**Доповіді національної академії наук України**

2 • 2016

*МАТЕМАТИКА*

УДК 517.98 http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.02.007

**В. М. Горбачук**

НТУ України "Київський політехнічний інститут"

*E-mail:* valgorbachuk@gmail.com

# Структура розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі на нескінченному інтервалі

*(Представлено членом-кореспондентом НАН України А. Н. Кочубеєм)*

*Описано всі розв'язки рівняння вигляду* $(d/dt - A)^n(d/dt + A)^m y(t) = 0$ $(n, m \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \bigcup \mathbb{N},\ n + m \geqslant 1)$ *на півосі або на всій числовій осі, де* $A$ — *інфінітезимальний генератор обмеженої аналітичної* $C_0$*-півгрупи лінійних операторів у банаховому просторі. Показано, що будь-який розв'язок розглянутого рівняння на* $(0, \infty)$ *є аналітичною вектор-функцією на цьому проміжку, а кожен його розв'язок на* $(-\infty, \infty)$ *допускає продовження до цілої вектор-функції. В обох випадках для розв'яків встановлено аналог принципу Фрагмена–Ліндельофа.*

***Ключові слова***: диференціальне рівняння у банаховому просторі, $C_0$-півгрупа лінійних операторів, обмежена аналітична півгрупа, аналітичні і цілі вектори замкненого оператора, принцип Фрагмена-Ліндельофа.

Основна мета роботи — дослідження розв'язків $y(t)$ рівняння

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right)^n \left(\frac{d}{dt} + A\right)^m y(t) = 0, \qquad t \in \mathcal{I}, \qquad n, m \in \mathbb{N}_0, \qquad n + m \geqslant 1, \tag{1}$$

де $\mathcal{I} = (0, \infty)$ або $(-\infty, \infty)$, $A$ — інфінітезимальний генератор (просто генератор) обмеженої аналітичної $C_0$-півгрупи в банаховому просторі $\mathfrak{B}$ з нормою $\|\cdot\|$ над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел такий, що $0 \in \rho(A)$, $\rho(\cdot)$ — резольвентна множина оператора. Зазначимо, що випадки $n = 1$, $m = 0$ та $n = 0$, $m = 1$, а також $n = m \geqslant 1$ розглянуто в [1, 2]. Крім того, варто відмітити, що рівняння (1) при конкретних реалізаціях простору $\mathfrak{B}$ і оператора $A$ містить у собі різноманітні класи рівнянь математичної фізики в певних функціональних просторах.

**1.** Нехай $L(\mathfrak{B})$ — множина всіх обмежених лінійних операторів в $\mathfrak{B}$ і $\{U(t)\}_{t \geqslant 0}$ — $C_0$-півгрупа операторів $U(t) \in L(\mathfrak{B})$ (щодо теорії півгруп у банаховому просторі див. [3, 4]), тобто:

1) $U(0) = I$, $I$ — одиничний оператор в $\mathfrak{B}$;

2) $\forall t, s > 0\colon U(t+s) = U(t)U(s)$;

3) $\forall x \in \mathfrak{B}\colon \lim\limits_{t\to 0} \|U(t)x - x\| = 0$.

Генератор $A$ півгрупи $\{U(t)\}_{t\geqslant 0}$ визначається як

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in \mathfrak{B}\colon \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(U(t)x - x) \text{ існує} \right\},$$

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(U(t)x - x), \qquad x \in \mathcal{D}(A).$$

Оператор $A$ замкнений, і його область визначення $\mathcal{D}(A)$ є щільною в $\mathfrak{B}$ (множину всіх таких операторів позначатимемо через $E(\mathfrak{B})$). Більш того, $\mathcal{D}(A)$ є $U(t)$-інваріантною, тобто $U(t)x \in \mathcal{D}(A)$ при $x \in \mathcal{D}(A)$, $t \geqslant 0$, і $AU(t)x = U(t)Ax$.

Скрізь у подальшому під $\{e^{tA}\}_{t\geqslant 0}$ розумітимемо півгрупу, що генерується оператором $A$.

