

## ВЗАИМНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ И ХАОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Г.В. Манучарян

*Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»  
Украина*

Поступила в редакцию 05.12.2003

Предлагается новый подход к определению начала хаоса, основанный на взаимной неустойчивости фазовых траекторий нелинейных механических систем с несколькими положениями равновесия. Сравнение изначально близких траекторий с использованием некоторого следствия из классического определения устойчивости по Ляпунову позволяет наблюдать процесс появления и расширения областей хаотического поведения при изменении управляющих параметров системы.

### ВВЕДЕНИЕ

Хаотическое поведение нелинейных систем является одним из важнейших объектов исследований в последние десятилетия. Первые идеи о существовании хаоса могут быть найдены в работах Пуанкаре [1] и Бирхгофа [2]. В монографии Муна [3] сделан детальный обзор критериев начала хаоса: удвоение периода, перекрытие резонансов в консервативных системах, непрерывность спектра, положительность констант Ляпунова и др. [4 – 7]. Для исследования начала хаоса в нелинейных механических системах с несколькими положениями равновесия используется критерий образования гомо- и гетероклинических траекторий [1, 3, 6 – 7]. Пересечение устойчивого и неустойчивого многообразий седловой точки при отображении Пуанкаре порождает в окрестности каждой гомоклинической точки отображение типа подковы Смейла, которое приводит к непредсказуемости и чувствительности к изменению начальных условий, что является отличительным признаком хаоса. Близкие в начальный момент в фазовом пространстве траектории экспоненциально разбегаются [3, 8 – 9]. Таким образом, анализ взаимной неустойчивости фазовых траекторий в окрестности сепаратрисы системы поможет исследовать процесс появления и увеличения областей неустойчивости при изменении значений управляющих параметров.

### СЛЕДСТВИЕ ИЗ КЛАССИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ

Поскольку задача устойчивости хаотических колебаний не может быть решена аналитически, ставится задача получить из классического определения устойчивости по Ляпунову некоторые следствия, которые позволят определять границы областей неустойчивости в пространстве пара-

метров системы с использованием числового расчета на компьютере.

Рассмотрим определение устойчивости по Ляпунову, которое может быть сформулировано, например, таким образом: решение  $y = 0$  устойчиво, если для любого  $\varepsilon > 0$  можно найти такую постоянную  $\delta > 0$ , что для всех  $y_0 \in N_\delta^{(0)}$  и  $t \geq 0$  будет выполнено условие  $y(t) \in N_\varepsilon^{(0)}$ . Здесь  $N_\delta^{(0)}$  и  $N_\varepsilon^{(0)}$  означают  $\delta$  и  $\varepsilon$ -окрестность решения  $y = 0$ . Такая окрестность может быть выбрана по-разному, например,  $N_\sigma = \{y \in R^n: \|y\| \leq \sigma\}$ , где  $\|\cdot\|$  – норма в пространстве решений.

Введем связь между величиной  $\varepsilon$  и начальным значением переменной  $y$ . Пусть

$$\varepsilon = \rho \|y_0\| \leq \rho \delta \quad (\rho = \text{const}) \quad (1)$$

Условие (1) означает, что величина  $\delta$  не может быть произвольно малой, так как  $\delta \geq \varepsilon/\rho$ . Перепишем последнее неравенство следующим образом:  $\rho \geq \varepsilon/\delta$ ; таким образом, постоянная  $\rho$  – это верхний предел отношения  $\varepsilon/\delta$ . Кроме того, из условия устойчивости по Ляпунову, принимая во внимание неравенство (1), находим, что

$$\|y(t)\| \leq \rho \|y(0)\|.$$

Получаем из предыдущего следующий критерий: решение  $y = 0$  становится неустойчивым, если

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|y(t)\| \leq \rho \|y(0)\|. \quad (2)$$

Предложенный критерий устойчивости (2), полученный при условии, что величина не может быть сколь угодно малой, в некоторых работах назван “ограниченным критерием устойчивости по Ляпунову” [10 – 11].

Обсудим выбор до сих пор не определенных величин  $\rho$  и  $T$ . Здесь значение  $\rho^{-1}$  – это мера малости начальных вариаций по отношению к максимально допустимым вариациям для любых  $t \geq 0$ . Возрастание величины  $\rho$  означает, что допустимые начальные значения вариаций убывают.

