УДК 530.1:531.19

К КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЧАСТИЦ ПОВЕРХНОСТИ В МЕТОДЕ СОКРАЩЕННОГО ОПИСАНИЯ

В.И. Приходько, В.Н. Кавчук*, П.В. Турбин

Научный физико-технологический центр МОН и НАН Украины (Харьков)

**Концерн "Центр новых технологий" Харьковский физико-технический институт Украина*

Поступила в редакцию 12.10.2004

Используя метод сокращенного описания [1, 2], построена статистическая механика систем, находящихся в случайных полях [3, 4], в частности теория возмущений по взаимодействию со случайно расположенными на поверхности примесями, дислокациями, вакансиями и другими нерегулярными структурами. В теории возмущений по взаимодействию свободной от расходимостей [5] создана двумерная гидродинамика (частиц поверхности) с учетом флуктуаций. Найдены нелокальные кинетические коэффициенты первой и второй вязкости, теплопроводности.

ВВЕДЕНИЕ

В работе развит новый стохастический метод описания систем с шумом [3]. Этот метод основывается на том, что среди решений стохастических дифференциальных уравнений имеет место сокращенное описание состояний, аналогичный кинетическому описанию состояний многочастичных систем в статистической физике [1, 2]. Решена проблема построения асимптотического оператора эволюции [4] путем суммирования секулярных членов [6, 7], появляющихся в ряду теории возмущений по взаимодействию со случайным полем, в частности со случайно расположенными на поверхности примесными центрами, дислокациями, вакансиями и другими нерегулярными структурами. Построена теория двумерной гидродинамики с учетом флуктуаций, свободная от расходимостей. Получены нелокальные коэффициенты переноса по пространственным градиентам в двумерном случае [5].

КОНЦЕПЦИЯ СОКРАЩЕННОГО ОПИСАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Сформулируем концепцию сокращенного описания применительно к стохастическим процессам. Проблема состоит в том, чтобы систему, динамика которой задается стохастическими дифференциальными уравнениями вида

$$\dot{x}_i = h^{(i)}(x,t), \quad i = 1, \ldots n, \qquad (1)$$

где $h(x, t)$ – случайное поле, описывать в терминах принятых в кинетичской теории многочастичных систем. Иначе говоря, задача заключается в построении функции распределения решений уравнений (1) и исследовании ее асимптотики при больших временах.

Случайное поле $h(x, t)$ определяется с помощью некоторой вероятностной модели – вероятностного пространства (Ω, σ, P), где Ω – пространство случайных реализаций поля $h(x, t)$, т.е. набор всех возможных при заданной физической постановке задачи случайных функций $h(x, t)$, σ – набор всех возможных случайных событий для поля $h(x, t)$, которым имеет смысл с физической точки зрения приписывать некоторую вероятность (с формальной, математической точки зрения σ – σ-алгебра измеримых подмножеств Ω [4]), и, наконец, $P(\cdot)$ – вероятность, неотрицательная функция, заданная на элементах из σ такая, что $P(\Omega) = 1$, $P(\varnothing) = 0$, и для любого набора $\{A_n \in \sigma,\ A_n \cap A_m = \varnothing, n \neq m\}$ выполняется тождество $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Для любой физической величины $G(h)$, являющейся функционалом стохастического поля $h(x, t)$, среднее по его случайным реализациям определяется интегралом по мере $P(\cdot)$

$$\langle G(h) \rangle = \int G(h) dP_h, \qquad (2)$$

который строится стандартным образом.

Удобно считать, что пространство Ω характеризуется некоторой координатой ω, т.е. $h(x, t) \in h^{\omega}(x, t)$, при этом решение системы уравнений (1) с начальными условиями $x_i|_{t=0} = x_i(0) \equiv x(0)$ обозначаемое как $X_i^{\omega}(t, x(0))$ зависит от ω. Пусть $f(x(0), 0)$ – функция распределения начальных данных $x(0)$, нормированная следующим образом $\int dx(0) f(x(0), 0) = 1$. Теперь определим стохастическую функцию распределения $f_w(x, t)$ величин x в момент времени t

$$f_{\omega}(x,t) = \int dx(0) f(x(0), 0) \times \\ \times \delta(x - X_{\omega}(t, x(0))) \,. \qquad (3)$$

Пусть $X^{-1}(t, y)$ обозначает решение системы уравнений $X(t, x) = y$ относительно x, $x = X^{-1}(t, y)$. Тогда, переходя в (3) от переменных интегрирования $x(0)$ к переменным y, $y = X(t, x(0))$, получим

$$f(x, t) = J(x, t) f(X^{-1}(t, x), 0), \qquad (4)$$

где $J(x,t) = \left\| \dfrac{\partial X^{-1}(t,x)}{\partial x} \right\|$ – якобиан перехода от переменных $X^{-1}(t, x)$ к переменным x.

Рассмотрим сначала случай, когда функции $h_i(x,t)$ не зависят явно от t, $h_i(x,t) = h_i(x)$. Так как в этом случае, согласно (1) $(d^n x_i / dt^n)_{t=0} = (h_j \partial / \partial x_j)^n x_i|_{x=x(0)}$, то

$X_i(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{t^n}{n!} (h_j \partial / \partial x_j)^n x_i$, и, следовательно, $X_i(t, x) = \exp(t\Lambda(x)) x_i$, $\Lambda(x) = h_j(x) \dfrac{\partial}{\partial x}$.

Кроме того, поскольку $h_j(x)$ не зависит явно от t, то $X(t, X(t_0, x)) = X(t + t_0, x)$ и, значит, $X(t, X(-t, x)) = x$. Поэтому $X^{-1}(t, x) = X(-t, x) = \exp(-t\Lambda(x))x$. Используя это соотношение, имеем, согласно (4)

$$f(x, t) = J(x, t) \exp(-t\Lambda(x)) f(x, 0)$$

поэтому

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial J}{\partial t} J^{-1} f - J h_j \frac{\partial}{\partial x_j} J^{-1} f \,. \qquad (5)$$

Замечая, что согласно (3) $\int \dfrac{\partial f}{\partial t} dx = 0$, имеем

$\int dx f \left\{ J^{-1} \dfrac{\partial J}{\partial t} + J^{-1} \dfrac{\partial}{\partial x_i} J h_i \right\} = 0$, и, следовательно, в силу произвольности f (так как $f(x, 0)$ – произвольная функция)

$$\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} J h_j = 0, \quad J|_{t=0} = 1 \,. \qquad (6)$$

С учетом уравнения для якобиана J, можно преобразовать уравнение (5) к виду

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(h_j f) = 0 \,. \qquad (7)$$

Отметим, что формальное решение уравнения (6) имеет вид $J(x,t) = \exp\{-t \dfrac{\partial}{\partial x_i} h_i \ldots\} \cdot 1$. В том случае, когда система уравнений (1) гамильтонова, т.е. $\partial h_j / \partial x_j = 0$, якобиан $J(x, t) = 1$, что отвечает каноническим преобразованиям.

