

УДК 532.66:532.528

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ УПРУГИХ СВОЙСТВ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ В МЕСТЕ РАСПОЛОЖЕНИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИ ОТДЕЛЕННОЙ ЧАСТИ ЭЛЕКТРОДНОГО ПОКРЫТИЯ МЕТОДОМ НИЗКОЧАСТОТНОЙ ТОМОГРАФИИ

В. Н. НИКИТЕНКО, М. Е. ЮРЧЕНКО

Киевский университет имени Тараса Шевченко

Получено 11.09.2003

Рассмотрена задача о продольных колебаниях пьезокерамического стержня с толщиной поляризации. Механическая неоднородность материала стержня обусловлена тем, что от рабочего электродного покрытия диэлектрическими промежутками отделен определенный участок. Для случая, когда электроды на отделенном участке разомкнуты, найдены собственные частоты колебаний стержня на первых нормальных модах. Согласно методу низкочастотной томографии восстановлены местоположение и приближенная форма неоднородности. Для реального пьезокерамического стержня экспериментально определены первые шесть резонансных частот как при сплошных, так и при отделенных электродах. Показано, что результаты экспериментальных исследований хорошо согласуются с расчетами.

Розглянуто задачу про поздовжні коливання п'єзокерамічного стержня з товщиною поляризацією. Механічна неоднорідність матеріалу стержня обумовлена тим, що від робочого электродного покриття діелектричними проміжками відділено певну ділянку. Для випадку, коли електроди на відділеній ділянці розімкнені, для перших нормальних мод знайдені власні частоти коливань. Згідно з методом низькочастотної томографії відновлені місцезнаходження й наближена форма неоднорідності. Для реального п'єзокерамічного стержня експериментально визначені перші шість резонансних частот як при суцільних, так і при відділених електродах. Показано, що результати експериментальних досліджень добре узгоджуються з розрахунками.

The problem on longitudinal fluctuations of a piezoceramic rod with the thickness polarization is considered. Mechanical inhomogeneity of the rod's material is caused due to separation of a certain part from its working electrode covering by dielectric intervals. For the case when the electrodes on the separated part are open the eigenfrequencies of rod's vibration on three lowest normal modes are found. According to the method of the low-frequency tomography the location and the approximate form of inhomogeneity are restored. For the real piezoceramic rod, the first six resonant frequencies are experimentally determined both at continuous and at separated electrodes. It is shown that the results of experimental study well agree with the calculations.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что собственные (резонансные) частоты колебаний упругих тел полностью определяются их геометрией и механическими свойствами. В статьях [1, 2] показано, что если для такого объекта теоретическим путем установлен полный (бесконечный) набор собственных частот и соответствующих им нормальных мод, то появляется возможность построить решение обратных краевых задач теории колебаний. Следуя сложившейся традиции, к обратным будем относить, в первую очередь, задачи по определению геометрии тела с известной плотностью и упругими свойствами при условии известных (теоретически или экспериментально определенных) собственных частот колебаний. Если же геометрию тела считать заданной, то спектральные методики решения такой задачи позволяют определить пространственное распределение его физических свойств.

Методы решения обратных задач, относящихся

к классу некорректных, получили интенсивное развитие в последние 30 лет. Этому в значительной степени способствовало появление достаточно мощных ЭВМ. Для задач, не являющихся корректными в классическом смысле, А. Н. Тихонов предложил [3] новое понятие корректности, которое является физически оправданным для многих прикладных моделей.

В работах известного математика М. Г. Крейна [4–6] математически строго решена задача об определении плотности неоднородной струны, если известен ее полный спектр частот колебаний. К сожалению, рассматриваемые автором методы не распространялись на обратные задачи колебаний упругих тел, т. е. на системы уравнений в частных производных. Впервые в 1912–1913 гг. задачи такого рода были рассмотрены Вейлем для уравнения Геймгольца. Позднее его исследования были продолжены Гардингом [7].