Имеется некоторый произвол в выборе величины  $\rho$ , и это не случайно, так как в области неустойчивости с течением времени вариации выйдут за пределы окрестности исходного решения при любом выборе  $\rho$ . Мы можем выбрать, например, с равным десяти.

Обсудим теперь выбор величины  $T$ . Анализ устойчивости производится с использованием компьютерного расчета на основе стандартной программы Рунге-Кутты. Расчет ведется в узлах некоторой сетки в избранной области плоскости (или пространства) параметров системы. Вычисления продолжаются до тех пор, пока в выбранном масштабе сетки не стабилизируются границы областей устойчивости и неустойчивости. Это и есть принципиальный критерий для выбора времени вычислений  $T$ . Ясно, что если шаг сетки неограниченно убывает, то время расчета стремится к бесконечности.

Следует заметить, что величины  $\rho$  и  $T$  связаны между собой. Для того, чтобы установить это, обсудим связь критерия (2) с определением так называемых постоянных Ляпунова. Появление положительных постоянных Ляпунова означает глобальную взаимную неустойчивость фазовых траекторий, что является одним из критериев начала хаотических колебаний в нелинейной системе. Постоянную Ляпунова можно ввести, например, таким образом:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|y(t)\|}{\|y(0)\|}, \quad \text{откуда следует, что}$$

$$\frac{\|y(t)\|}{\|y(0)\|} = e^{(\lambda + \Delta)t}, \quad (3)$$

где  $\Delta \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Сравнивая (3) и (2), получаем неравенства

$$\rho \leq e^{(\lambda + \Delta)T}, \quad T \geq \frac{\ln \rho}{\lambda + \Delta} \quad (\text{при } \lambda > 0), \quad (4)$$

где  $T$  – максимальное время расчета. Таким образом, постоянные  $\rho$  и  $T$ , которые вводятся в критерии (2), оказываются связанными неравенствами (4). Ясно, что увеличение величины  $\rho$  ведет к увеличению времени расчета (это подтверждается и конкретными расчетами). С приближением к границе областей устойчивости и неустойчивости значения постоянной Ляпунова  $\lambda$  уменьшаются и время расчета увеличивается. Однако значение  $\rho$  не может быть выбрано слишком малым, поскольку вблизи границы значения  $\lambda$  малы, и время расчета будет зависеть от неопределенной величины  $\Delta$ .

Заметим, что критерий, подобный (2), используется в работе [12]. Однако там никак не обсуждается выбор времени расчета.

### МЕТОД ВЗАИМНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ

Предлагаемый новый метод исследования взаимной неустойчивости фазовых траекторий позволяет диагностировать, находится ли исследуемая система в хаотическом состоянии или нет. Хаос в детерминированных системах подразумевает чувствительную зависимость от начальных условий. Это означает, что две траектории, близкие друг другу в фазовом пространстве в некоторый начальный момент времени, экспоненциально расходятся за относительно малое в среднем время. Именно эта взаимная неустойчивость фазовых траекторий используется в качестве критерия начала хаотического поведения в динамической системе.

Новый подход к определению начала хаотических колебаний в нелинейных системах основан на описанном следствии из классического определения устойчивости по Ляпунову. Сравниваются траектории с близкими начальными условиями. Следствие из классического определения устойчивости по Ляпунову (2) позволяет оценить взаимную устойчивость/неустойчивость этих траекторий. Вычисления в узлах некоторой сетки в избранной области фазового пространства позволяют наблюдать процесс появления и расширения областей хаотического поведения при изменении параметров системы.

Рассмотрим произвольное нелинейное векторное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (5)$$

где  $x \in R^n, R^{n+1} \rightarrow R^n$ . Рассмотрим в фазовом пространстве прямоугольную область  $a_i \leq x_i \leq b_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), где  $a_i, b_i$  – вещественные числа. Введем в этой области некоторую сетку, используя приращения  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ . Узлы сетки

$P_{i_1 i_2 \dots i_n} (x_{10}^{i_1}, x_{20}^{i_2}, \dots, x_{n0}^{i_n})$  выбираются в качестве начальных точек для некоторых решений  $x_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(1)}(t)$  уравнения (5). Возьмем также другие начальные точки, близкие к выделенным точкам  $P_{i_1 i_2 \dots i_n}$ , а именно, точки  $Q_{i_1 i_2 \dots i_n} (x_{10}^{i_1} + \Delta x_1^0, x_{20}^{i_2} + \Delta x_2^0, \dots, x_{n0}^{i_n} + \Delta x_n^0)$ , где значение нормы  $\Delta x^0 = (\Delta x_1^0, \Delta x_2^0, \dots, \Delta x_n^0)$  достаточно мало, и рассмотрим, соответственно, дру-

гие решения  $x_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(2)}(t)$ . Теперь будем сравнивать траектории, исходящие из близких начальных точек, используя описанный выше критерий (2).