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая $h_j = h_j(x, t)$. Легко видеть, что уравнение типа (1) можно записать в эквивалентном виде

$$\tilde{x}_i = \tilde{h}_i(x, a), \quad \dot{a} = \tilde{h}(a), \quad a|_{t=0} = a_0, \qquad (8)$$

если потребовать, чтобы

$$\tilde{h}_i(x, a(t, a_0)) = h_i(x, t),$$

где $a(t,a_0)$ – решение уравнения для a (для этого достаточно считать, что $a(t) \equiv t$, что есть, $\tilde{h}(a) = 1$, $a_0 = 0$; при этом $\tilde{h}_i(x,t) = h_i(x,t)$) Произвольное решение системы (8) обозначим через $X_i(t, x(0), a_0)$, $A(t, a_0)$, ($X_i(0, x(0), a_0) = x_i(0)$, $A(0, a_0) = a(0) = a_0$). Тогда, согласно построению

$$X_i(t, x, a_0) \equiv x(t, x), \qquad (9)$$

а решение уравнений $X_i(t, x, a_0) = y$, $A(t, a) = z$ относительно X и a имеет вид: $x = X((-t, y, z), x)$, $a = A(-t, z)$. Поэтому, согласно (9) $X(t, X(-t, y, A(t, a_0))) = y$ и, следовательно

$$X^{-1}(t, y) = X(-t, y, A(t, a_0)). \qquad (10)$$

Согласно (4) функция $f(x, a, t)$ величин X и a в момент времени t равна

$$f(x, a, t) = J(x, a, t)f(X(-t, x, a), 0)\delta(A(-t, a)-a_0), \quad (11)$$

если считать, что $f(x, a, 0) = f(x, 0)\delta(a - a_0)$, где согласно (10)

$$J(x,a,t)\,|_{a=h(t,a_0)} = \frac{\partial(X(-t,x,a),A(-t,a))}{\partial(x,a)} =$$

$$= J(x,t)\frac{\partial A(-t,a)}{\partial a} \quad (12)$$

есть якобиан преобразования от переменных $X(-t, x, a)$, $A(-t, a)$, к переменным x, a. Нетрудно видеть, что согласно (12) $J(x, a, t)\times \times\, \delta(A(-t, a) - a_0) = J(x, t)\delta(a - A(t, a_0))$, где $J(x, t)$ – якобиан перехода в формуле (4). Таким образом, сравнивая (4) с (11), и, учитывая (12), получим

$$f(x, a, t) = f(x, t)\delta(a - A(t, a_0)). \quad (13)$$

С другой стороны, согласно (7)

$$\frac{\partial f(x,a,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\tilde{h}_j(x,a)f(x,a,t)) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial a}(\tilde{h}_j(a)f(x,a,t)) = 0\,.$$

Подставляя в это уравнение выражение (13), найдем окончательно

$$\frac{\partial f_\omega(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(h_j^\omega(x,t)f_\omega(x,t)\right) = 0\,. \quad (14)$$

Это и есть искомое уравнение движения для функции распределения решений стохастических дифференциальных уравнений (1). В том случае, когда уравнения (1) являются уравнениями гамильтонового типа для импульса и координаты ($x = p, q$), уравнение (14) представляет собой уравнение Лиувилля для функции распределения частиц, находящихся в некотором случайном поле. Имея это в виду, будем записывать уравнение (14) в общем случае в виде

$$i\frac{\partial f_\omega(x,t)}{\partial t} = \Lambda_\omega(t)f_\omega(x,t)\,, \quad (15)$$

где $\Lambda_\omega(t)$ – оператор Лиувилля, $\Lambda_\omega(t) \equiv -i\frac{\partial}{\partial x_j}h_j^\omega(x,t)$, действующий на переменные x в "случайной функции распределения" $f_\omega(x, t)$.

Отметим, что уравнение (15) справедливо и в квантовом случае, если под $f_\omega(x, t)$ понимать случайный статистический оператор, а под Λ_ω – квантовомеханический оператор Лиувилля $\Lambda_\omega f_\omega \equiv [H_\omega, f_\omega]$, где H_ω – гамильтониан системы, находящейся в случайном поле. В этом случае Λ_ω – оператор, действующий не в гильбертовом пространстве векторов состояний, а в пространстве статистических опе-раторов.

Будем предполагать, что оператор $\Lambda_\omega(t)$ можно представить в виде

$$\Lambda_\omega(t) = \Lambda^{(0)} + \Lambda_\omega^{(1)}(t),\ \Lambda_\omega^{(1)}(t) = \int dq\varphi_\omega(q,t)a(q)\,, \quad (16)$$

где $\Lambda^{(0)}$ – не зависящая от времени часть оператора $\Lambda_\omega(t)$, $\varphi_\omega(q, t)$, – фурье-компонента (см. далее) реализации "с индексом ω" некоторого случайного поля φ, величины $a(q)$, зависящие от q как от параметра, несут всю операторную структуру $\Lambda_\omega^{(1)}(t)$. Такое разбиение оператора Λ оказывается удобным для построения теории возмущений по случайному полю φ. Заметим, что представление (16) возникает, например, при рассмотрении многочастичной системы, находящейся во внешнем случайном поле $\varphi_\omega(x, t)$, когда гамильтониан имеет вид $H_\omega = H_0 + \varphi_\omega(x, t)$, где H_0 – гамильтониан свободных частиц.

Уравнение (15), будучи усредненным по реализациям случайного поля, приводит к уравнению движения для усредненной (истинной) функции распределения $f(t) = \langle f_\omega(t)\rangle$,

$$\partial_t f(t) = -i\Lambda^{(0)}f(t) - i\langle \Lambda_\omega^{(1)} f_\omega(t)\rangle = -i\Lambda^{(0)}f + L(t).$$

Входящая в правую часть этого уравнения величина $L(t)$ связана с определяемой нами "корреляционной функцией" частица-поле

$$f_s(q_1t_1,\ldots,q_st_s;\, t) = \langle \varphi_\omega(q_1, t_1+t)\ldots\varphi_\omega(q_s, t_s+ t)f(t)\rangle \quad (17)$$

формулой $L(t) = -i\int dqa(q)f_1(qt_1;t)\big|_{t_1=0}$.

