и СДИ.

2.2. Как показано в [1, 2], *СДО полученных оценок  $\hat{\Theta}$  представляет собою квадратичную форму*

$$(\Theta_0 - \hat{\Theta})^T \mathbf{A} (\Theta_0 - \hat{\Theta}) = \sigma^2 B \quad (4)$$

*в пространстве  $\Theta$ , описывающую  $r$ -мерный эллипсоид с центром в  $\hat{\Theta}$ , который с доверительной вероятностью  $\nu$  включает истинные значения  $\Theta_0$  вектора  $\Theta$ .* Здесь  $B = rF_\nu(r, n - r)$ , где  $F_\nu(r, n - r)$  – табличные значения квантиля распределения Фишера для  $r$  параметров и  $n$  измерений на участке оценивания.

В [1] приведены зависимости для СДО и СДИ. На наглядном примере *случая двух искомых параметров ( $r = 2$ )* рассмотрено взаимное расположение эллипса СДО и описанного вокруг него прямоугольника, образованного двумя парами граничных значений СДИ. Показано, что СДИ сравнительно с СДО являются приближенными и более консервативными показателями погрешностей апостериорных оценок  $\hat{\Theta}$ : с большей площадью (в случае  $r \geq 2$  – объемом) их рассеивания.

### 3. Планирование параметрической идентификации теплопереноса

**3.1.** Так как СДО и СДИ зависят от всех *значимых факторов* процесса параметрической идентификации теплопереноса в ТО, то приведенная в [1] методология может быть преобразована для *априорных* (до приведения экспериментов и решения ОЗТ) исследований влияния этих факторов, т. е. для оптимального или, по крайней мере, рационального *планирования* параметрической идентификации.

Основными *значимыми факторами* являются [5, 6–9]:

- структура (состав) вектора искомых параметров  $\Theta$ ;
- структура вектора измерений  $Y$ : расположение и количество  $t$  измеряемых температур ТО;
- количество моментов времени  $n$  регистрации  $Y_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ );
- уровень шума в измерениях, в частности, его дисперсия  $\sigma^2$  и другие.

В качестве *целевой функции планирования* предлагается использовать СДО и (или) СДИ априорных оценок, зависящие от рассматриваемых *планов – наборов значимых факторов и их количественных показателей*.

**3.2.** При планировании, как показано в монографии [2], *СДО априорных оценок представляет собой  $r$ -мерный эллипсоид (4) в пространстве  $\Theta$  с центром в  $\Theta_0$ , в который с доверительной вероятностью  $\nu$  попадают планируемые априорные оценки  $\hat{\Theta}$  вектора  $\Theta$*

$$(\hat{\Theta} - \Theta_0)^T A (\hat{\Theta} - \Theta_0) = \sigma^2 \chi_\nu^2(r), \quad (5)$$

где  $A$  – матрица Грама функций чувствительности, рассчитанная по формуле (2), но для значений  $\Theta = \Theta_0$  на участке наблюдения  $n\Delta t$ , содержащим  $n$  измерений  $Y_k$ ;  $\Theta_0$  и  $\hat{\Theta}$  – заданное «истинное» и априорное (планируемое) значения вектора искомых параметров;  $\chi_\nu^2(r)$  – квантиль  $\chi^2$ -распределения для  $r$  искомых параметров при доверительной вероятности  $\nu$ .

В наглядном *случае двух оцениваемых параметров* ( $r = 2$ ), обозначив

$$\Theta_0 - \hat{\Theta} = [\Delta\hat{\theta}_1 \quad \Delta\hat{\theta}_2]^T,$$

где  $\Delta\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1 - \theta_{1,0}$  и  $\Delta\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2 - \theta_{2,0}$ , получим из (5) следующие два уравнения (аналогичные полученным в [1] для апостериорных оценок), которые позволяют построить *эллипс СДО в пространстве  $\Delta\hat{\theta}_1$  и  $\Delta\hat{\theta}_2$*  с центром в точке  $\Delta\hat{\theta}_1 = \Delta\hat{\theta}_2 = 0$ :

$$(\Delta\hat{\theta}_1)_{1,2} = \frac{-a_{12}\Delta\hat{\theta}_2 \pm \sqrt{a_{12}(\Delta\hat{\theta}_2)^2 - a_{11}[a_{22}(\Delta\hat{\theta}_2)^2 - \sigma^2\chi_\nu^2(r)]}}{a_{11}}, \quad (6)$$

$$(\Delta\hat{\theta}_2)_{1,2} = \frac{-a_{12}\Delta\hat{\theta}_1 \pm \sqrt{a_{12}(\Delta\hat{\theta}_1)^2 - a_{22}[a_{11}(\Delta\hat{\theta}_1)^2 - \sigma^2\chi_\nu^2(r)]}}{a_{22}}. \quad (7)$$