Будем полагать, что эти траектории взаимно неустойчивы, если

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|x_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(1)}(t) - x_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(2)}(t)\| \geq \rho \|\Delta x^0\|. \quad (6)$$

Выбор констант  $\rho$ ,  $T$  осуществляется таким образом, как это обсуждалось выше.

На рис. 1 представлена схема исследования области фазового пространства размерности два описанным методом.

Исследование этим методом следует осуществлять в случаях, когда трение в системе не мало, так как все траектории консервативных систем являются неустойчивыми по Ляпунову.

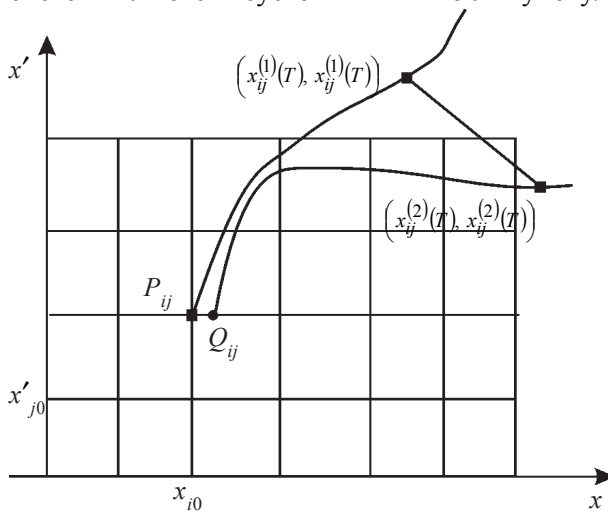


Рис. 1. Иллюстрация исследования методом взаимной неустойчивости фазовых траекторий для фазового пространства размерности два.

**НЕАВТОНОМНОЕ УРАВНЕНИЕ ДУФФИНГА**

Рассмотрим неавтономное уравнение Дуффинга [3, 7]:

$$y'' + \delta y' - y + y^3 = f \cos \omega t. \quad (7)$$

Выделим следующую область на фазовой плоскости уравнения (7):  $0 \leq y \leq 1,6$ ;  $0 \leq y' \leq 0,8$ . Вводим в этой области сетку, используя приращения (шаги сетки)  $\Delta y = 0,02$ ,  $\Delta y' = 0,016$ .

Пусть теперь  $\rho = 10$ , а  $\Delta y_0 = 0,002$ ,  $\Delta y'_0 = 0$ . Результаты анализа устойчивости/неустойчивости фазовых траекторий уравнения Дуффинга при различных значениях амплитуды внешнего воздействия  $f$  с использованием условия (6) представлены на рис. 2, 3. На рисунках выделены начальные точки, которые отвечают взаимно неустойчивым траекториям. Вычисления (для выбранной сетки в рассматриваемой области фазо-

вой плоскости уравнения) показывают, что для  $f < 0,26$  взаимная неустойчивость фазовых траекторий наблюдается только лишь вблизи ветвей сепаратрисы. Для больших значений амплитуды  $f$  области неустойчивости начинают очень быстро расширяться. Это и есть переход к хаотическому поведению в системе. Время расчета  $T$  может быть выбрано равным 75, поскольку стабилизация области неустойчивости происходит на этом временном интервале.

