ISSN 1028-7507 Акустичний вiсник. 2003. Том 6, N 3. С. 44 – 52

УДК 533.6.013.42

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ С УПРУГИМИ МЕМБРАНАМИ НА “СВОБОДНОЙ” И ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТЯХ

Ю. Н. КОНОНОВ, Е. А. ТАТАРЕНКО

Донецкий национальный университет

Получено 31.12.2002 ⋄ Пересмотрено 30.09.2003

Построено аналитическое решение плоской задачи гидроупругости, описывающей взаимосвязанные свободные колебания двухслойной идеальной несжимаемой жидкости в прямоугольном канале и плоских мембран, расположенных на “свободной” и внутренней поверхностях жидкости. Получено условие устойчивости связанных колебаний жидкостей и мембран. Рассмотрены случаи, когда мембрана находится только на “свободной” (внутренней) поверхности двухслойной жидкости. Проведены численные исследования собственных частот. На основе метода Бубнова – Галеркина построено приближенное решение рассматриваемой задачи. В результате сравнения обоих подходов отмечена эффективность аналитического решения.

Побудовано аналітичний розв'язок плоскої задачі гідропружності, яка описує взаємозв'язані вільні коливання двошарової ідеальної нестисливої рідини в прямокутному каналі та плоских мембран, які розташовані на “вільній” та внутрішній поверхнях рідини. Одержана умова стійкості зв'язаних коливань рідин і мембран. Розглянуті випадки, коли мембрана знаходиться тільки на “вільній” (внутрішній) поверхні рідини. Проведені чисельні дослідження власних частот. На основі методу Бубнова – Гальоркіна побудовано наближений розв'язок розглянутої задачі. В результаті порівняння обох підходів відзначено ефективність аналітичного розв'язку.

An analytical solution for two-dimensional problem of hydroelasticity, describing the interconnected free oscillations of a two-layer perfect incompressible liquid in a rectangular channel and planar membranes located on the “free” and interior surfaces of liquid is developed. A stability condition for interconnected oscillations of the liquid and membranes is obtained. The cases when a membrane is located only on the “free” (interior) surface the of liquid are considered. The numerical study of eigenfrequencies is carried out. On the basis of the Bubnov – Galerkin method the approximate solution of the considered problem is obtained. Comparison of two approaches shows the effectiveness of the analytical solution.

ВВЕДЕНИЕ

Создание резервуаров большой емкости для хранения жидкости в сейсмоопасных районах и транспортировки жидких грузов требует тщательного анализа возможного резонансного возбуждения волновых движений жидкости. Одним из средств ограничения ее подвижности могут быть мембраны или пластинки, закрывающие свободную поверхность однородной жидкости [1 – 3].

Механические, тепловые и другие воздействия, как правило, вызывают разделение жидкости на слои, имеющие разную плотность, что, в свою очередь, приводит к образованию внутренних волн. Это обстоятельство обуславливает интерес к исследованию влияния стратификации на собственные колебания гидроупругой системы. Заметим, что для ограничения подвижности внутренних поверхностей также могут использоваться упругие мембраны, разделяющие многослойную жидкость [4 – 10].

В статье [4] исследована плоская задача о малых колебаниях физического маятника, содержащего идеальную двухслойную жидкость с упругой мембраной на “свободной” поверхности[1]. С использованием теории самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве доказано существование дискретного спектра собственных частот колебаний. В работах [5 – 9] рассмотрены задачи о колебаниях однородной и многослойной идеальной и вязкой жидкости с упругими мембранами на “свободной” поверхности и границах раздела жидкостей (будем называть их в дальнейшем внутренними поверхностями). С позиции функционального анализа, в частности, методов спектральной теории операторных пучков изучены вопросы разрешимости начально-краевых задач, структуры и характера спектра нормальных колебаний. При рассмотрении многослойной жидкости предполагалось, что жидкости расположены сверху вниз в порядке возрастания плотностей.

В работах [9, 10] выведены частотные уравнения собственных колебаний двухслойной и многослойной жидкостей в прямом круговом цилиндре с мембранами, расположенными на “свободной”

[1] Под “свободной” будем понимать верхнюю границу жидкости в канале. Поскольку мембрана все же является механическим ограничителем движений жидкости, здесь и далее этот термин используется в кавычках.