Для корреляционных функций $f_s(q_1t_1, \ldots, q_st_s;\, t)$ сформулирован принцип ослабления корреляций – аналог принципа пространственного ослабления корреляций в статистической механике.

Легко видеть, что корреляционные функции $f_s(q_1t_1, \ldots, q_st_s;\, t)$ удовлетворяют цепочке дифференциальных уравнений

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}-\left(\frac{\partial}{\partial t_1}+\ldots+\frac{\partial}{\partial t_s}\right)\right\}f_s(q_1t_1,\ldots,q_st_s;t)+i\Lambda^{(0)}f_s=$$

$$=-i\int dq_{s+1}a(q_{s+1})f_{s+1}(q_1t_1,\ldots,q_st_s,q_{s+1}t_{s+1};t)\,|_{t_{s+1}}=0. \quad (18)$$

Функция $f_s(q_1t_1, \ldots, q_st_s; t)$ является, в некотором смысле, аналогом s-частичной функции распределения статмеханики, а уравнение (18) аналогом цепочки уравнений ББГКИ для системы частиц с парным взаимодействием [5, 6].

В этой работе показано, что при больших временах ($t >> \tau_0$, где τ_0 – временной корреляционный масштаб случайного поля, или характерное время хаотизации) одновременная функция распределения $f(t)$ решений стохастических дифференциальных уравнений типа (1) может быть приближена некоторой огрубленной функцией распределения $\widetilde{f}(t)$, а корреляционные функции $f_s(q_1t_1, \ldots, q_st_s; t)$ становятся функционалами огрубленной функции распределения

$$f_s(q_1t_1,\ldots,q_st_s;t)\underset{t>>\tau_0}{\longrightarrow}f_s(q_1t_1,\ldots,q_st_s;\widetilde{f}(t)),$$

$$L(t)\underset{t>>\tau_0}{\longrightarrow}L(\widetilde{f}(t)),$$

Это асимптотическое соотношение доказывает возможность кинетического описания стохастической системы (1) в области $t >> \tau_0$ [4, 5] и может трактоваться, как существование режима сокращенного (огрубленного) описания такой системы.

УСРЕДНЕННЫЙ ОПЕРАТОР ЭВОЛЮЦИИ. ГАУССОВСКОЕ δ-КОРРЕЛИРОВАННОЕ ПОЛЕ

В этом разделе будет найдено формальное решение задачи Коши для уравнения (15) и получено выражение для усредненного по реализациям случайного поля оператора эволюции. Будем считать, что в начальный момент времени функция $f_\omega(t)|_{t=0} = f(0)$ является детерминированной величиной. Представление оператора Λ_ω в форме (16) позволяет записать решение уравнения (15) в виде

$$f_\omega(t) = \exp(-i\Lambda^{(0)}t)S_\omega(t)f(0),$$

$$S_\omega(t)=T\cdot exp\left\{-i\int_0^t d\tau\widetilde{\Lambda}_\omega(\tau)\right\}, \quad (19)$$

где T – символ упорядочения по времени $\widetilde{\Lambda}_\omega(\tau)=\int dq\varphi_\omega(q,\tau)a(q,\tau)$, и $a(q, \tau) = \exp(i\Lambda^{(0)}\tau)\, a(q, 0)\exp(-i\Lambda^{(0)}\tau)$. В случае, когда гамильтониан системы определяется формулой $H=\sum_{j=1}^{N}\left\{\frac{p_j^2}{2m}+\varphi_\omega(x_j,t)\right\}$, операторы $\Lambda^{(0)}$ и $\Lambda_\omega^{(1)}(t)$ имеют вид

$$\Lambda^{(0)}=-i\sum_{j=1}^{N}\frac{p_j}{m}\frac{\partial}{\partial x_j},$$

$$\Lambda_\omega^{(1)}(t)=\int dq\varphi_\omega(q,t)\sum_{j=1}^{N}\exp(iqx_j)q\frac{\partial}{\partial p_j}, \quad (20)$$

где $\varphi_\omega(q,t)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int dx\exp(-iqx)\varphi_\omega(x,t)$ (n – размерность пространства) – фурье-компонента случайного поля $\varphi_\omega(x, t)$. Поэтому при классическом рассмотрении действие одночастичного оператора $a(q, 0)$ на f определяется следующим образом

$$a(q,0)f=\exp(iqx_j)\,q\frac{\partial}{\partial p_j}f. \quad (21)$$

Усредняя выражение (19) по реализациям случайного поля, получим

$$f(t) = \exp(-i\Lambda^{(0)}t)S(t)f(0)$$

$$S(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int dq_1\ldots dq_nT\int_0^t d\tau_1\ldots$$

$$\ldots\int_0^t d\tau_n\chi_n(q_1\tau_1\ldots q_n\tau_n)a(q_1\tau_1)\ldots a(q_n\tau_n), \quad (22)$$

где

$$\chi_n(q_1\tau_1\ldots q_n\tau_n) \equiv \langle\varphi_\omega(q_1\tau_1)\ldots\varphi_\omega(q_n\tau_n)\rangle, \quad (23)$$

n – момент случайного поля.

Основной задачей является нахождение асимптотического при $t >> \tau_0$ поведения функции $f(t)$. На языке статистической механики можно сказать, что речь идет об исследовании кинетического этапа эволюции системы. Заметим, что задача построения асимптотического оператора эволюции для уравнений типа (1) впервые, видимо, была сформулирована в работах ван Кампена [7] в технике кумулянтных разложений.

Усредненный оператор эволюции $S(t)$ может быть записан следующим образом

$$S(t)=T\left\{exp(-i\int_0^t d\tau\int dqa(q,\tau))F(\lambda)|_{\lambda(q,\tau)=0}\right\},$$

где $F(\lambda)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\int dq_1..dq_m\ldots\int_{-\infty}^{\infty}d\tau_n\chi_m(q_1\tau_1..q_m\tau_m)\times$ $\times\lambda(q_1\tau_1)\ldots\lambda(q_m\tau_m)$ производящий функционал моментов $\chi_m(q_1\tau_1\ldots q_m\tau_m)$, связанный с производящим функционалом кумулянтов случайного поля $G(\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int dq_1..dq_n\int_{-\infty}^{\infty}d\tau_1\ldots$

$$\ldots\int_{-\infty}^{\infty}d\tau_n g_n(q_1\tau_1..q_n\tau_n)\lambda(q_1\tau_1)\ldots\lambda(q_n\tau_n)$$