$C_0$-півгрупа $\{U(t)\}_{t\geqslant 0}$ називається аналітичною з кутом аналітичності $\theta \in (0, \pi/2]$, якщо оператор-функція $U(\cdot)$ визначена в секторі $S_\theta = \{z : |\arg z| < \theta\}$ і має такі властивості:

1) $\forall z_1,\ z_2 \in S_\theta\colon U(z_1 + z_2) = U(z_1)U(z_2)$;

2) $\forall x \in \mathfrak{B}\colon U(z)x$ є аналітичною в $S_\theta$;

3) $\forall x \in \mathfrak{B}\colon \|U(z)x - x\| \to 0$ при $z \to 0$ у будь-якому замкненому підсекторі сектора $S_\theta$.

Якщо, крім того, сім'я $U(z)$ обмежена на кожному секторі $S_\psi$ з $\psi < \theta$, то півгрупа $\{U(t)\}_{t\geqslant 0}$ називається обмеженою аналітичною з кутом $\theta$.

Нехай тепер $A$ — довільний оператор з $E(\mathfrak{B})$. Позначимо через $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ простір цілих векторів оператора $A$:

$$\mathfrak{G}_{(1)}(A) = \operatorname*{proj\,lim}_{\alpha\to 0} \mathfrak{G}_1^\alpha(A) = \bigcap_{\alpha>0} \mathfrak{G}_1^\alpha(A),$$

де

$$\mathfrak{G}_1^\alpha(A) = \left\{ x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{D}(A^n) \middle| \exists c = c(x) > 0, \forall k \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \bigcup \mathbb{N} : \|A^k x\| \leqslant c\alpha^k k^k \right\} —$$

банахів простір відносно норми

$$\|x\|_{\mathfrak{G}_1^\alpha(A)} = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{\|A^k x\|}{\alpha^k k^k}.$$

Збіжність у просторі $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ означає збіжність у кожному $\mathfrak{G}_1^\alpha(A)$, $\alpha > 0$. Зауважимо, що $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ можна отримати, обмежившись лише $\alpha = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Таким чином, простір $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ є зліченно-нормованим (див. [5]).

**Твердження 1** (див. [2]). *Нехай $A \in E(\mathfrak{B})$. Тоді для довільних $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$ та $z \in \mathbb{C}$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k A^k x/k!$ збігається в просторі $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ і оператор-функція*

$$\exp(zA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k A^k}{k!}$$

*є цілою в $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Більш того, сім'я $\{\exp(zA)\}_{z\in\mathbb{C}}$ утворює однопараметричну групу в $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Якщо $A$ — генератор обмеженої аналітичної півгрупи $\{e^{tA}\}_{t\geqslant 0}$, то*

$$\overline{\mathfrak{G}_{(1)}(A)} = \mathfrak{B}, \qquad \mathfrak{G}_{(1)}(A) = \bigcap_{t\geqslant 0} \mathcal{R}(e^{tA})$$

*($\mathcal{R}(\cdot)$ — область значень оператора), і*

$$\forall x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A): \qquad \exp(tA)x = \begin{cases} e^{tA}x, & \text{при} \quad t \geqslant 0, \\ (e^{-tA})^{-1}x, & \text{при} \quad t < 0. \end{cases}$$

З твердження 1 випливає, що для довільного $z \in \mathbb{C}$ має місце включення $\exp(zA)\mathfrak{G}_{(1)}(A) \subset \mathfrak{G}_{(1)}(A)$ і якщо $0 \in \rho(A)$, то $A\mathfrak{G}_{(1)}(A) = \mathfrak{G}_{(1)}(A)$.

Надалі для $C_0$-півгрупи $\{e^{tA}\}_{t\geqslant 0}$ припускатимемо, що $\ker e^{tA} = \{0\}$ для будь-якого $t > 0$. Без обмеження загальності вважатимемо також $\{e^{tA}\}_{t\geqslant 0}$ півгрупою стисків.

Позначимо через $\mathfrak{B}_{-t}(A)$ $(t > 0)$ поповнення $\mathfrak{B}$ за нормою

$$\|x\|_{-t} = \|e^{tA}x\|.$$

Норми $\|\cdot\|_{-t}$, $t > 0$, є узгодженими і порівнянними на $\mathfrak{B}$. Отже, при $t < t'$ маємо щільне й неперервне вкладення $\mathfrak{B}_{-t}(A) \subseteq \mathfrak{B}_{-t'}(A)$. Покладемо

$$\mathfrak{B}_{-}(A) = \operatorname*{proj\,lim}_{t\to 0} \mathfrak{B}_{-t}(A).$$

Зауважимо, що для одержання $\mathfrak{B}_{-}(A)$ досить обмежитися просторами $\mathfrak{B}_{-1/n}(A)$, $n \in \mathbb{N}$. Таким чином, $\mathfrak{B}_{-}(A)$ — повний зліченно-нормований простір (щодо зліченно-нормованих просторів і операторів у них див [5]).