**3.3.** При *большой размерности вектора  $\Theta$*  ( $r > 2$ ) использование СДО в форме (4) сопряжено со значительными трудностями канонического анализа его особенностей. Поэтому в [3–5] было предложено в качестве целевой функции использовать *СДИ для каждого  $j$ -го искомого параметра  $\theta_j$*  ( $j = 1, 2, \dots, r$ ) как *проекцию СДО на соответствующую  $j$ -ю координатную ось  $r$ -мерного пространства  $\theta_j$* . Как показано в [1], это эквивалентно замене гиперэллипсоида СДО (5) на описанный вокруг нее гиперпараболоид.

В рассмотренном выше *случае  $r=2$*  для построения описанной вокруг эллипса СДО прямоугольной области СДИ из уравнений (6) и (7) необходимо найти две пары *граничных значений* (далее – границ)  $\pm\Delta\theta_1^*$  и  $\pm\Delta\theta_2^*$  соответственно для вертикальных и горизонтальных СДИ способом, аналогичным использованному в [1], в виде следующих зависимостей:

$$\Delta\theta_1^* = \pm\sigma\sqrt{\frac{a_{22}B}{\det A}}; \quad (8)$$

$$\Delta\theta_2^* = \pm\sigma\sqrt{\frac{a_{11}B}{\det A}}, \quad (9)$$

в которых  $a_{11}$  и  $a_{22}$  являются элементами матрицы Грама, а  $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$  – ее определителем.

В [3–4] для обратных задач диагностики авиадвигателей, а в [5] для ОЗТ было предложено несколько способов определения границ СДИ  $\Delta\theta_j^*$  априорных оценок искомых параметров. Из них, по нашему мнению, для ОЗТ следует рекомендовать полученную в [5] следующую зависимость для границ СДИ, использующую диагональные элементы  $a_{jj}^*$  обратной матрицы Грама (3):

$$\Delta\theta_j^* = \pm\sigma\sqrt{a_{jj}^*\chi_v^2(r)} = \pm\sigma\chi_v(r)\sqrt{a_{jj}^*}. \quad (10)$$

Как указано в [1], учитывая возможную значительную разновеликость величин  $\theta_j$ , целесообразно рассматривать относительные априорные оценки параметров  $\theta_j^* = \theta_j / \theta_{j,0}$ , а зависимость (10) представить для **относительных  $\delta\theta_j^*$  границ СДИ** в следующем виде:

$$\delta\theta_j^* = \pm\frac{\Delta\theta_j^*}{\hat{\theta}_j} = \pm\frac{\sigma\chi_v(r)}{\hat{\theta}_j}\sqrt{a_{jj}^*}. \quad (11)$$

**3.4.** В целом, предлагается следующий **механизм планирования**: полученные по зависимостям (10) или (11) **величины границ СДИ для рассматриваемого плана сравниваются с их допустимыми значениями**. При отрицательном результате сравнения исследуемый план отвергается и заменяется новым с определением для него новых границ СДИ. Так продолжается до получения положительного результата этих сравнений.

В работах [2–5] показано, что подобная процедура планирования, несмотря на приближенность (СДИ вместо СДО), для линейных ОЗ и ОЗТ является, по крайней мере, рациональной.

**3.5.** Для **нелинейных ОЗТ** в монографии [2] предложен, а в [1] рекомендуется подход к построению **приближенных СДО и СДИ апостериорных оценок искомых параметров**. В его основу положено допущение, что существует метод получения МНК оценок  $\hat{\Theta}$ , близких их “истинному” значению  $\Theta_0$ . Это допущение должно быть подтверждено, по крайней мере, путем имитационного моделирования решений тестовых ОЗ и ОЗТ указанным методом.