($g_n(q_1t_1\ldots q_nt_n)$ – кумулянт n-ого порядка) соотношением $F(l)=\exp G(l)$. Замечая, что $\exp\left(-i\int_0^t d\tau\int dqa(q,\tau)\frac{\delta}{\delta\lambda(q,\tau)}\right)$ представляет собой оператор сдвига по $\lambda(q,t)$ на величину $-i\eta_t(\tau)a(q,\tau)$, $\eta_t(\tau)=1$ для $0<\tau<t$ и $\eta_t(t)=0$ для $\tau<0$, $\tau>t$, имеем

$$S(t)=T\exp G(-i\eta_t(\tau)a(q,\tau)). \qquad (24)$$

Для случайного стационарного δ – коррелированного во времени поля $g_n(q_1\tau_1,\ldots,q_n\tau_n)=g_n(q_1,\ldots,q_n)\delta(\tau_1-\tau_2)\delta(\tau_1-\tau_n)$ и выражение (22) можно представить в виде

$$S(t)=T\exp\int_0^t d\tau L(\tau),$$

где $L(t)=\exp(i\Lambda^{(0)}\tau)L\exp(-i\Lambda^{(0)}\tau)$ и

$$L=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int dq_1..dq_n g_n(q_1,\ldots,q_n)a(q_1 0)\ldots a(q_n 0). \qquad (25)$$

Поэтому, согласно (22)

$$f(t)=\{e^{-i\Lambda^{(0)}t}T\exp\int_0^t d\tau L(\tau)\}f(0),$$

откуда легко может быть получено кинетическое уравнение для $f(t)$

$$\frac{\partial f}{\partial t}+i\Lambda^{(0)}f=Lf, \qquad (26)$$

где "интеграл столкновений" определяется формулой (25). В частности, для гауссова поля, когда $g_n(q_1\tau_1,\ldots,q_n\tau_n)=0$ для $n>2$, "интеграл столкновений" L имеет вид

$$L=-i\int dq_1 g(q)a(q,0)-$$
$$-\frac{1}{2}\int dq_1\int dq_2 g_2 q_1 q_2)a(q_1,0)a(q_2,0). \qquad (27)$$

С использованием явной структуры операторов $\Lambda^{(0)}$ и $\Lambda^{(1)}_{(t)}(t)$ (20), уравнение (26) с интегралом столкновений (27) легко записать в форме уравнения Фоккера-Планка

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t}+\frac{p_k}{m}\frac{\partial f(t)}{\partial x_k}-\frac{\partial\langle\varphi(x)\rangle}{\partial x_k}\frac{\partial f(t)}{\partial p_k}=$$
$$=D_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial p_i\partial p_j}f(t), \qquad (28)$$

где $D_{ij}(x)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_{1i}\partial x_{2j}}g(x_1,x_2)|_{x_1=x_2=x}$. Поскольку для δ-коррелированного во времени поля время хаотизации $\tau_0=0$ (это выражается в δ-образной зависимости от времени кумулянтов поля), то эволюция системы сразу начинается с кинетического этапа.

В следующем разделе изучим некоторые специальные величины $\tilde{\chi}_l$, которые будут необходимы при построении оператора эволюции в произвольном поле.

ПРИНЦИП ОСЛАБЛЕНИЯ КОРРЕЛЯЦИЙ ДЛЯ СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

Будем предполагать, что для средних $\chi_s(\tau_1\ldots\tau_s)$ справедлив принцип ослабления корреляций, то есть, если $\tau_1\ldots\tau_l\sim\tau$, $\tau_{l+1}\ldots\tau_s\sim\tau_0$, то при $\tau-\tau_0\to\infty$ среднее распадется на произведение средних (для сокращения обозначений мы положим $\tau\equiv(q_i,\tau_i)$);

$$\chi_s(\tau_1\ldots\tau_l,\tau_{l+1}\ldots\tau_s)\xrightarrow[\tau-\tau_0\to\infty]{}\chi_l(\tau_1\ldots\tau_l)\chi_{s-l}(\tau_{l+1}\ldots\tau_s).$$

Определим величины $\widetilde{\chi}_l(\tau_1...\tau_l)$, связанные со средними $\chi_s(\tau_1...\tau_s)$ реккурентным соотношением

$$\chi_s(\tau_1...\tau_s)=\sum_{l=1}^{s}\widetilde{\chi}_l(\tau_1...\tau_l)\chi_{s-l}(\tau_{l+1}...\tau_s),$$
$$s=1,2,...;\quad \chi_0=1. \tag{29}$$

Изучим свойства величин $\widetilde{\chi}_l$. Обозначим через D_l такую область переменных $\tau_1...\tau_l$, в которой $\tau_1>\tau_2>...>\tau_l$. Тогда имеет место следующая теорема [1].

Теорема 1. Пусть $\tau_1 ... \tau_l \in D_l$, $\tau_1 ... \tau_k \sim \tau$ и $\tau_{k+1} ... \tau_l \sim \tau'$. Тогда, если χ_l удовлетворяет принципу ослабления корреляций, то

$$\widetilde{\chi}_l(\tau_1...\tau_l)\underset{\tau-\tau'\to\infty}{\rightarrow}0. \tag{30}$$

Эта теорема показывает, что в области D_l величина $\widetilde{\chi}_l(\tau_1...\tau_l)$ отлична от нуля только если $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_l$ отличаются друг от друга не более, чем на радиус корреляции τ_0 случайного поля. Подчеркнем, что величины χ_l не совпадают с кумулянтами g_l.

Доказательство. Для доказательства перепишем соотношение (29) в следующем виде

$$\widetilde{\chi}_s(\tau_1...\tau_s)=\chi_s(\tau_1...\tau_s)-\sum_{l=1}^{s-1}\widetilde{\chi}_l(\tau_1...\tau_l)\chi_{s-l}\widetilde{\chi}_{s-l}(\tau_{l+1}...\tau_s),$$
$$\widetilde{\chi}_1=\chi_1. \tag{31}$$

Доказательство проведем методом математической индукции. Непосредственной проверкой легко убедиться, что $\widetilde{\chi}_2(\tau_1\tau_2)\underset{\tau-\tau'\to\infty}{\rightarrow}0$.

Предположим, что соотношение (30) справедливо при $l=2, 3, ..., s$ и любом k, $1\le k\le l-1$. Докажем справедливость этого соотношения для $l=s+1$. Пусть $\tau_1 ... \tau_k \sim \tau$, $\tau_{k+1} ... \tau_l \sim \tau'$, тогда учитывая принцип ослабления корреляций для величин χ_l имеем

$$\widetilde{\chi}_{s+1}(\tau_1...\tau_{s+1})\underset{\tau-\tau'\to\infty}{\rightarrow}\left\{\chi_k-\sum_{l=1}^{k}\widetilde{\chi}_l\chi_{k-l}\right\}\chi_{s+1-k}.$$

Откуда в силу (29) и следует соотношение (30) для $l=s+1$.