Оператор $e^{tA}$ допускає неперервне розширення $\widetilde{U}(t)$ з $\mathfrak{B}$ на $\mathfrak{B}_{-t}(A)$, причому, внаслідок неперервності вкладення $\mathfrak{B}_{-t}(A)$ в $\mathfrak{B}_{-t'}(A)$ при $t < t'$, $\widetilde{U}(t') \restriction_{\mathfrak{B}_{-t}(A)} = \widetilde{U}(t)$.

На просторі $\mathfrak{B}_{-}(A)$ задамо оператори $U(t)$ $(t \geqslant 0)$ таким чином:

$$\forall x \in \mathfrak{B}_{-}(A): \qquad U(t)x = \widetilde{U}(t)x \qquad \text{при} \qquad t > 0, \qquad U(0)x = x.$$

Нижченаведене твердження характеризує оператори $U(t)$ (див. [1]).

**Твердження 2.** *Сім'я $\{U(t)\}_{t\geqslant 0}$ утворює одностайно неперервну $C_0$-півгрупу лінійних операторів у просторі $\mathfrak{B}_{-}(A)$ таку, що:*

*1) $\forall t > 0$: $U(t)\mathfrak{B}_{-}(A) \subseteq \mathfrak{B}$;*

*2) $\forall t \geqslant 0$, $\forall x \in \mathfrak{B}$: $U(t)x = e^{tA}x$;*

*3) $\forall t, s > 0$, $\forall x \in \mathfrak{B}_{-}(A)$: $U(t+s)x = e^{tA}U(s)x = e^{sA}U(t)x$.*

*Якщо півгрупа $\{e^{tA}\}_{t\geqslant 0}$ є диференційовною при $t > 0$, то вкладення $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{B}_{-}(A)$ є строгим: $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}_{-}(A)$, генератор $\widehat{A}$ півгрупи $\{U(t)\}_{t\geqslant 0}$ визначений і неперервний на всьому просторі $\mathfrak{B}_{-}(A)$ і є замиканням $A$ в $\mathfrak{B}_{-}(A)$, а отже, півгрупа $\{U(t) = e^{t\widehat{A}}\}_{t\geqslant 0}$ є нескінченно диференційовною на $[0, \infty)$ в $\mathfrak{B}_{-}(A)$. За умови, що $0 \in \rho(A)$, оператор $\widehat{A}$ має неперервний обернений, визначений на всьому $\mathfrak{B}_{-}(A)$. Якщо півгрупа $\{e^{tA}\}_{t\geqslant 0}$ аналітична в $\mathfrak{B}$, то оператор-функція $U(t)$ є аналітичною в $\mathfrak{B}_{-}(A)$.*

**2.** Вектор-функція $y(t)\colon (0, \infty) \mapsto \mathcal{D}(A^{n+m})$ називається розв'язком рівняння (1) на $(0, \infty)$, якщо вона $n + m$ разів неперервно диференційовна на $(0, \infty)$ і задовольняє там це рівняння. Підкреслимо, що жодних умов на поведінку $y(t)$ в околі нуля не накладається.

**Теорема 1.** *Нехай $A$ — генератор обмеженої аналітичної $C_0$-півгрупи $\{e^{tA}\}_{t\geqslant 0}$ в $\mathfrak{B}$ і $0 \in \rho(A)$. Вектор-функція $y(t)$ є розв'язком рівняння* (1) *на* $(0,\infty)$ *тоді і тільки тоді, коли вона може бути зображена у вигляді*

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k U(t) f_k + \sum_{k=0}^{m-1} t^k \exp(-tA) g_k, \tag{2}$$

*де $f_k \in \mathfrak{B}_-(A)$, $g_k \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Вектори $f_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, і $g_k$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, визначаються однозначно за $y(t)$.*

Позначимо через $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$ простір аналітичних векторів оператора $A$:

$$\mathfrak{G}_{\{1\}}(A) = \left\{ x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{D}(A^n) \,\middle|\, \exists\alpha > 0, \exists c = c(x) > 0, \forall k \in \mathbb{N}_0 \colon \|A^k x\| \leqslant c\alpha^k k^k \right\},$$

наділений топологією індуктивної границі просторів $\mathfrak{G}_1^{\alpha}(A)$. З визначення аналітичної півгрупи, твердження 2 і теореми 1 випливають такі наслідки.