Наиболее исчерпывающие результаты для обратной задачи Штурма–Лиувилля получены

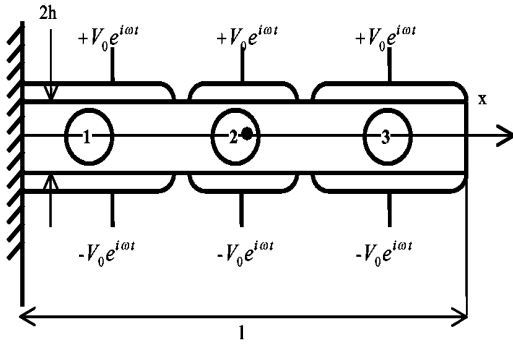


Рис. 1. Пьезокерамический стержень с неоднородностью модуля упругости в локальной области 2δ

И. М. Левитаном и И. М. Гельфандом [8], а также Л. Д. Фаддеевым и В. А. Марченко для обратной задачи квантовой теории рассеяния [9, 10].

Для уравнений в частных производных различные варианты решения обратной задачи рассеяния рассматривались в статье [11], а задача об определении формы области по данным рассеяния – в работах [12, 13]. Методы решения обратных задач широко используются в астрофизике [14], дефектоскопии [15], акустическом зондировании мирового океана [16].

Как отмечено в [1], для построения решения таких задач необходимо иметь дополнительную информацию об объекте исследования, например, о расположении неоднородности и ее приблизительных размерах. Задачи такого типа исследовались в работах американских авторов [17, 18] с помощью метода низкочастотной томографии. Аналогичный подход, состоящий в приближении функции смещений конечным количеством членов ряда Фурье, используется для определения неоднородности упругих свойств стержня и в данной статье. Следует, однако, отметить, что, в отличие от [18], нам удалось определить начальные коэффициенты ряда Фурье не только с четными, но и с нечетными номерами.

Таким образом, в этой статье ограниченная обратная задача теории колебаний исследуется на примере задачи о продольных колебаниях пьезокерамического стержня с толщинной поляризацией. Механическая неоднородность материала стержня моделируется путем разделения электродного покрытия боковых граней стержня диэлектрическими промежутками. Возбуждение колебаний осуществляется генератором электрического напряжения с разностью выходных потенциалов, изменяющейся по гармоническому закону. Аналитическое решение задачи построено для нулевых ме-

ханических граничных условий на торцах стержня. В случае, когда электроды на отделенном участке разомкнуты, для первых нормальных мод найдены собственные частоты колебаний. Согласно методу низкочастотной томографии, рассмотренному ранее в [1, 2], эти значения сопоставлены со спектром продольных колебаний стержня без дефекта. Приведены данные о местоположении и приближенной форме неоднородности. Проведено сравнение теоретических и экспериментальных результатов.

1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИ ОТДЕЛЕННОЙ ЧАСТЬЮ ЭЛЕКТРОДНОГО ПОКРЫТИЯ

Рассмотрим пьезокерамический стержень, длина которого l много больше ширины b и толщины $2h$. Участки стержня 1 и 3 (рис. 1) запитаны генератором напряжений с круговой частотой подвода разности потенциалов ω :

$$\psi|_{x=\pm h} = \pm V_0 e^{i\omega t}. \tag{1}$$

Механическая неоднородность материала стержня обусловлена тем, что на участке 2 электродное покрытие отделено от остальной (рабочей) зоны диэлектрическими промежутками.

Согласно прикладной теории стержней, единственной компонентой напряжений, которую необходимо учитывать в расчете, является $\sigma_x(x, t)$. Напряжения σ_y и σ_z малы по сравнению с σ_x и ими будем пренебрегать:

$$\sigma_y, \sigma_z \approx 0. \tag{2}$$

С практической точки зрения это предположение оправдано для тонких стержней ($l > 10b$ и $l > 10h$) при низких частотах колебаний.

Одномерные уравнения состояния пьезокерамического стержня с толщинной поляризацией имеют следующий вид [19]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= S_{11}^E \sigma_x + d_{31} E_z, \\ D_z &= \varepsilon_{33}^T E_z + d_{31} \sigma_x, \end{aligned} \tag{3}$$

где S_{11}^E – упругая податливость при постоянном (нулевом) электрическом поле; d_{31} – пьезоэлектрическая постоянная; ε_{33}^T – диэлектрическая проницаемость при постоянном (нулевом) напряжении; E_z – компонента вектора напряженности электрического поля; D_z – компонента вектора электрической индукции.