и внутренних поверхностях многослойной жидкости. В статье [2] получены аналитическое и приближенное решения плоской гидроупругой задачи о свободных колебаниях однородной идеальной жидкости в прямоугольном канале с упругой мембраной на “свободной” поверхности. Данная работа посвящена обобщению результатов этого исследования на случай двухслойной жидкости с мембранами на “свободной” и внутренней поверхностях.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим прямоугольный канал шириной b, заполненный двухслойной идеальной несжимаемой жидкостью с плотностями ρ_n до глубин h_n $(n=1,2)$. На свободной поверхности верхней жидкости и поверхности раздела двухслойной жидкости равномерно натянуты гибкие инерционные мембраны с растягивающими усилиями в срединной поверхности, равными T_n, массовой плотностью материала ρ_{0n} и толщиной δ_{0n}. Края мембран жестко закреплены на стенках канала. Движение жидкостей и мембран будем рассматривать в плоской постановке. Систему координат $Oxyz$ расположим так, чтобы ось Ox была направлена вдоль канала, а ось Oz совпадала с осью симметрии его поперечного сечения и направлена вверх. Начало системы координат $Oxyz$ поместим в плоскости внутренней мембраны (рис. 1). Задачу будем решать в рамках линейной теории, а движения жидкостей считать потенциальными.

При сделанных предположениях нагружение мембран жидкостями остается неизменным по длине канала. Это позволяет описать движение мембран в поле силы тяжести уравнением

$$\rho_{0n}\delta_{0n}\frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2} - T_n\frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2} = = P_n(t,y) - P_{n-1}(t,y) \qquad (1)$$

при граничных условиях

$$w_n\left(t, \pm\frac{b}{2}\right) = 0. \qquad (2)$$

Поперечная нагрузка $P_n(t,y)$, которую испытывает мембрана со стороны жидкости, может быть определена с помощью линеаризованного интеграла Лагранжа – Коши по формуле

$$P_n = -\rho_n\left[\left.\frac{\partial^2\Phi_n}{\partial t^2}\right|_{z=z_n} + g(w_n+z_n) + \chi_n\right]. \qquad (3)$$

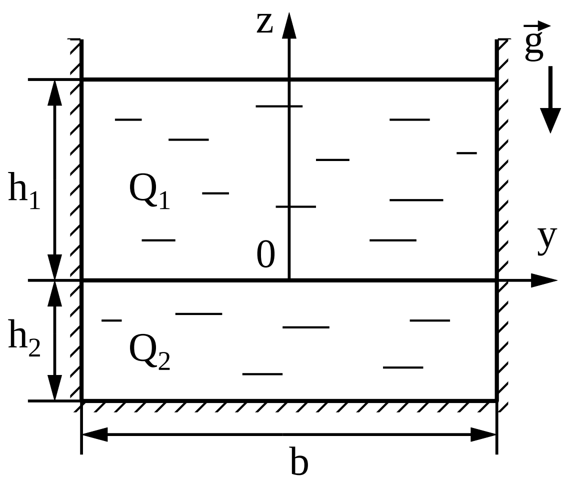


Рис. 1. Механическая система в состоянии покоя

Здесь $\Phi_n(t,y,z)$ – потенциал смещений n-ой жидкости; $w_n(t,y)$ – нормальный прогиб n-ой мембраны; g – ускорение силы тяжести; $\chi_n(t)$ – произвольная функция времени; $z_1=h_1$; $z_2=0$; $\rho_0=0$; $P_0=0$.

Потенциал смещений жидкости $\Phi_n(t,y,z)$ определяется из решения краевой задачи:

$$\frac{\partial^2\Phi_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi_n}{\partial z^2} = 0, \quad (y,z)\in Q_n,$$

$$\left.\frac{\partial\Phi_n}{\partial y}\right|_{y=\pm b/2} = \left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\right|_{z=-h_2} = 0, \qquad (4)$$

$$\left.\frac{\partial\Phi_n}{\partial z}\right|_{z=z_n} = w_n, \qquad \int\limits_{-b/2}^{b/2} w_n(t,y)dy = 0,$$

где Q_n – область поперечного сечения канала, занятая n-ой жидкостью.