При подтвержденной близости  $\hat{\Theta}$  к  $\Theta_0$  приближенные СДО и СДИ оценок  $\hat{\Theta}$  могут быть получены путем линеаризации рассчитываемого по модели теплопереноса прогноза вектора измерения  $\hat{Y}_k(\Theta)$ , входящего в функцию невязки МНК. Тогда для случая ОЗТ в [1] допускается, что в линеаризованной вблизи  $\hat{\Theta}$  области матрица Грама  $A$  может быть определена по зависимостям (2) и (3) для значений  $\Theta = \hat{\Theta}$ , а приближенные СДО и СДИ – по приведенным в [1] зависимостям для линейных ОЗТ.

Аналогичный подход предлагается нами для **приближенного планирования параметрической идентификации в нелинейных ОЗТ**. Предметно он заключается в применении описанной выше методологии планирования линейных ОЗТ, в которой расчет матрицы Грама по зависимости (2) выполняется для значений  $\Theta = \Theta_0$ .

Отметим, что справедливость и эффективность такого подхода подтверждены на практике в работах [3–5], где в большинстве случаев рассматриваются нелинейные ОЗТ и ОЗ диагностики.

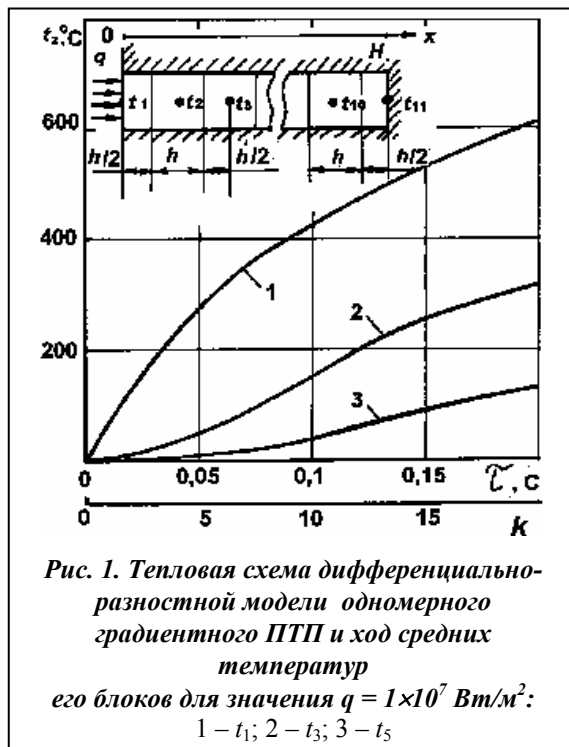


Рис. 1. Тепловая схема дифференциально-разностной модели одномерного градиентного ПТП и ход средних температур его блоков для значения  $q = 1 \times 10^7 \text{ Вт/м}^2$ : 1 –  $t_1$ ; 2 –  $t_3$ ; 3 –  $t_5$

представляют собой теплоизолированный с трех сторон стержень ограниченной длины  $H$  (рис. 1). Через рабочий торец ( $x = 0$ ) в ПТП входит тепловой поток  $q$ , тыльный торец ( $x = H$ ) полагаем теплоизолированным. Ход температур в одной или нескольких точках по длине ПТП или их перепадов измеряется и служит основанием для решения *граничных ОЗТ – определения (восстановления) значений плотности входящих в ПТП тепловых потоков*. Рассматриваются случаи либо переменного  $q = q(\tau)$ , либо постоянного  $q = \text{const}$ , но на начальном участке переходного процесса – *динамический метод измерения постоянных тепловых потоков*.

В качестве *модели теплопереноса* в ПТП будем использовать удобную в одномерных случаях дифференциально-разностную модель (ДРМ) [6, 8], тепловая схема которой приведена на рис. 1. В принципе, возможно применение любых моделей теплопереноса и алгоритмов их решения.

Температуры блоков в  $k$ -е моменты времени составляют  $(l \times 1)$ -*вектор температурного состояния ПТП*

$$T_k = [t_{1k} \quad t_{2k} \quad \dots \quad t_{lk}]^T.$$

Часть ( $m$ ) его составляющих измеряется в эксперименте, образуя в соответствии с (1)  $(m \times 1)$ -*вектор измерений*  $Y_k$ . Прогноз (аналог)  $\hat{Y}_k(\Theta)$  вектора  $Y_k$  рассчитывается по ДРМ ПТП в функции от искомым параметров  $\Theta$  (при  $\varepsilon = 0$ ).