Соотношения (3) дополняем: уравнениями движения элемента стержня, которые формально будут одинаковыми для всех трех участков,

$$\frac{\partial \sigma_x^{(i)}}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 u_x^{(i)}}{\partial t^2} = 0; \quad i = 1, 2, 3; \quad (4)$$

уравнениями вынужденной электростатики

$$E_z^{(i)} = -\frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial x}, \quad i = 1, 2, 3; \quad (5)$$

соотношением Коши

$$\varepsilon_x^{(i)} = \frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial x}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6)$$

Для стержня с жестко заделанным левым торцом $x=0$ и свободным правым торцом $x=l$ граничные условия имеют следующий вид:

$$u_x^{(1)} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u_x^{(3)}}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0. \quad (7)$$

Для заданного равенством (1) условия изменения электрического потенциала во времени решение (4) ищем как гармонически изменяющиеся во времени функции:

$$\begin{aligned} u_x &= \widehat{u}(x)e^{i\omega t}, \\ \varepsilon_x &= \widehat{\varepsilon}(x)e^{i\omega t}, \\ \psi &= \widehat{\psi}(x)e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (8)$$

В приближении прикладной теории электроупругости потенциалы $\psi^{(i)}$ ($i=1, 2, 3$) изменяются по толщине стержня по линейному закону. Поэтому для их амплитудных характеристик справедливо записать

$$\begin{aligned} \widehat{E}_z^{(1)} &= -V_0/h, \\ \widehat{E}_z^{(2)} &= -V/h, \\ \widehat{E}_z^{(3)} &= -V_0/h. \end{aligned} \quad (9)$$

При этом на диэлектрически отделенном участке стержня 2 амплитудная разность потенциалов V на данном этапе остается неизвестной постоянной.

Исходя из соотношений (3), (7), с учетом выражений (8) для областей 1–3 получаем следующие равенства для амплитуд механических напряже-

ний:

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}_x^{(1)} &= \frac{1}{S_{11}^E} \left[\frac{d\widehat{u}_x^{(1)}}{dx} + d_{31} \frac{V_0}{h} \right], \\ \widehat{\sigma}_x^{(2)} &= \frac{1}{S_{11}^E} \left[\frac{d\widehat{u}_x^{(2)}}{dx} + d_{31} \frac{V}{h} \right], \\ \widehat{\sigma}_x^{(3)} &= \frac{1}{S_{11}^E} \left[\frac{d\widehat{u}_x^{(3)}}{dx} + d_{31} \frac{V_0}{h} \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

На основании формул (7) и (10) уравнения для нахождения амплитудной функции \widehat{u} в каждой из рассматриваемых областей стержня примут вид

$$\frac{d^2 \widehat{u}_x^{(i)}}{dx^2} + \lambda^2 \widehat{u}_x^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (11)$$

где $\rho S_{11}^E = 1/c^2$; $\omega/c = \lambda$; c – скорость распространения упругой продольной волны в стержне.

Для определения функций $\widehat{u}_x^{(i)}$ ($i=1, 2, 3$), кроме записанных граничных условий (7), необходимо использовать условия сопряжения решений для участков стержня:

$$\begin{aligned} \widehat{u}_x^{(1)} \Big|_{l/2-\delta} &= \widehat{u}_x^{(2)} \Big|_{l/2-\delta}, \\ \widehat{u}_x^{(2)} \Big|_{l/2+\delta} &= \widehat{u}_x^{(3)} \Big|_{l/2+\delta}, \\ \widehat{\sigma}_x^{(1)} \Big|_{l/2-\delta} &= \widehat{\sigma}_x^{(2)} \Big|_{l/2-\delta}, \\ \widehat{\sigma}_x^{(2)} \Big|_{l/2+\delta} &= \widehat{\sigma}_x^{(3)} \Big|_{l/2+\delta}. \end{aligned} \quad (12)$$