Подчеркнем, что среднее $\chi_s(\tau_1 ... \tau_s)$ симметрично относительно перестановки аргументов $\tau_1 ... \tau_s$, тогда как величина $\widetilde{\chi}_s(\tau_1...\tau_s)$ указанным свойством не обладает. Определяемые соотношением (29) величины являются "упорядоченными кумулянтами" ван Кампена. Однако ван Кампен лишь дал описание процедуры построения упорядоченных кумулянтов, не приводя в своей работе [7] соотношение типа (29). Свойство величин $\widetilde{\chi}_l$, устанавливаемое теоремой 1, является отправным моментом в исследовании асимптотической структуры оператора эволюции.

В качестве примера приведем выражения величин χ_s и $\widetilde{\chi}_s$ для стационарного гауссовского процесса. Согласно определению (2), имеем $\chi_s(\tau_1...\tau_s)=\int dP_\varphi\varphi(\tau_1)...\varphi(\tau_s)$, где P_φ – гауссовская вероятностная мера, которую мы зададим таким образом

$$dP_\varphi=\frac{1}{(2\pi)^{s/2}\sqrt{\det(\tau_i-\tau_j)}}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=}^{s}g^{-1}(\tau_i-\tau_j)\varphi(\tau_i)\varphi(\tau_j)d\varphi(\tau_1)...d\varphi(\tau_s)\right\}.$$

Следовательно, имеют место равенства

$$\chi_{2l+1}(\tau_1...\tau_{2l+1})=0,$$
$$\chi_{2l}(\tau_1...\tau_{2l})=\sum g'g(\tau_1...\tau_2)...g(\tau_{2l-1}...\tau_{2l}),$$
$$l=0,1,2,... \tag{32}$$

Сумма в (32) распространяется на всевозможные разбиения $\tau_1...\tau_{2l}$ на пары. Число разбиений, очевидно, есть $(2l-1)!!=(2l)!/(2^l l!)$. Функция $g(\tau)$ обладает конечной "шириной размытия" τ_0, т.е. функция$g(\tau)$ заметно отлична от нуля лишь при $\tau\le\tau_0$. Это свойство функции $g(\tau)$ обеспечивает выполнимость принципа ослабления корреляций для величин χ_{2l}, определяемых формулой (32).

Величины $\widetilde{\chi}_{2l}$ можно находить из рекурентного соотношения (31) с использованием выражения (32). Легко видеть, что имеют место следующие соотношения

$$\widetilde{\chi}_2(\tau_1,\tau_2)=g(\tau_1-\tau_1),$$
$$\widetilde{\chi}_4(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4)=g(\tau_1-\tau_3)g(\tau_2-\tau_4)+$$
$$+g(\tau_1-\tau_4)g(\tau_2-\tau_3).$$

В общем случае может быть установлена следующая формула

$$\widetilde{\chi}_{2l}(\tau_1,...,\tau_{2l})=\sum g'g(\tau_1-\tau_k)...g(\tau_{k-1}-\tau_{2l}), \tag{33}$$

где суммирование распространяется только на такие перестановки $\tau_1\ldots\tau_{2l}$, для которых в силу ограничения $\tau_1 > \tau_2 > \ldots > \tau_{2l}$ и того обстоятельства, что функция $g(\tau_i - \tau_j)$ отлична от нуля только при $\tau_i \sim \tau_j$ (с точностью τ_0), аргументы $\tau_1\ldots\tau_{2l}$ лежат вблизи друг друга, $\tau_1 \sim \tau_2 \sim \ldots \sim \tau_{2l}$. Число членов P_l в сумме (33) может быть определено из реккурентного соотношения $P_l = (2l-1)!! - \sum\limits_{j=1}^{l-1} P_j \left[2(l-j)-1\right]!!$, ($P_1 = 1$, $P_2 = 2$, $P_3 = 10$, $P_4 = 74$, ...).

Конструкция (33) в силу построения, с одной стороны, удовлетворяет соотношение (29), а, с другой стороны, обеспечивает выполнимость теоремы 1.

При изучении корреляционных функций мы столкнемся с величинами $\widetilde{\chi}_{l,s}$, которые определяются реккурентным соотношением

$$\chi_{n+s}(\tau_1..\tau_s,\tau_{s+1}..\tau_{s+n}) = \sum_{l=0}^{n} \widetilde{\chi}_{l,s}(\tau_1..\tau_{l+s})\chi_{n-l}(\tau_{l+s+1}..\tau_{s+n}),$$

$$\widetilde{\chi}_{l,0} = \widetilde{\chi}_l,\ s = 0, 1, 2, \ldots,\ n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (34)$$

Займемся изучением свойств величин $\widetilde{\chi}_{l,s}$. Обозначим через $\widetilde{D}_{l,s}$ такую область переменных $\tau_1\ldots\tau_{l+s}$, в которой $\tau_1 \sim \ldots \sim \tau_s > \tau_{s+1} > \ldots > \tau_{l+s}$. Тогда справедлива теорема [1].

<u>Теорема 2</u>. Пусть $\tau_1 \sim \ldots \sim \tau_{l+s} \in \widetilde{D}_{l,s}$, $\tau_{s+1}\ldots\tau_p \sim \tau$ и $\tau_{s+1}\ldots\tau_{l+s} \sim \tau'$. Тогда, если χ_l удовлетворяют принципу ослабления корреляций, то

$$\widetilde{\chi}_{l,s}(\tau_1\ldots\tau_{l+s}) \underset{\tau-\tau'\to\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad (35)$$

Эта теорема показывает, что в области $\widetilde{D}_{l,s}$ величина отлична от нуля только если $\tau_1 \ldots \tau_{l+s}$ отличаются друг от друга не более, чем на радиус корреляции τ_0 случайного процесса.

Доказательство. Для доказательства перепишем соотношение (34) в следующем виде

$$\widetilde{\chi}_{n,s}(\tau_1..\tau_{n+s}) = \chi_{n+s}(\tau_1..\tau_{n+s}) - \sum_{l=0}^{n-1}\widetilde{\chi}_{l,s}(\tau_1..\tau_{l+s})\chi_{n-l}(\tau_{l+s+1}..\tau_{s+n}).$$

Доказательство проведем методом математической индукции. Непосредственной проверкой легко убедиться, что $\widetilde{\chi}_{1,s}(\tau_1\ldots\tau_s,\tau_{s+1}) \underset{\tau-\tau_{s+1}\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Пусть соотношение (35) справедливо для $l = 1, 2, \ldots n-1$ и любом $p, s+1 \le p \le s+l-1$. Докажем справедливость этого соотношения для $l = n$. Пусть $\tau_{s+1}\ldots\tau_p \sim \tau$, $\tau_{p+1}\ldots\tau_{l+s} \sim \tau'$, тогда, учитывая принцип ослабления корреляций для величин χ_l, имеем

$$\widetilde{\chi}_{n,s}(\tau_1\ldots\tau_{n+s}) \underset{\tau-\tau'\to\infty}{\longrightarrow} \left\{\chi_{s+p} - \chi_s\chi_p - \sum_{l=1}^{p}\widetilde{\chi}_{l,s}\chi_{p-l}\right\}\chi_{n-p}.$$

Откуда в силу (34) и следует соотношение (35) для $l = n$.