Для исследования собственных колебаний механической системы представим неизвестные функции в виде

$$\Phi_n = \phi_n(y,z)e^{i\omega t},$$

$$w_n = W_n(y)e^{i\omega t}, \qquad (5)$$

$$\chi_n = \widehat{C}_n e^{i\omega t}.$$

Подставим выражения (5) в соотношения (1) – (4) и перейдем к безразмерным величинам, выбрав в качестве характерного линейного размера ширину канала b. В результате получим граничную задачу на собственные значения:

$$\begin{gathered}
W_n'' - \gamma_n^2 W_n = c_n - \\
-\lambda^2 d_n \left[\phi_n(y, z_n) - \frac{\rho_{n-1}}{\rho_n} \phi_{n-1}(y, z_n) \right], \\
W_n\left(\pm\frac{1}{2}\right) = 0, \qquad \int\limits_{-1/2}^{1/2} W_n(y) dy = 0, \\
\frac{\partial^2 \phi_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial z^2} = 0,\ (y, z) \in Q_n, \\
\left.\frac{\partial \phi_n}{\partial y}\right|_{y=\pm 1/2} = \left.\frac{\partial \phi_2}{\partial z}\right|_{z=-h_2} = 0, \\
\left.\frac{\partial \phi_n}{\partial z}\right|_{z=z_n} = W_n.
\end{gathered} \tag{6}$$

Здесь

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2 b}{g}; \qquad a_n = \frac{g \rho_{0n} \delta_{0n} b}{T_n};$$

$$d_n = \frac{\rho_n g b^2}{T_n}; \qquad \gamma_n^2 = d_n \left(1 - \frac{\rho_{n-1}}{\rho_n}\right) - \lambda^2 a_n;$$

c_n – произвольная постоянная. Будем полагать выполненным неравенство

$$\lambda^2 < \frac{d_n}{a_n}\left(1 - \frac{\rho_{n-1}}{\rho_n}\right). \tag{7}$$

2. ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

После применения метода разделения переменных составляющие потенциала смещений жидкости ϕ_n можно представить в виде

$$\begin{gathered}
\phi_1 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i_{1k} \mathrm{ch}\, \pi k z - i_{2k} \mathrm{ch}\, \pi k (z - h_1)}{\pi k \mathrm{sh}\, \pi k h_1} Y_k, \\
\phi_2 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i_{2k} \mathrm{ch}\, \pi k (z + h_2)}{\pi k \mathrm{sh}\, \pi k h_2} Y_k.
\end{gathered} \tag{8}$$

Здесь

$$Y_k = \cos \pi k \left(y + \frac{1}{2}\right), \qquad i_{nk} = \int\limits_{-1/2}^{1/2} W_n Y_k dy.$$

С учетом представлений (8) исходную задачу (6) сведем к краевой задаче на собственные значения для интегро-дифференциального уравнения относительно составляющей прогиба мембраны

$$\begin{gathered}
W_n'' - \gamma_n^2 W_n = c_n - \sum_{k=1}^{\infty} B_{nk} Y_k, \\
W_n\left(\pm\frac{1}{2}\right) = 0, \qquad \int\limits_{-1/2}^{1/2} W_n dy = 0,
\end{gathered} \tag{9}$$

где

$$B_{nk} = \frac{2\lambda^2 d_n}{\pi k}(u_{nk} i_{nk} - b_{nk} i_{\tilde{n}k}); \quad \tilde{n} = n - (-1)^n;$$

$$u_{nk} = \mathrm{cth}\, \pi k h_n + \frac{\rho_{n-1}}{\rho_n} \mathrm{cth}\, \pi k h_{n-1};$$

$$b_{1k} = \frac{1}{\mathrm{sh}\, \pi k h_1}; \quad b_{2k} = \rho_{12} b_{1k};$$

$$\rho_{12} = \frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

Частное решение уравнения (9) будем искать в форме, соответствующей его правой части:

$$W_n^* = W_{0n} + \sum_{k=1}^{\infty} W_{nk} Y_k. \tag{10}$$

Подставляя выражение (10) в уравнение (9), имеем

$$\begin{gathered}
W_{nk} = B_{nk} / (\gamma_n^2 + \pi^2 k^2), \\
W_{0n} = -c_n / \gamma_n^2.
\end{gathered} \tag{11}$$

Общее решение задачи (9) представим в виде

$$W_n = A_n \mathrm{sh}\, \gamma_n y + B_n \mathrm{ch}\, \gamma_n y + W_n^*(y). \tag{12}$$

Здесь A_n, B_n – произвольные постоянные.