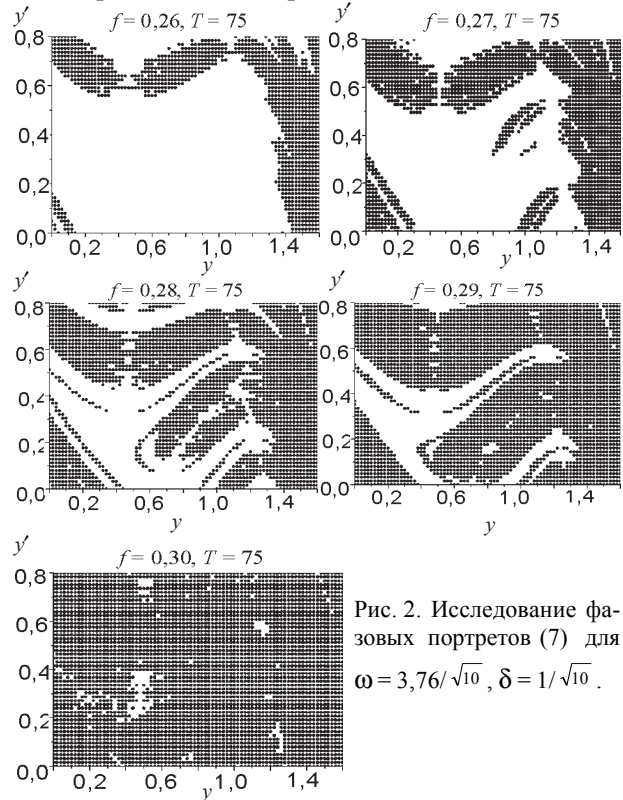


Рис. 2. Исследование фазовых портретов (7) для  $\omega = 3,76/\sqrt{10}$ ,  $\delta = 1/\sqrt{10}$ .

На рис. 3 представлены фазовые портреты областей устойчивости/неустойчивости при значениях параметра  $f$ , которые больше значений, отвечающих началу хаоса. Видно, что при возрастании параметра область неустойчивости вначале расширяется на всю исследуемую область фазового пространства, однако при дальнейшем увеличении  $f$  появляется область устойчивости, которая исчезает при дальнейшем увеличении этого параметра. Полученный результат соответствует исследованиям Холмса [7]. В этой работе обнаружено наличие периодических решений именно в данном интервале значений параметра  $f$ .

**УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКА С КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА**

Рассмотрим уравнение, описывающее движение маятника с колеблющейся точкой подвеса [13 – 14]:



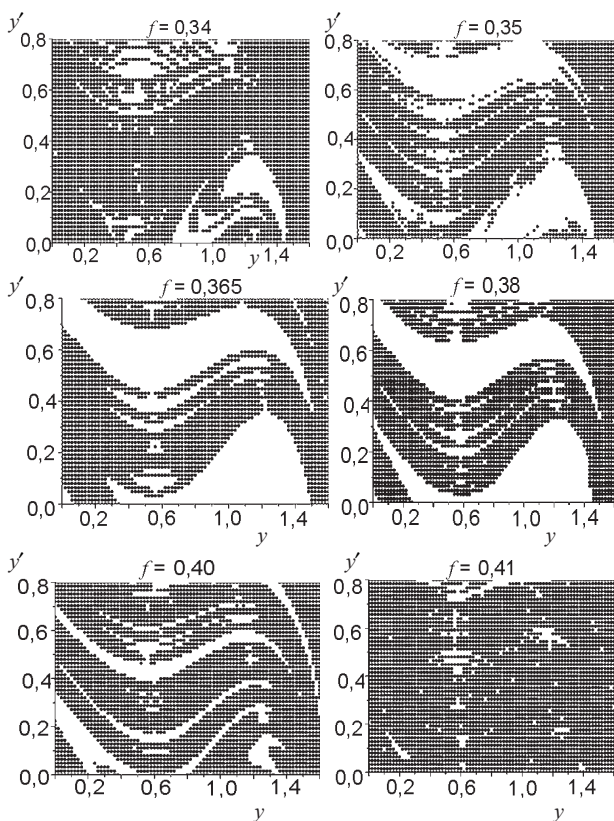


Рис. 3. Исследования фазовых портретов уравнения (7) для  $\omega = 3,76/\sqrt{10}$ ,  $\delta = 1/\sqrt{10}$  и больших значений амплитуды.

$$x'' + \delta x' + (1 + f \cos \omega t) \sin x = 0. \quad (8)$$

Выберем значение частоты внешнего воздействия, отвечающее параметрическому резонансу:  $\omega = 2$  [14].

Выделим следующую область на фазовой плоскости уравнения (8):  $-4 \leq x \leq 4$ ;  $-2,4 \leq x' \leq 2,4$ . Заддим шаг сетки  $\Delta x = 0,1$ ,  $\Delta x' = 0,1$ .