Исходя из определения (34), получим одно полезное в дальнейшем соотношение. Из формулы (34) следует, что

$$\sum_{l=0}^{n}\widetilde{\chi}_{l,s}(\tau_1\ldots\tau_{l+s})\chi_{n-l}(\tau_{l+s+1}\ldots\tau_{s+n}) =$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1}\widetilde{\chi}_{l,s+1}(\tau_1\ldots\tau_{l+s}\tau_{l+s+1})\chi_{n-l-1}(\tau_{l+s+2}\ldots\tau_{s+n}).$$

Будем смотреть на это соотношение, как на тождество. Представим это тождество в следующем виде $\widetilde{\chi}_{0s}\chi_n + \sum\limits_{l=0}^{n-1}\widetilde{\chi}_{l+1}\chi_{n-l-1} = \sum\limits_{l=0}^{n-1}\widetilde{\chi}_{l,s+1}\chi_{n-l-1}$. Воспользовавшись определением (29), получим отсюда $\widetilde{\chi}_{0s}\chi_n + \sum\limits_{l=0}^{n-1}\widetilde{\chi}_{l+1}\chi_{n-l-1} = \sum\limits_{l=0}^{n-1}\left\{\widetilde{\chi}_{0,s}\widetilde{\chi}_{l+1} + \widetilde{\chi}_{l+1,s} - \widetilde{\chi}_{l,s+1}\right\}\chi_{n-l-1} = 0$. Так как выражение, стоящее в фигурных скобках не зависит от индекса n, то легко видеть, что оно должно быть равно нулю. Таким образом, мы приходим к следующему соотношению

$$\widetilde{\chi}_{0s}\widetilde{\chi}_{l+1} + \widetilde{\chi}_{l+1,s} - \widetilde{\chi}_{l,s+1}. \qquad (36)$$

Заметим, что полученное нами соотношение (36) позволяет выразить двухиндексную величину через одноиндексные величины, а именно $\widetilde{\chi}_{l,s} = \chi_{l+s} - \sum\limits_{k=0}^{l-1}\chi_{s+k}\widetilde{\chi}_{l-k}$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, $s = 0, 1, 2, \ldots$

СУММИРОВАНИЕ СЕКУЛЯРНЫХ ЧЛЕНОВ

Хорошо известен факт наличия секулярных по времени членов в ряду теории возмущений по взаимодействию для статистического оператора многочастичной системы и разработана процедура суммирования асимптотически главных при $t \to \infty$ членов, приводящая к огрубленному статистическому оператору.

В этом разделе путем выделения и суммирования секулярных членов в ряду теории возмущений по случайному полю найдем огрубленный или асимптотический оператор эволюции $S(t)$ в случае пространственной однородности как начального состояния системы $f(0)$, так и самого случайного процесса.

В формуле (22) объединим для упрощения записи интегралы по q_i и τ_i в интегралы по τ_i и, явно раскрывая T-произведение, получим

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)}(t),$$

$$S^{(n)}(t) = (-i)^n \int_0^t d\tau_1 \ldots \int_0^{\tau_{n-1}} d\tau_n \chi_n(\tau_1 \ldots \tau_n) \times$$

$$\times a(\tau_1) \ldots a(\tau_n). \qquad (37)$$

Подставляя в это выражение определение (29) величины χ_n, найдем

$$S^{(n)}(t) = \sum_{k=1}^{n} (-i)^k \int_0^t d\tau_1 \ldots \int_0^{\tau_{k-1}} d\tau_k \widetilde{\chi}_k(\tau_1 - \tau_2, \ldots, \tau_1 - \tau_k) \times,$$

$$\times a(\tau_1) \ldots a(\tau_k) S^{(n-k)}(\tau_k);$$

$$S^{(0)} = 1,\ n = 1, 2, \ldots \qquad (38)$$

Входящая в это выражение величина $\widetilde{\chi}_k$ зависит от разности временных аргументов в силу стационарности случайного поля. Это уравнение будет служить нам основой для получения путем суммирования секулярных членов асимптотического при $t \to \infty$ выражения для $S(t)$.

Заметим, что содержащаяся в $S^{(n)}(t)f(0)$ величина $a(\tau_1)\ldots a(\tau_n)f(0)$ коммутирует с оператором импульса в силу пространственной однородности как начального состояния, так и случайного процесса. Поэтому эту величину можно представить в виде

$$a(\tau_1)\ldots a(\tau_n)f(0) = \exp(-i\Lambda^{(0)\tau})\, a(\tau_1)\ldots a(\tau_n) \times$$
$$\times \exp(+i\Lambda^{(0)\tau})f(0) = a(\tau_1 - \tau)\ldots a(\tau_n - \tau)f(0).$$

Таким образом, оператор $a(\tau_1) \ldots a(\tau_n)$ в (38) фактически зависит только от разностей $\tau_i - \tau_j$, если учесть, что этот оператор всегда действует на пространственно-однородное состояние $f(0)$. Ввиду сказанного, естественно представить асимптотическое при $t \to \infty$ выражение для $S^{(n)}(t)$ в виде полинома степени n по t

$$S^{(n)}(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{S}^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^{(n)} t^i. \qquad (39)$$

Так как по определению функция $\widetilde{\chi}_k$ $(\tau_1 - \tau_2, \ldots, \tau_1 - \tau_k)$ в области $\tau_1 > \tau_2 > \ldots > \tau_k$ отлична от нуля только при $\tau_1 \sim \tau_2 \sim \ldots \sim \tau_k$, то асимптотическое представление для $S^{(n)}(t)$ имеет вид

$$S^{(n)}(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{S}^{(n)}(t) = \sum_{k=1}^{n} (-i)^k \int_0^t d\tau_1 \ldots$$

$$\ldots \int_0^{\tau_{k-1}} d\tau_k \widetilde{\chi}_k(\tau_1 - \tau_2, \ldots, \tau_1 - \tau_k) a(\tau_1) \ldots a(\tau_k) S^{(n-k)}(\tau_k) +$$

$$+ \sum_{k-1}^{n} d_k^{(n)}, \qquad (40)$$

$$d_k^{(n)} = (-i)^k \int_0^{\infty} d\tau_1 \ldots \int_0^{\tau_{k-1}} d\tau_k \widetilde{\chi}_k(\tau_1 - \tau_2, \ldots \tau_1 - \tau_k) \times$$

$$\times a(\tau_1) \ldots a(\tau_k) \left(S^{(n-k)}(\tau_k) - \widetilde{S}^{(n-k)}(\tau_k)\right).$$