**Наслідок 1.** *Будь-який розв'язок рівняння* (1) *на* $(0,\infty)$ *є аналітичною вектор-функцією зі значеннями в* $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$.

**Наслідок 2.** *Кожний розв'язок $y(t)$ рівняння* (1) *на* $(0,\infty)$ *і його похідні будь-якого порядку мають граничні значення в точці нуль у просторі* $\mathfrak{B}_-(A)$.

Природно постає питання: за яких умов на розв'язок $y(t)$ усі $f_k$ $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$ в його зображенні (2) належать до вихідного простору $\mathfrak{B}$? Відповідь дає така теорема.

**Теорема 2.** *Якщо простір $\mathfrak{B}$ є рефлексивним, то розв'язок $y(t)$ рівняння* (1) *на* $(0,\infty)$ *можна подати у вигляді* (2) *з $f_k \in \mathfrak{B}$ $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$ тоді і тільки тоді, коли*

$$\left\| \left( \frac{d}{dt} - A \right)^k y(t) \right\| < \infty, \qquad t \in (0, 1], \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{3}$$

Умова (3) еквівалентна існуванню граничних значень в нулі вектор-функцій $(d/dt - A)^k y(t)$ $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$ у просторі $\mathfrak{B}$. У випадку, коли $m = 1$ і $\mathfrak{B}$ рефлексивний, обмеженість розв'язку в околі нуля рівносильна існуванню його граничного значення в точці 0 в $\mathfrak{B}$. Але, як показано в [6], це, взагалі кажучи, не так при $m > 1$. Наприклад, для бігармонічного рівняння $(A^2 = -d^2/dx^2)$ із обмеженості в середньому квадратичному розв'язку в околі границі ще не випливає існування середньоквадратичного граничного значення.

Покладемо

$$s = s(A) = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} \operatorname{Re}\lambda, \tag{4}$$

де $\sigma(A)$ — спектр оператора $A$. Як відомо, $s(A)$ є не що інше, як тип півгрупи $\{e^{tA}\}_{t\geqslant 0}$. Оскільки, за припущенням, ця півгрупа є обмеженою аналітичною і $0 \in \rho(A)$, то $s < 0$.

**Теорема 3** (аналог принципу Фрагмена–Ліндельофа). *Нехай $\omega < -s$. Якщо для розв'язку $y(t)$ рівняння* (1) *на* $(0,\infty)$ *виконується нерівність*

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{\ln\|y(t)\|}{t} < \omega,$$

*то*

$$\forall\varepsilon > 0 \colon \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\ln\|y(t)\|}{t} \leqslant -\omega + \varepsilon.$$

**3.** Перейдемо тепер до випадку $\mathcal{I} = (-\infty, \infty)$. Має місце таке твердження.

**Теорема 4.** *Нехай $A$ — генератор обмеженої аналітичної $C_0$-півгрупи в $\mathfrak{B}$ і $0 \in \rho(A)$. Вектор-функція $y(t)\colon (-\infty, \infty) \mapsto \mathcal{D}(A^{n+m})$ є розв'язком рівняння* (1) *на $(-\infty, \infty)$ тоді і тільки тоді, коли вона допускає зображення вигляду* (2) *з $f_k$, $g_k \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Вектори $f_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, і $g_k$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, визначаються однозначно за $y(t)$.*

З твердження 1 і теореми 4 безпосередньо випливає

**Наслідок 3.** *Будь-який розв'язок рівняння* (1) *на $(-\infty, \infty)$ може бути продовжений до цілої вектор-функції в просторі $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$.*

Звідти ж приходимо до висновку, що простір усіх розв'язків цього рівняння є нескінченновимірним. Більш того, для них здійснюється аналог принципу Фрагмена–Ліндельофа, а саме, має місце така теорема.