Пусть  $\rho = 10$ , а  $\Delta x_0 = 0,01$ . Результаты анализа устойчивости/неустойчивости с использованием критерия (6) (время стабилизации здесь  $T \approx 100$ ) представлены на рис. 4.

При значениях амплитуды колеблющей точки подвеса силы, меньших 0,2, неустойчивость фазовых траекторий наблюдается только вблизи гетероклинической траектории, однако при увеличении амплитуды области неустойчивости быстро расширяются, заполняя всю исследуемую область.

### УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ФЕРМЫ МИЗЕСА

Рассмотрим уравнение колебаний фермы Мизеса, обладающей возможностью прощелкивания [15]:

$$x'' + \delta x' - (1 + f \cos \omega t)x + x^3 = 0. \quad (9)$$

Выделим следующую область на фазовой плоскости уравнения (9):  $0 \leq x \leq 1,6$ ;  $0 \leq x' \leq 0,8$ . Рассмотрим сетку с шагом  $\Delta x = 0,02$ ,  $\Delta x' = 0,016$ .

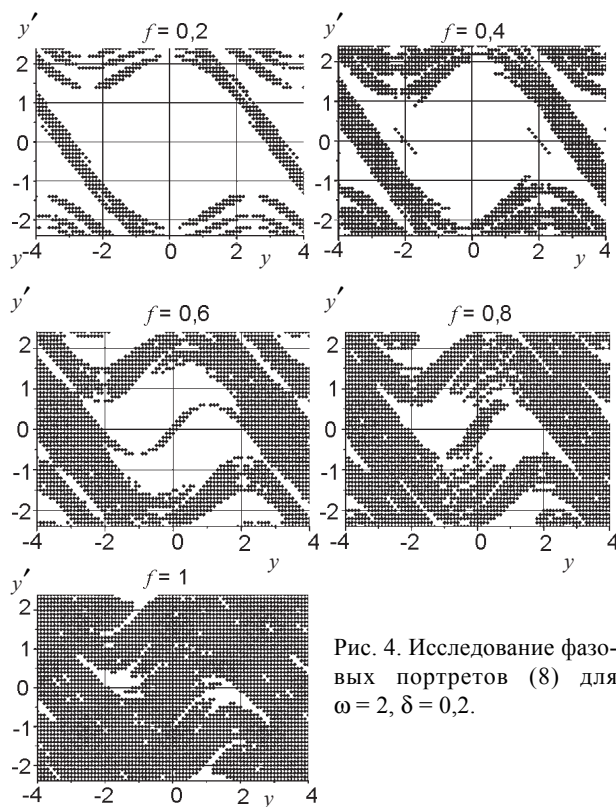


Рис. 4. Исследование фазовых портретов (8) для  $\omega = 2$ ,  $\delta = 0,2$ .

Пусть теперь  $\rho = 10$ , а  $\Delta x_0 = 0,002$ . Результаты анализа устойчивости/неустойчивости с использованием (6) представлены на рис. 5. Как видно из рисунка, быстрое расширение областей неустойчивости происходит при значениях амплитуды внешнего воздействия, чуть больших значения коэффициента трения.

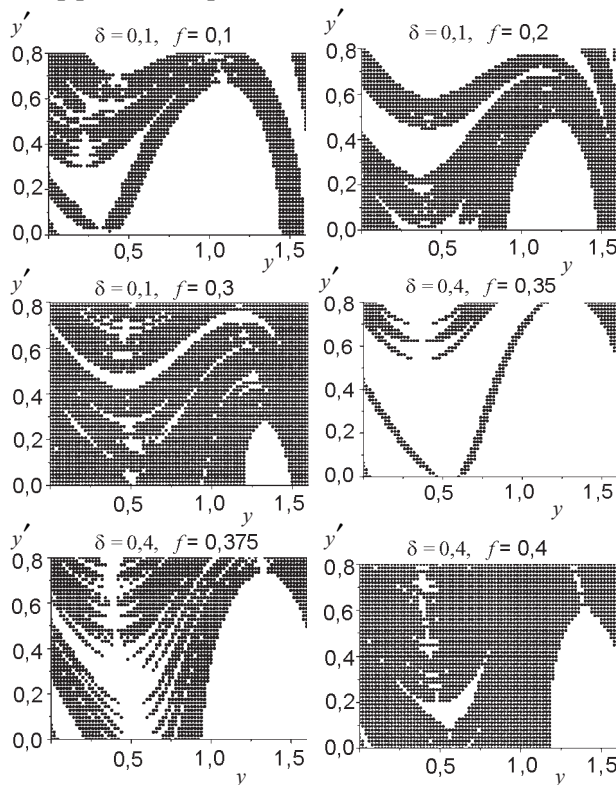


Рис. 5. Исследование фазовых портретов (9) для  $\omega = 1$ ,  $\delta = 0,1$ ,  $\delta = 0,4$  ( $T = 75$ ).