**4.1.2. Постановке ОЗТ** предшествует *ее параметризация* – выделение в модели теплопереноса ПТП  $(r \times 1)$ -вектора искомым параметров  $\Theta = \text{const}$ . Будем рассматривать две разновидности граничной *ОЗТ*, а именно:

1. **В случае  $q = \text{const}$  (ОЗТ-1)** параметризация осуществляется естественным образом в виде  $\Theta_1 = [q] = \text{const}$ .

2. **В более общем случае  $q = q(\tau)$  (ОЗТ-2)** для параметризации воспользуемся кусочно-линейной аппроксимацией функции  $q(\tau)$  на последовательных участках аппроксимации равной продолжительности  $\Delta = n\Delta\tau$ , которые содержат по  $n$  дискретных (с шагом  $\Delta\tau$ ) значений вектора измерений  $\bar{Y}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). На каждом участке текущие значения теплового

Таким образом, выше изложена методология планирования параметрической идентификации теплопереноса в ТО на основе использования в качестве целевых функций таких метрологических обоснованных показателей точности, как СДО и (или) СДИ априорных (планируемых) оценок искомым параметров.

В порядке иллюстрации ниже будут рассмотрены несколько актуальных задач планирования параметрической идентификации теплопереноса.

#### 4. Планирование параметрической идентификации теплопереноса в приемниках плотности тепловых потоков

##### 4.1. Постановка ОЗТ

**4.1.1.** Будем рассматривать теплоперенос в одномерных градиентных приемниках (датчиках) плотности тепловых потоков (ПТП). Они обычно размещаются внутри ТО заподлицо с исследуемой поверхностью его теплообмена с окружающей средой и пред-

потока  $q_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), изменяющегося по линейному закону, можно представить следующей функцией левого  $q_{\text{л}}$  и правого  $q_{\text{пр}}$  его значений на границах участка  $\Delta$ :

$$q_k = q_{\text{л}} + k \frac{q_{\text{пр}} - q_{\text{л}}}{n}. \quad (12)$$

Таким образом, в этом случае  $(2 \times 1)$ -вектор искомых параметров на первом и всех последующих участках имеет вид  $\Theta_2 = [q_{\text{л}} \quad q_{\text{пр}}]^T = \text{const}$ .

**4.1.3.** Кроме рассмотренных двух граничных ОЗТ может возникнуть задача определения или уточнения теплофизических характеристик (ТФХ) материала, в частности теплопроводности  $\lambda$ . Это приводит к целесообразности постановки еще **двух параметризованных комбинированных (гранично-коэффициентных) ОЗТ** с векторами искомых параметров  $\Theta_3 = [q \quad \lambda]^T$  (ОЗТ-3) и  $\Theta_4 = [q_{\text{л}} \quad q_{\text{пр}} \quad \lambda]^T$  (ОЗТ-4).

Таким образом, планированию будут подлежать четыре ОЗТ, представляемые приведенными выше векторами искомых параметров  $\Theta_1$ – $\Theta_4$ .

#### 4.2. Исходные данные и условия планирования

**4.2.1.** Для планирования были приняты следующие **исходные данные**:

1. **Характеристики ПТП**: длина  $H = 4 \cdot 10^{-3}$  м, материал – жаропрочный сплав со следующими ТФХ: плотность  $\rho = 7,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>; теплопроводность  $\lambda = 20$  Вт/м·град; удельная теплоемкость  $C = 0,43$  кДж/кгК; температуропроводность  $a = 5,9 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с. Начальное условие  $T_0 = 273$  К.

2. **В качестве модели температурного состояния ПТП** используется ДРМ, описанная в 4.1.1 и состоящая из  $l = 11$  блоков. На рис. 1 приведен полученный с помощью ДРМ ход температур  $t_1$ ,  $t_3$  и  $t_5$  блоков 1, 3 и 5 для случая  $q_0 = q_{\text{л}0} = 1 \cdot 10^7$  Вт/м<sup>2</sup>. Шаг  $\Delta t$  дискретизации времени здесь и далее составляет 0,01 с.

3. **Заданные (“истинные”) значения** оцениваемых параметров, входящих в состав векторов  $\Theta_1$ – $\Theta_4$ , составляют:  $q_0 = q_{\text{л}0} = 1 \cdot 10^7$  Вт/м<sup>2</sup>;  $q_{\text{пр}0} = 1,8 \cdot 10^7$  Вт/м<sup>2</sup> и  $\lambda_0 = 20$  Вт/м·град.