**Теорема 5.** *Нехай $y(t)$ — розв'язок рівняння* (1) *на $(-\infty, \infty)$. Якщо*

$$\exists \gamma \in (0, -s), \qquad \exists c_\gamma > 0 : \qquad \|y(t)\| \leqslant c_\gamma e^{\gamma|t|}, \qquad t \in (-\infty, \infty),$$

($s$ *визначено формулою* (4)), *то $y(t) \equiv 0$.*

**Наслідок 4** (аналог теореми Ліувілля). *Нехай $y(t)$ — розв'язок рівняння* (1) *на $(-\infty, \infty)$. Тоді*

$$\sup_{t \in (-\infty, \infty)} |y(t)| < \infty \Longrightarrow y(t) \equiv 0, \qquad t \in (-\infty, \infty).$$

## Цитована література


1. *Gorbachuk V. I., Gorbachuk M. L.* Boundary value problems for operator differential equations. – Dordrecht: Kluwer, 1991. – 347 p.
2. *Gorbachuk M., Gorbachuk V.* On extensions and restrictions of semigroups of linear operators in a Banach space and their applications // Math. Nachr. – 2012. – **285**, No 14–15. – P. 1860–1879.
3. *Хилле Э., Филлипс Р. С.* Функциональный анализ и полугруппы. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 830 с.
4. *Иосида К.* Функциональный анализ. – Москва: Мир, 1967. – 624 с.
5. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции. Т. 2: Пространства основных и обобщенных функций. – Москва: Физматгиз, 1958. – 307 с.
6. *Михайлов В. П.* О существовании предельных значений решений полигармонического уравнения на границе области // Мат. сб. – 1996. – **187**, № 11. – С. 89–114.


## References


1. *Gorbachuk V. I., Gorbachuk M. L.* Boundary value problems for operator differential equations, Dordrecht: Kluwer, 1991.
2. *Gorbachuk M., Gorbachuk V.* Math. Nachr., 2012, **285**: No 14–15: 1860–1879.
3. *Hille E., Phillips R. S.* Functional Analysis and Semi-Groups, Moscow: Izd. Inostr. Lit., 1962 (in Russian).
4. *Yosida K.* Functional Analysis, Moscow: Mir, 1967 (in Russian).
5. *Gelfand I. M., Shilov G. E.* Generalized functions, Vol.2: Spaces of Test and Generalized Functions, Moscow: Fizmatgiz, 1958 (in Russian).
6. *Mikhailov V. P.* Math. Sb., 1996, **187**, No 11: 89–114 (in Russian).



*Надійшло до редакції 15.07.2015*

**В. М. Горбачук**

НТУ Украины "Киевский политехнический институт"

*E-mail:* valgorbachuk@gmail.com

## Структура решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве на бесконечном интервале

*Описаны все решения уравнения вида* $(d/dt-A)^n(d/dt+A)^m y(t)=0$ $(n,m\in\mathbb{N}_0=\{0\}\bigcup\mathbb{N}, n+m\geqslant 1)$ *на полуоси или на всей числовой оси, где* $A$ — *инфинитезимальный генератор ограниченной аналитической* $C_0$*-полугруппы линейных операторов в банаховом пространстве. Показано, что всякое решение рассмотренного уравнения на* $(0,\infty)$ *является аналитической вектор-функцией на этом промежутке, а каждое его решение на* $(-\infty,\infty)$ *допускает продолжение до целой вектор-функции. В обоих случаях для решений установлен аналог принципа Фрагмена–Линделефа.*

***Ключевые слова:*** дифференциальное уравнение в банаховом пространстве, $C_0$-полугруппа линейных операторов, ограниченная аналитическая полугруппа, аналитические и целые векторы замкнутого оператора, принцип Фрагмена–Линделефа.

**V. M. Gorbachuk**

NTU of Ukraine "Kiev Polytechnic Institute"

*E-mail:* valgorbachuk@gmail.com

## Structure of solutions of differential equations in a Banach space on an infinite interval

*For an equation of the form* $(d/dt-A)^n(d/dt+A)^m y(t)=0$, $(n,m\in\mathbb{N}_0=\{0\}\bigcup\mathbb{N}, n+m\geqslant 1)$ *on the semiaxis or the whole real axis, where* $A$ *is the infinitesimal generator of a bounded analytic* $C_0$*-semigroup of linear operators on a Banach space, all its solutions are described. It is shown that any solution of the equation under consideration on* $(0,\infty)$ *is an analytic vector-valued function on this semiaxis, and every its solution on* $(-\infty,\infty)$ *admits an extension to an entire vector-valued function. In both cases, an analogue of the Phragmén-Lindelöf principle for the solutions is established.*

***Keywords:*** differential equation in a Banach space, $C_0$-semigroup of linear operators, bounded analytic semigroup, analytic and entire vectors of a closed operator, the Phragmén-Lindelöf principle.