В дополнение к записанным равенствам (12) для диэлектрически отделенного участка 2 необходимо записать электрическое условие:

$$\int_{l/2-\delta}^{l/2+\delta} \widehat{D}_z^{(2)} dx = 0. \quad (13)$$

Решения уравнения (11) с учетом условий на левом торце стержня представляются через тригонометрические функции:

$$\begin{aligned} \widehat{u}_x^{(1)} &= A \sin \lambda x, \\ \widehat{u}_x^{(2)} &= B \sin \lambda x + C \cos \lambda x, \\ \widehat{u}_x^{(3)} &= D \sin \lambda x + F \cos \lambda x. \end{aligned} \quad (14)$$

Аналогично представляются и выражения для напряжений.

Входящие в решение (14) пять постоянных интегрирования A, B, C, D, F находятся из условия сопряжения решений (12) и нулевого граничного условия для механических напряжений (7) при $x=l$:

$$\begin{aligned}
 & A \sin \lambda \left(\frac{l}{2} - \delta \right) - B \sin \lambda \left(\frac{l}{2} - \delta \right) - \\
 & \quad - C \cos \lambda \left(\frac{l}{2} - \delta \right) = 0, \\
 & A \cos \lambda \left(\frac{l}{2} - \delta \right) - B \cos \lambda \left(\frac{l}{2} - \delta \right) + \\
 & \quad + C \sin \lambda \left(\frac{l}{2} - \delta \right) = -\frac{d_{31} V_0 - V}{\lambda h}, \\
 & B \sin \lambda \left(\frac{l}{2} + \delta \right) + C \cos \lambda \left(\frac{l}{2} + \delta \right) - \\
 & \quad - D \sin \lambda \left(\frac{l}{2} + \delta \right) - F \cos \lambda \left(\frac{l}{2} + \delta \right) = 0, \\
 & B \cos \lambda \left(\frac{l}{2} + \delta \right) - C \sin \lambda \left(\frac{l}{2} + \delta \right) - \\
 & \quad - D \cos \lambda \left(\frac{l}{2} + \delta \right) + F \sin \lambda \left(\frac{l}{2} + \delta \right) = \\
 & \quad = \frac{d_{31} V_0 - V}{\lambda h}, \\
 & D \cos \lambda l - F \sin \lambda l = -\frac{d_{31} V_0}{\lambda h}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Входящее в записанные выше уравнения значение выходного потенциала V/h можно получить, используя дополнительное условие (13). Это приводит к равенству

$$\begin{aligned}
 \frac{V}{h} &= \frac{V_0}{h} \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \frac{1}{\Delta(\lambda l)} \frac{\sin \lambda \delta}{\lambda \delta} \times \\
 & \quad \times \frac{\cos \lambda (l - \delta) - \cos \lambda \frac{l}{2}}{\cos \lambda l},
 \end{aligned} \tag{16}$$

где $k_{31}^2 = d_{31}^2 / S_{11}^E \varepsilon_{33}^T$ – продольный коэффициент электромеханической связи;

$$\Delta = \cos \lambda l + \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \frac{\sin \lambda l}{\lambda \delta} \cos \lambda (l - \delta). \tag{17}$$

Решение системы алгебраических уравнений (15) с использованием полученного соотношения (16)

имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 A &= -\frac{d_{31} V_0}{\lambda h} \frac{1}{\Delta(\lambda l)} \left\{ 1 + \frac{\sin \lambda \delta}{\lambda \delta} \times \right. \\
 & \quad \times \left. \left[\frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \cos \lambda \delta - 2(\lambda \delta) \sin \lambda \frac{l}{2} \right] \right\}, \\
 B &= -\frac{d_{31} V_0}{\lambda h} \frac{1}{\Delta(\lambda l)} \left\{ 1 + \frac{\sin \lambda \delta}{\lambda \delta} \sin \lambda \frac{l}{2} \times \right. \\
 & \quad \times \left. \left[\frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \sin \lambda \left(\frac{l}{2} - \delta \right) - 2(\lambda \delta) \right] - \right. \\
 & \quad \left. - \cos \lambda \delta \cos \lambda \left(\frac{l}{2} - \delta \right) \right\}, \\
 C &= -\frac{d_{31} V_0}{\lambda h} \frac{1}{\Delta(\lambda l)} \frac{\sin \lambda \delta}{\lambda \delta} \sin \lambda \left(\frac{l}{2} - \delta \right) \times \\
 & \quad \times \left[\frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \cos \lambda \frac{l}{2} + (\lambda \delta) \cos \lambda \delta \right], \\
 D &= -\frac{d_{31} V_0}{\lambda h} \frac{1}{\Delta(\lambda l)} \left\{ 1 + \frac{\sin \lambda \delta}{\lambda \delta} \times \right. \\
 & \quad \times \left. \left[\frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} (\cos \lambda \delta - \sin \lambda l \sin \lambda \delta) - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - 2(\lambda \delta) \sin \lambda \frac{l}{2} (1 + \cos \lambda l) \right] \right\}, \\
 F &= 2 \frac{d_{31} V_0}{\lambda h} \frac{\sin \lambda \delta \cos \lambda \frac{l}{2}}{\Delta(\lambda l)} \times \\
 & \quad \times \left[(\lambda \delta) \cos \lambda l + \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \cos \lambda \frac{l}{2} \sin \lambda \delta \right].
 \end{aligned} \tag{18}$$

Приравнявая $\Delta(\lambda l)$ к нулю, получаем трансцендентное уравнение для нахождения резонансных частот:

$$\cos z + \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \frac{\sin z \bar{\delta}}{z \bar{\delta}} \cos [z(1 - \bar{\delta})] = 0, \tag{19}$$

где $z = \lambda l$; $\bar{\delta} = \delta / l$.

При $\bar{\delta} = 0$ получаем известное частотное уравнение для продольных колебаний стержня со сплошными электродами

$$\cos z = 0. \tag{20}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 (\lambda l)_{m(\text{спл.})} &= z_{m(\text{спл.})} = \left(m + \frac{1}{2} \right) \pi, \\
 m &= 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{21}$$

Корни уравнения (19) (табл. 1) находились численно для материала стержня ЦТБС-3 ($\bar{\delta} = 0.15$,

$k_{31}^2=0.1042$). Там же для сравнения приведены значения $(\lambda l)_{m(\text{спл.})}$, найденные в соответствии с уравнением (21).

2. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА. МЕТОД НИЗКОЧАСТОТНОЙ ТОМОГРАФИИ

Используя полученные в работе [1] результаты по выявлению дефектов неоднородности материала стержня, на основании метода низкочастотной томографии представим приближенно неоднородность отрезком ряда Фурье в следующем виде:

$$\frac{S_{11}^E(x)}{S_{11(0)}^E} = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < x_0 - \delta, \\ 1 + \varepsilon(x), & x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta, \\ 1, & x_0 + \delta < x \leq l. \end{cases} \quad (22)$$

Здесь

$$\varepsilon(x) = 1 + \sum_{n=0}^N b_n \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l};$$

b_n – неизвестные пока коэффициенты ряда Фурье. Как показано в [1], рассматриваемую задачу при исследовании ее методом низкочастотной томографии можно свести к восстановлению неоднородности путем сопоставления частотных спектров колебаний пьезокерамического стержня при сплошном и разделенном его электродном покрытии.