**4.2.2.** При планировании учитывались следующие **условия**:

1. **В качестве значимых факторов или факторов планирования** рассматриваются следующие:

а) **структура (состав) вектора измерений  $Y_k$** , в частности планы с одиночными измерениями температур  $t_1$ ,  $t_3$  или  $t_5$ , а также планы с одновременными измерениями двух температур внутренних блоков  $t_3$  и  $t_5$  (для ОЗТ-3).

б) **величина дисперсии  $\sigma^2$  шума в измерениях**, характеризующая особенности регистрации измеряемых температур.

в) **количество  $n$**  (5, 10 или 20) значений вектора измерений  $Y_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), используемых для получения решений ОЗТ на каждом участке  $\Delta$ , так как для ОЗТ-1 и ОЗТ-2 выбор  $n$  является принципиально важным, определяя быстрдействие динамического метода измерения теплового потока  $q = \text{const}$ . Для ОЗТ-3 и ОЗТ-4 выбор  $n$  также является весьма важным, определяя оптимальную величину  $\Delta = n\Delta t$  участков кусочно-линейной аппроксимации функции  $q(\tau)$ : с одной стороны, увеличение  $n$  способствует успешному решению ОЗТ, с другой – приводит к ухудшению качества аппроксимации функции  $q(\tau)$ .

г) к факторам планирования целесообразно отнести также **состав вектора  $\hat{\Theta}$**  искомых параметров.

2. **В качестве показателя точности оценок** для рассматриваемых планов используются априорные относительные границы СДИ (11). Их величины сравниваются с допустимыми разбросами искомых параметров.

3. Планирование для ОЗТ-3 и ОЗТ-4 выполняется **для первого участка  $\Delta$** , предполагая возможность переноса его результатов на последующие участки.



### 4.3. Выполнение планирования

Были выполнены следующие *этапы планирования*:

**4.3.1. Численным дифференцированием с использованием ДРМ ПТП были рассчитаны функции чувствительности  $u_{zjk}$   $z$ -х измеряемых температур ( $z = 1, 3$  или  $5$ ) к  $j$ -м искомым параметрам ( $j = 1, 2, \dots, r$ ) в  $k$ -е моменты времени ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) для приведенных в разделе 4.2.1 «истинных» значений искомых параметров. При этом для каждой  $u_{zjk}$  предварительно выбирались величины приращения  $\Delta\theta_j$ , которые, как правило, не превышали  $\pm 0,05\theta_{j0}$ .**

Для ОЗТ–3 и ОЗТ–4 в ДРМ подставлялись текущие значения теплового потока  $q_k$ , определяемые по формуле (12). На рис. 2 приведены функции чувствительности температур  $t_1, t_3$  и  $t_5$  к изменению параметров  $q, q_{л}, q_{пр}$  и  $\lambda$  в  $k$ -е моменты времени.

**4.3.2.** Для каждой ОЗТ по полученным значениям функций чувствительности для  $n = 5, 10$  и  $20$  по формуле (2) было рассчитано по девять прямых **матриц Грама А** и затем по девять обратных матриц  $A^{-1}$  для каждого из девяти вариантов (планов) – по три варианта  $n$  для трех параметров  $q_0, q_{л0}, q_{пр0}$  и  $\lambda_0$ .

Кроме того, для ОЗТ–3 дополнительно были построены по два варианта матриц **А** и  $A^{-1}$  для плана с одновременным измерением температур  $t_3$  и  $t_5$  для  $n = 10$  и  $n = 20$ .

**4.3.3. Относительные СДИ  $\delta\theta_j^*$  оценок** определялись по формулам (8, 9, 11) для дисперсии  $\sigma^2 = 1$ . Их значения (в %) по каждой ОЗТ сведены в таблицу. При необходимости они могут быть пересчитаны на любые другие значения  $\sigma^2$ .

На рис. 3 для некоторых планов эксперимента приведены СДИ, образованные двумя парами значений их относительных границ, а для одного из планов приведена относительная эллиптическая СДО.

### 4.4. Обсуждение результатов

По результатам планирования можно сформулировать следующие основные выводы.