**ВЫВОДЫ**

Предложен новый численно-аналитический метод исследования начала хаотического поведения системы, основанный на критерии взаимной неустойчивости фазовых траекторий, для случая, когда диссипация системы не мала. Проведены численные расчеты начала хаоса для механических систем с несколькими положениями равновесия, описываемых уравнениями Дуфф-финга, параметрически возбуждаемого математического маятника и фермы Мизеса, обладающей возможностью прощелкивания. Реализация данного подхода в конкретных динамических системах дает возможность убедиться в том, что он является довольно общим, чтоб быть применимым к различным типам нелинейных систем.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Poincare H. Les Methods Nouvelles de la Mecanique Celeste. Vol. 3, Gauthier-Villars: Paris (1899).
2. Birhoff G.D. Sur l'existence de regions d'instabilite en Dynamique // Ann. Inst. H. Poincare, 1932. – 2.– P. 369 - 386.
3. Moon F.C. Chaotic Vibrations. Wiley, New York (1987).
4. Lorenz E.N. Deterministic non-periodic flow // J. Atmos.Sci., 1963. – 20. – P. 130 -141.
5. Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence // Common. Math. Phys., 1971. – P. 167 - 192.
6. Мельников В.К. Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Тр. Моск. мат. общества, 1963. – Т. 12. – С. 3 - 52.
7. Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. Springer-Verlag, New York (1993).
8. Ueda Y. Randomly transitional phenomena in the system governed by Duffing's equation // J.Stat.Phys, 1979. – 20. – P.181-196.
9. Wolf A. Quantifying chaos with Lyapunov exponents. Nonlinear Sci. Theory Appl. Ed. A.V.Holden, Manchester Univ. Press (1984).
10. Шматко Т.В. Анализ регулярных и хаотических колебаний в нелинейных упругих системах // Радиоэлектроника и информатика. – Харьков, ХТУРЭ, 2000. – №4. – С.56-61.
11. Шматко Т.В. Дослідження стійкості просторових форм вимушених згінних коливань нелінійних циліндричних оболонки // Вісник Київського університету. – Київ, КНУ ім. Т.Г.Шевченка, 2001. – №2. – С. 357-364.
12. Schiehlen W. Nonlinear oscillations in multibody systems // Proc. of 1<sup>st</sup> European Nonlinear Oscillations Conference. Hamburg, 1993. – P.85-106.
13. Leven R.W., Koch B.P. Chaotic behavior of a parametrically excited damped pendulum // Physics Letters, 1981. – Vol. 86A. – 2. – P.71-74.
14. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. Москва: Наука (1987).

**ВЗАЄМНА НЕСТІЙКІСТЬ ФАЗОВИХ  
ТРАЄКТОРІЙ ТА ХАОТИЧНЕ ПОВЕДІННЯ  
НЕЛІНІЙНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ**

**Г.В. Манучарян**

Пропонується новий підхід до визначення початку хаосу, який базується на взаємній нестійкості фазових траєкторій нелінійних механічних систем з декількома положеннями рівноваги. Порівняння близьких траєкторій з використанням деякого наслідку з класичного визначення стійкості по Ляпунову дозволяє спостерігати процес появи і розширення областей хаотичної поведінки при зміні керуючих параметрів системи.

**MUTUAL INSTABILITY OF PHASE  
TRAJECTORIES AND CHAOTIC BEHAVIOR  
OF MECHANICAL SYSTEMS**

**G.V. Manucharyan**

New approach for determining of the chaos onset based on mutual instability of phase trajectories in mechanical systems with several equilibrium positions. Comparing close at initial moment trajectories using some consequence from the classical definition of stability by Lyapunov allows to observe the process of appearance and enlarge of chaotic behavior regions while governed parameters are changing.