Подставляя в выражение (40) полиномиальное представление (39) для $S^{(n-k)}(\tau_k)$, и, замечая, что $\tau_k^l = \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} \tau_1^{l-i} (\tau_k - \tau_1)^i$, получим

$$S^{(n)}(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} \sum_{i=0}^{l} \int_0^t d\tau_1 \alpha_l^{(n-k)} \binom{l}{i} \tau_1^{l-i} \Phi_k^{(i)} + \sum_{k=1}^{n} d_k^{(n)}, \qquad (41)$$

где $\binom{l}{i}$ – число сочетаний из l элементов по i, и

$$\Phi_k^{(i)}(\tau_1) = (-i)^k \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_0^{\tau_{k-1}} d\tau_k \widetilde{\chi}_k(\tau_1 - \tau_2, \ldots, \tau_1 - \tau_k) \times$$

$$\times a(\tau_1) \ldots a(\tau_k)(\tau_k - \tau_1)^i = \qquad (42)$$

$$= (-i)^k \int_{-\tau_1}^{\tau_{k-1}} d\tau_k \widetilde{\chi}_k(-\tau_2, \ldots, -\tau_k) a(0) a(\tau_2) \ldots a(\tau_k) \tau_k^i.$$

Для нахождения асимптотики первого слагаемого в правой части соотношения (41) нам понадобится следующая лемма.

Лемма.

$$\int_0^t d\tau_1 \tau_1^{l-i} \Phi_k^{(i)}(\tau_1) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{t^{l-i+1}}{l-i+1} b_k^{(i)} + c_{k,i}^{(l-i)}, \quad (43)$$

где

$$b_k^{(i)} = \lim_{\tau\to\infty} \Phi_k^{(i)}(\tau), \quad c_{k,i}^{(m)} = \int_0^\infty d\tau_1 \tau_1^m \left(\Phi_k^{(i)}(\tau_1) - b_k^{(i)}\right).$$

Доказательство. Действительно, поскольку согласно определению функция $(-\tau_2,\ldots,-\tau_k)$ в области $0 > \tau_2 > \tau_k$ отлична от нуля только при $\tau_i \sim \tau_0$, то выражение (41) имеет предел при $\tau_1 \to \infty$. Отсюда и следует формула (43) и выражения для величин $b_k^{(i)}$ и $c_{k,i}^{(m)}$.

Используя данную лемму, из соотношений (37), (41) нетрудно получить следующее уравнение:

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i^{(n)} t^i =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\left[d_k^{(n-k)} + \sum_{l=0}^{n-k}\sum_{m=0}^{l} \binom{l}{m} \left(\frac{t^{l-m+1}}{l-m+1} b_k^{(m)} + c_{k,l}^{(l-m)} \right) \alpha_i^{(n-k)} \right] +$$

$$+ c_{0,n}^{(0)} + t b_n^{(0)}.$$

Приравнивая операторы при одинаковых степенях t, получим реккурентное соотношение для $\alpha_i^{(n)}$

$$\alpha_0^{(n)} = \sum_{k=1}^{n-1}\left[d_k^{(n-k)} + \sum_{l=0}^{n-k}\sum_{m=0}^{l} \binom{l}{m} c_{k,l}^{(l-m)} \alpha_i^{(n-k)} \right] + c_{0,n}^{(0)}, \quad (44)$$

$$\alpha_i^{(n)} = \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-k}\sum_{m=0}^{l} \binom{l}{m} \frac{1}{i} \delta_{i,l-m+1} b_k^{(m)} \alpha_i^{(n-k)},$$

$$i = 1, 2, \ldots, n. \quad (45)$$

Асимптотический оператор $\widetilde{S}(t)$ эволюции согласно (39) дается формулой

$$\widetilde{S}(t) = \sum_{n=0}^\infty \sum_{i=0}^n \alpha_i^{(n)} t^i = \sum_{i=0}^n \beta_i t^i, \quad \beta_i = \sum_{n=i}^\infty \alpha_i^{(n)}.$$

Используя реккурентные соотношения (44), (45) для операторов $\alpha_i^{(n)}$, легко получить реккурентные соотношения для операторов β_i

$$\beta_0 = \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=1}^{n-1} d_k^{(n-k)} + \sum_{k=1}^\infty \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=0}^{l} \binom{l}{m} c_{k,m}^{(l-m)} \beta_l + 1, \quad (46)$$

$$\beta_i = \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{i} \binom{i+m-1}{m} b^{(m)} \beta_{i+m-1}, \; i = 1, 2, \ldots \quad (47)$$

$$b^{(m)} = \sum_{k=1}^\infty b_k^{(m)}. \quad (48)$$

Решение уравнения (47) будем искать в виде

$$\beta_i = \Lambda_i \beta_0 / i!. \quad (49)$$

Подстановка этого выражения в формулу (46) дает уравнение для определения β_0, решая которое, мы получим

$$\beta_0 \equiv \widetilde{S}_0 = \left[1 - \sum_{k=1}^\infty \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=0}^{l} \binom{l}{m} c_{k,m}^{(l-m)} \frac{L^l}{l!} \right]^{-1} \left(1 + \sum_{m=0}^\infty \sum_{k=1}^{n-1} d_k^{(n-1)} \right).$$

(50)

Подставляя выражение (49) в формулу (47), найдем следующее уравнение для определения величины L

$$L = \sum_{m=0}^\infty \frac{b^{(m)} L^{(m)}}{m!}. \quad (51)$$

Таким образом, асимптотическая (при $t \to \infty$) структура оператора эволюции $S(t)$ имеет вид [1, 2, 8, 9] $S(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \widetilde{S}(t) = \exp(Lt)\widetilde{S}_0$, где величины $\widetilde{S}_0$ и L определяются формулами (50) и (51), соответственно.