**4.4.1. При идентификации постоянного теплового потока  $q = \text{const}$  (ОЗТ–1 и ОЗТ–3)** для повышения быстродействия измерений (минимум  $n$ ) желательно измерять температуру  $t_1$ . Заглубление точки измерения (например измерение  $t_3$ ) приводит к существенному увеличению  $\delta\theta_j^*$ , особенно при одновременной идентификации  $\lambda$  (ОЗТ–3). Так, использование  $t_3$  представляется допустимым только при значительном увеличении числа измерений до  $n = 20$ , что существенно снижает быстродействие динамического метода. Использование  $t_5$  для большинства планов приводит к значительной погрешности – фактической неустойчивости решения ОЗТ – и является нецелесообразным.

Сводные результаты планирования параметрической идентификации при решениях рассматриваемых ОЗТ (при  $\sigma^2 = 1$ )

Вариант ОЗТ	Вектор искомым параметров	№№ блоков измерения температур	Границы относительных СДИ $\delta\theta_j^*$ , %								
			$\pm \delta q^* = \pm \delta q_{\lambda}^*$			$\pm \delta q_{\text{пр}}^*$			$\pm \delta \lambda^*$		
			Количество измерений, $n$			Количество измерений, $n$			Количество измерений, $n$		
			5	10	20	5	10	20	5	10	20
ОЗТ-1	$\Theta = [q]$	1	0,39	0,20	0,10	–	–	–	–	–	–
		3	2,67	0,75	0,25	–	–	–	–	–	–
		5	60,20	3,77	0,71	–	–	–	–	–	–
ОЗТ-2	$\Theta = \begin{bmatrix} q_{\lambda} \\ q_{\text{пр}} \end{bmatrix}$	1	1,16	0,67	0,36	6,66	1,74	0,44	–	–	–
		3	3,50	3,53	1,12	34,0	13,2	1,78	–	–	–
		5	192,0	30,0	4,40	3130	157	9,12	–	–	–
ОЗТ-3	$\Theta = \begin{bmatrix} q \\ \lambda \end{bmatrix}$	1	4,60	0,37	0,32	–	–	–	11,1	8,27	6,90
		3	15,80	2,00	0,32	–	–	–	25,2	7,00	2,80
		5	60,0	3,10	0,35	–	–	–	287	25,0	5,25
		3 и 5	–	0,83	0,16	–	–	–	–	5,10	2,30
ОЗТ-4	$\Theta = \begin{bmatrix} q_{\lambda} \\ q_{\text{пр}} \\ \lambda \end{bmatrix}$	1	7,54	0,78	0,32	16,8	2,00	0,68	22,3	0,44	0,38
		3	192,7	32,6	3,80	883	32,6	5,50	158	59,9	8,40
		5	1150	530	200,2	5245	1114	187	426	236	133

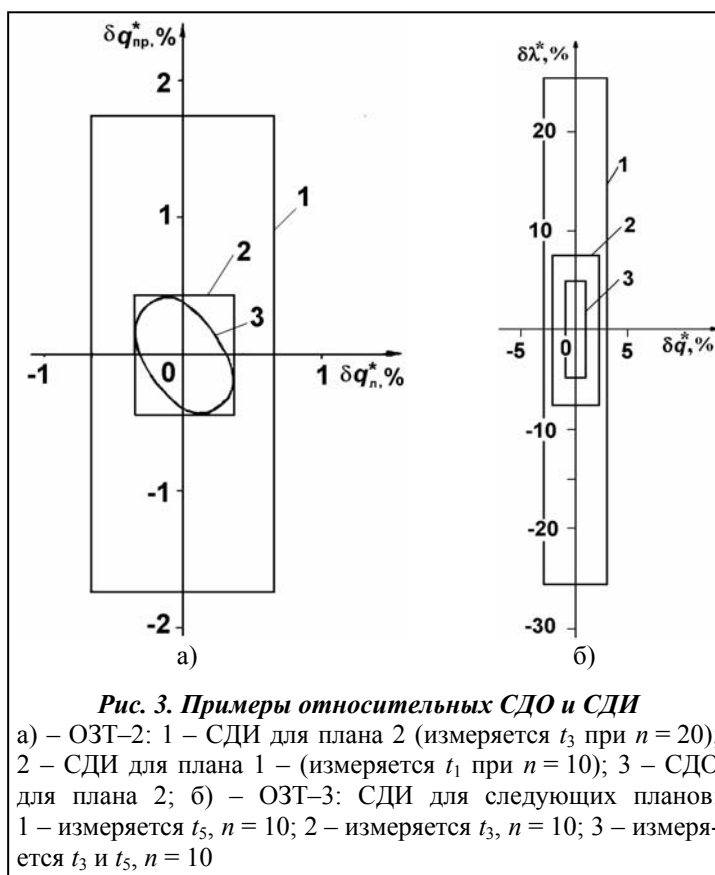
4.4.2. При идентификации переменного теплового потока  $q(\tau)$  (ОЗТ-2 и ОЗТ-4) вывод о желательности использования  $t_1$  становится еще более категоричным. Так, планы с  $t_5$  фактически исключаются, а использование  $t_3$  можно рекомендовать лишь для ОЗТ-2 при больших  $n$ .