В результате проведенного экспериментального исследования для пьезокерамического стержня длиной 10 см, толщиной 0.2 см и шириной 1 см, изготовленного из материала ЦТБС-3, удалось определить первые шесть резонансных частот в случаях отделенных ($\delta=0.15$) и сплошных электродов. Эти данные представлены в табл. 2. Сопоставляя найденные частотные спектры, на основании теоретических выкладок, аналогичных проделанным в [1], получаем систему алгебраических уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов ряда Фурье b_n :

$$\begin{aligned} & (z)_{m(\text{отдел.})}^2 - (z)_{m(\text{спл.})}^2 = \\ & = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^N '(-1)^n b_n \alpha_{mn} + \\ & + \frac{(-1)^m}{2\pi} \left(m + \frac{1}{2}\right) \sum_{k=0}^K '(-1)^k \times \\ & \times \left[\left(k + \frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^N '(-1)^n b_n \gamma_{mn}^{(k)} \right]; \\ & m = 0, 2, 3, \dots, 5, \quad N = 5, \\ & n = 0, 2, 3, \dots, 5, \quad K = 5, \quad k = 0, 2, \dots, 5. \end{aligned} \quad (23)$$

Табл. 1. Собственные частоты продольных колебаний неоднородного пьезокерамического стержня

m	$Z_{m(\text{отдел.})}$	$Z_{m(\text{спл.})}$
1	1.59492	1.57079
2	4.77595	4.71239
3	7.93379	7.85398
4	11.06408	10.99557
5	14.17681	14.13717
6	17.29093	17.27876
7	20.42058	20.42035
8	23.56663	23.56194
9	26.71983	26.70354
10	29.86911	29.84513
11	33.00858	32.98672
12	36.14057	36.12832
13	39.27276	39.26991
14	42.41161	42.41150
15	45.55762	45.55301
16	48.70598	48.69469
17	51.85084	51.83628
18	54.98972	54.97787
19	58.12501	58.11946
20	61.26173	61.26106

Табл. 2. Собственные частоты колебаний неоднородного пьезокерамического стержня, измеренные экспериментальным путем

m	$Z_{m(\text{отдел.})}$	$Z_m^{(\text{спл.})}$
1	1.58903	1.57079
2	4.73322	4.68981
3	7.79580	7.74109
4	10.63869	10.61698
5	13.88188	13.86972
6	14.40144	15.37192

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \alpha_{mn} &= \frac{2}{n + 1/2} - \frac{1}{n + 2m + 3/2} - \\ & - \frac{1}{n - 2m - 1/2}; \\ \gamma_{mn}^{(k)} &= \frac{1}{n - m + k + 1/2} + \frac{1}{n + m - k + 1/2} - \\ & - \frac{1}{m + k + n + 3/2} - \frac{1}{n - m - k - 1/2}; \\ \gamma_{mn}^{(k)} &= \alpha_{mn} \quad \text{при} \quad k = m. \end{aligned} \quad (24)$$

Штрих при сумме означает, что в ней пропущен член с номером $k = m$.

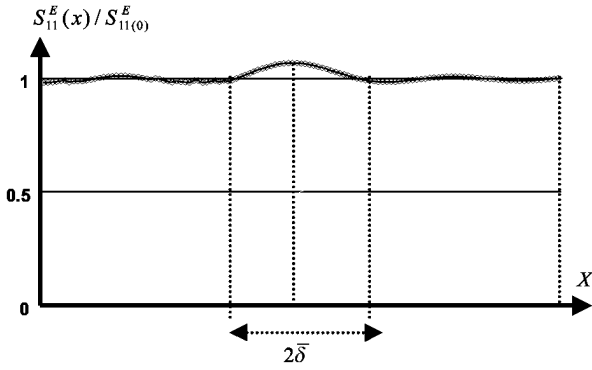


Рис. 2. Томографическое восстановление неоднородности

Как показано в [1, 2], значения коэффициентов разложения с достаточной точностью вычисляются при использовании упрощенных уравнений диагонального вида вместо полной алгебраической системы (23):

$$(z)_{m(отдел.)}^2 - (z)_{m(спл.)}^2 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^N (-1)^n b_n \alpha_{mn}. \tag{25}$$

На рис. 2 изображено томографическое восстановление неоднородности с учетом коэффициентов разложения b_n , полученных из системы (25). Заметим, что определенные методом низкочастотной томографии местоположение и величина дефекта хорошо согласуются с истинными параметрами искусственно созданной в эксперименте неоднородности упругих свойств пьезостержня.