Зная структуру оператора $\widetilde{S}(t)$, мы тем самым знаем асимптотическое поведение функции распределения

$$f(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \exp(Lt)\widetilde{S}_0 f(0) \equiv \widetilde{f}(t),$$

а, следовательно, и вид кинетического уравнения, которому она подчиняется,

$$\dot{\widetilde{f}}(t) = L\{\widetilde{f}(t)\},$$

где $L\{\widetilde{f}(t)\} = L\widetilde{f}(t)$. Функция $\widetilde{f}(t)$ и есть огрубленная функция распределения, приближающая точную функцию распределения $f(t)$. Из этих формул видно, что “начальной функцией распределения” по отношению к кинетическому этапу эволюции является функция $\widetilde{S}_0 f(0)$. Существование оператора $\widetilde{S}_0$ обусловлено конечной “шириной размытия” τ_0 величин $\widetilde{\chi}$ данного случайного поля, тогда как для δ-коррелированного поля с нулевой “шириной размытия” оператор $\widetilde{S}_0 = 1$. Время τ_0 называют также временем хаотизации. Отметим, что время хаотизации может быть связано не только с временными свойствами величин $\tilde{\chi}$, но и определяться пространственной структурой упорядоченных кумулянтов и динамикой задачи. Такая ситуация возникает при изучении кинетических явлений в системе частиц, рассеивающихся на неподвижных случайно распределеннных примесных центрах. Рассмотрению случайных процессов такого рода посвящена обширная литература.

ДВУМЕРНАЯ ГИДРОДИНАМИКА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ, ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ГРАДИЕНТАМ, КОЭЭФИЦИЕНТАМИ ПЕРЕНОСА

В этом разделе вычислены кинетические коэффициенты, определяемые как временные интегралы от соответствующих корреляционных функций, которые логарифмически расходятся во времени. Это свидетельствует о том, что стандартная теория возмущений по волновому вектору q начиная с квадратичных членов неприменима. Поэтому необходимо построить модифицированную теорию возмущений свободную от расходимостей. Полученные в координатном представлении уравнения двумерной гидродинамики имеют вид:

$$\frac{d\delta p}{\partial t}+\nabla(p\delta u)=0,$$

$$\rho\frac{d\delta u_k}{dt}=-\frac{d}{dx_k}\delta\rho+\frac{d}{dx_i}\left(\hat{\eta}\frac{d\delta u_k}{dx_i}\right)+$$

$$+\frac{d}{dx_k}\left(\hat{\zeta}+\frac{\hat{\eta}}{\zeta}\right)\frac{d\delta u_i}{dx_l},$$

$$\frac{æ\delta\varepsilon}{dt}=-\rho h\frac{d\delta u_i}{dx_i}+\frac{d}{dx_i}\left(\hat{x}\frac{d\delta T}{dx_i}\right),$$

здесь $\hat{\eta}$, $\hat{\zeta}$, $\hat{x}$ – интегральные операторы, действие которых на некоторую функцию $f(x)$ определяются соотношением

$$\hat{\zeta}(x)=A\int dx'K(x-x')f(x'),$$

$$\hat{\eta}(x)=B\int dx'K(x-x')f(x'),$$

$$\left(\hat{\zeta}+\frac{\hat{\eta}}{3}\right)f(x)=C\int dx'K(x-x')f(x'),$$

при этом Фурье-компонента функции $K(x)$ имеет асимптотику по пространственным градиентам вида: $K(q)\underset{q\to 0}{\longrightarrow}\sqrt{-\ln qr_0}$.

Полученные уравнения двумерной гидродинамики являются нелокальными по пространственным градиентам, поскольку матрица эволюции в такой теории возмущений в области малых q неаналитична по q.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные в статье теоретические результаты, помимо фундаментального значения, дают возможность более адекватного построения математических и компьютерных моделей поверхностей различной структуры, а также протекающих физических процессов при их анализе на микро и наноуровнях. Применяемый метод позволяет оптимизацию вычислительных процедур, учет нерегулярных составляющих поверхности, контроль истинности результатов моделирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bogolyubov N.N. In Studies in ststistical mechanics// Edited by J. de Boer and G.E. Uhlenbeck, Amsterdam. – 1962. – Vol. 1.
2. Akhiezer A.I., Peletminskii S.V. Methods of Statistical Physics// International series in natural philosophy. Pergamon Press. – 1981. – Vol. 104. – P. 450
3. Laskin N.V., Peletminskii S.V., Prikhod'ko V.I. To kinetic theory of systems in random fields // Teor. Mat. Fiz. – 1978. – Vol. 34, № 2. – P. 244-255.
4. Laskin N.V., Peletminskii S.V., Prikhod'ko V.I. On the dynamical theory of systems in random fields // Jornal of Physical Studies. – 1998. – Vol. 2. – № 1. – P. 6-15.
5. Исаев А.А., Пелетминский С.В., Приходько В.И. Двумерная нелокальная гидродина-

мика с учетом флуктуаций // Теор. Мат. Физ. – 1989. – Том 78, № 1. – С. 94-107.

6. Peletminskii S.V., Prikhod'ko V.I. Method of asymptotical operators in statistical mechanics I. Spatially homogeneous states // Teor. Mat. Fiz. – 1972. –Vol. 12, № 1. – P. 88-105.
7. S.V. Peletminskii, V.I. Prikhod'ko. Method of asymptotical operators in statistical mechanics II. Spatially inhomogeneous states // Teor. Mat. Fiz. – 1972. - Vol. 12. - No. 2. - P. 283-301.

ДО КІНЕТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ЧАСТИНОК ПОВЕРХНІ У МЕТОДІ СКОРОЧЕНОГО ОПИСУ

В.І. Приходько, В.М. Кавчук, П.В. Турбін

У роботі, використовуючи метод скороченого опису [1, 2], побудована статистична механіка систем, що знаходяться у випадкових полях [3, 4], зокрема теорія збурень за взаємодією з випадково розташованими на поверхні домішками, дислокаціями, вакансіями та іншими нерегулярними структурами. У теорії збурень за взаємодією вільній від розбіжностей [5] створена двовимірна гідродинаміка (частинок поверхні) з урахуванням флуктуацій. Знайдено нелокальні кінетичні коефіцієнти першої і другої в'язкості, теплопровідності.

TO KINETIC THEORY OF PARTICLES ON SURFACE IN METHOD OF BRIEF DESCRIPTION

V.I. Prikhod'ko, V. M. Kavchuk, P.V. Turbin

A stochastic method of reduced description of systems in random fields (with noise) is developed. The method is based on the fact that among distributions of the solutions stochastic differential equations there are ones which may be described similar to the kinetic description of states in spatial mechanics. The problem of the construction of asymptotic evolution operator is resolved by summing up secular terms of the perturbation series in a stochastic fields. The modified diverence-free perturbation theory for the evolution matrix of two-dimensional hydrodynamics for particles of surface is founded. Equations of two-dimensional hydrodynamics are obtained which non-local in space of kinetic transport coefficients.