Одновременное оценивание  $\lambda$  (ОЗТ-4) ухудшает точность оценок  $q_{\lambda}$  и  $q_{\text{пр}}$ , оставляя их в допустимых пределах лишь для планов с использованием  $t_1$ , а если  $t_3$ , то при  $n \geq 20$ .

4.4.3. Как следует из таблицы, добавление к измерениям  $t_5$  еще одного измерения –  $t_3$  (ОЗТ-3, план 4) – оказывает определенное положительное влияние на точность априорных оценок параметров  $q$  и  $\lambda$ .

В целом планирование выполнено для конкретных значений векторов  $\Theta_{1,0} - \Theta_{4,0}$ . Разработанное нами программное обеспечение позволяет оперативно выполнять планирование для иных исходных данных.

4.4.4. Необходимо отметить, что состав вектора иско-





**ных параметров**  $\Theta$  фактически является одним из наиболее значимых факторов планирования процессов параметрической идентификации теплопереноса.

#### Выводы

1. Изложена разработанная в Национальном аэрокосмическом университете им. Н. Е. Жуковского «ХАИ» методология планирования параметрической идентификации теплопереноса в ТО, основанная на построении СДО и (или) СДИ априорных оценок искомым параметров.

2. В общем случае без ограничений по числу  $r$  оцениваемых параметров нами при планировании рекомендуется использовать СДИ, получаемые на основе обратных матриц Грама.

3. В качестве иллюстрации в рамках постановки четырех практически актуальных ОЗТ выполнено планирование параметрической идентификации теплопереноса в одномерных градиентных ПТП как средства косвенных измерений плотности входящих в ТО тепловых потоков.

Авторы будут всегда с глубокой признательностью помнить о значительном вкладе своего коллеги проф., д-ра техн. наук **Алексея Васильевича Олейника** в создание, обсуждение и практическое внедрение приведенной методологии

#### Литература

1. *Симбирский Д. Ф.* Точность и планирование параметрической идентификации теплопереноса в технических объектах / Д. Ф. Симбирский, С. В. Епифанов, Г. Д. Симбирский // Пробл. машиностроения. – 2012. – Т. 15, № 2. – С. 14–22.
2. *Химмельблау Д.* Анализ процессов статистическими методами / Д. Химмельблау. – М.: Мир, 1973. – 957 с.
3. *Епифанов С. В.* Оптимальный выбор измеряемых параметров при идентификации ГТД / С. В. Епифанов, Д. Ф. Симбирский, С. А. Каплун / Изв. вузов. Авиац. техника. – 1989. – № 4. – С. 39–43; 1990. – № 1. – С. 57–62; 1990. – № 2. – С. 72–78.
4. *Синтез систем управления и диагностирования газотурбинных двигателей* / С. В. Епифанов, Б. И. Кузнецов, И. М. Богаенко и др. – Киев: Техника, 1998. – 312 с.
5. *Макаренко Г. В.* Оптимизация систем параметрической идентификации теплопереноса в элементах теплоэнергетических установок: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. – Харьков, 1992. – 16 с.
6. *Симбирский Д. Ф.* Температурная диагностика двигателей (пленочная термометрия и оптимальные оценки) / Д. Ф. Симбирский. – Киев: Техника, 1976. – 208 с.
7. *Симбирский Д. Ф.* Оптимальный синтез измерительных систем, использующих алгоритмы обратных задач / Д. Ф. Симбирский, А. В. Олейник, С. В. Епифанов // Методы теории идентификации в задачах измерительной техники и метрологии : Тез. докл. 5-го всесоюз. симп. – Новосибирск, 1989. – С. 136–137.
8. *Мацевитый Ю. М.* Сплайн-идентификация теплофизических процессов / Ю. М. Мацевитый, Е. Н. Бут. – Киев: Наук. думка, 2010. – 240 с.

Поступила в редакцию  
10.09.12