ВЫВОДЫ

1. Как пример ограниченной обратной краевой задачи теории колебаний приведено решение задачи о продольных колебаниях пьезокерамического стержня с толщиной поляризации. Механическая неоднородность материала стержня обусловлена отделением определенного участка электродного покрытия стержня от рабочей зоны покрытия, запитанной электрогенератором.
2. Для нескольких первых нормальных мод определены собственные частоты колебаний рассматриваемого стержня с нулевыми механическими граничными условиями.
3. Найденные частотные спектры сопоставлены со спектром продольных колебаний пьезоке-

рамического стержня, имеющего сплошные электроды.

4. Для реального пьезокерамического стержня определенных параметров, выполненного из материала ЦТБС-3, удалось экспериментальным путем определить шесть резонансных частот для случаев сплошных и разделенных электродов.
5. Согласно методу низкочастотной томографии, восстановлена информация о месторасположении и приближенной форме неоднородности.
6. Результаты экспериментальных измерений с высокой точностью совпали с теоретическими расчетами (см. табл. 1). Это дает основание утверждать, что методы низкочастотной томографии позволяют определять местоположение и характер неоднородности их упругих свойств в случае, когда известны несколько первых нормальных мод колебаний.

1. Юрченко М. Є. Резонансний метод визначення локальної неоднорідності пружних властивостей при поєздовжніх та згинних коливаннях стержня // Акуст. вісн.– 2002.– 5, N 4.– С. 51–60.
2. Юрченко М. Є. Резонансний метод визначення локальної неоднорідності пружних властивостей стержня // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз.-мат. н.– 2001.– N 3.– С. 152–161.
3. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.– М.: Наука, 1986.– 287 с.
4. Крейн М. Г. О некоторых случаях эффективного определения плотности неоднородной струны по ее спектральной функции // Докл. АН СССР.– 1953.– N 4.– С. 617–620.
5. Крейн М. Г. Об обратных задачах для неоднородной струны // Докл. АН СССР.– 1952.– N 5.– С. 364–369.
6. Крейн М. Г. Решение обратной задачи Штурма–Лиувилля // Докл. АН СССР.– 1951.– N 1.– С. 21–24.
7. Garding L. Kungh // Fisiografiska Sällskapet i Lund Förhandlingar.– Lund Univ., 1954.– P. 21–24.
8. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН СССР. Сер. матем.– 1951.– 15, N 4.– С. 345–354.
9. Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения.– Киев: Наук. думка, 1978.– 332 с.
10. Фаддеев Л. Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния // Усп. матем. наук.– 1959.– 14, N 4.– С. 57–119.

11. Ватульян А. О. Математические модели и обратные задачи // Сорос. образоват. ж.– 1998.– N 11.– С. 143–148.
12. Ниордсен Ф. Относительно обращения проблемы собственных чисел для задачи о колебаниях пластин // Проблемы механики твердого деформированного тела.– Л.: Судостроение, 1970.– С. 287–294.
13. Романов В. Г. О численном методе решения одной обратной задачи для гиперболического уравнения // Сибир. матем. ж.– 1996.– N 3.– С. 633–655.
14. Черепашук А. М., Гончарский А. В., Ягола А. Г. Некорректные задачи астрофизики.– М.: Наука, 1985.– 247 с.
15. Ильинский Н. Б. Обратные краевые задачи и их приложения // Сорос. образоват. ж.– 1997.– N 4.– С. 105–110.
16. Потетюнко Э. Н., Черкесов Л. В., Шубин Д. С., Щербак Е. Н. Свободные колебания и обратные спектральные задачи.– М.: Вуз. книга, 2001.– 288 с.
17. Testardi L. R., Norton S. J. Acoustic dimensional resonance tomography: some examples in one-dimensional system // J. Appl. Phys.– 1986.– **96**, N 1.– P. 55–58.
18. Testardi L. R., Norton S. J., Hsich T. Dimensional resonance tomography // J. Appl. Phys.– 1984.– **56**, N 2.– P. 68–81.
19. Жарий О. Ю., Улитко А. Ф. Введение в механику нестационарных колебаний и волн.– Киев: Выща школа, 1989.– 183 с.