Выберем постоянную W_{0n} из условия несжимаемости n-ой жидкости, и с учетом выражений (11) представим функцию $W_n(y)$ в следующем виде:

$$\begin{gathered}
W_n(y) = A_n \left(\mathrm{sh}\, \gamma_n y + \sum_{k=1}^{\infty} A_{\tilde{n}\tilde{n}} I_{nk} Y_k \right) + \\
+ B_n \left(\mathrm{ch}\, \gamma_n y - \frac{2}{\gamma_n} \mathrm{sh}\, \frac{\gamma_1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{\tilde{n}\tilde{n}} \tilde{I}_{nk} Y_k \right) - \\
- A_{\tilde{n}} \sum_{k=1}^{\infty} A_{n\tilde{n}} I_{\tilde{n}k} Y_k - B_{\tilde{n}} \sum_{k=1}^{\infty} A_{n\tilde{n}} \tilde{I}_{\tilde{n}k} Y_k,
\end{gathered} \tag{13}$$

где

$$I_{nk}=\int\limits_{-1/2}^{1/2}\text{sh}\,(\gamma_n y)\,Y_k dy;\quad \tilde{I}_{nk}=\int\limits_{-1/2}^{1/2}\text{ch}\,(\gamma_n y)\,Y_k dy;$$

$$A_{ii}=2\left(\frac{a_{ii}}{\Delta_k}-1\right);\qquad A_{ij}=2\frac{a_{ij}}{\Delta_k};$$

$$M_{nk}=\frac{\lambda^2 d_n}{\pi k\left(\gamma_n^2+\pi^2k^2\right)};\qquad \Delta_k=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21};$$

$$a_{ii}=1-M_{ik}u_{ik};\qquad a_{ij}=M_{ik}b_{ik}$$

$$(i,\,j=\{n,\,\tilde{n}\}).$$

Для удобства записи здесь и далее третий индекс k опускаем. Постоянные A_n и B_n определим из условий жесткого закрепления мембран. При этом получим линейную алгебраическую систему

$$\begin{aligned}&A_n\left(\text{sh}\,\frac{\gamma_1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_{\tilde{n}\tilde{n}}I_{nk}(-1)^k\right)+\\&+B_n\left(\text{ch}\,\frac{\gamma_n}{2}-\frac{2}{\gamma_n}\text{sh}\,\frac{\gamma_n}{2}+\right.\\&\left.+\sum_{k=1}^{\infty}A_{\tilde{n}\tilde{n}}\tilde{I}_{nk}(-1)^k\right)-\\&-A_{\tilde{n}}\sum_{k=1}^{\infty}A_{n\tilde{n}}I_{\tilde{n}k}(-1)^k-\\&-B_{\tilde{n}}\sum_{k=1}^{\infty}A_{n\tilde{n}}\tilde{I}_{\tilde{n}k}(-1)^k=0,\\&A_n\left(-\text{sh}\,\frac{\gamma_1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_{\tilde{n}\tilde{n}}I_{nk}\right)+\\&+B_n\left(\text{ch}\,\frac{\gamma_1}{2}-\frac{2}{\gamma_1}\text{sh}\,\frac{\gamma_n}{2}+\right.\\&\left.+\sum_{k=1}^{\infty}A_{\tilde{n}\tilde{n}}\tilde{I}_{nk}\right)-\\&-A_{\tilde{n}}\sum_{k=1}^{\infty}A_{n\tilde{n}}I_{\tilde{n}k}-\\&-B_{\tilde{n}}\sum_{k=1}^{\infty}A_{n\tilde{n}}\tilde{I}_{\tilde{n}k}=0.\end{aligned}\qquad(14)$$

Раскрывая значения определенных интегралов I_{nk}, $\tilde{I}_{nk}$, можно показать, что система уравнений (14) расщепляется на две независимые системы – относительно A_1, A_2 и относительно B_1, B_2:

$$\begin{aligned}&A_n\left(\text{sh}\,\frac{\gamma_n}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}A_{\tilde{n}\tilde{n}}I_{nk}\right)+\\&+A_{\tilde{n}}\sum_{k=1}^{\infty}A_{n\tilde{n}}I_{\tilde{n}k}=0,\\&B_n\left(\text{ch}\,\frac{\gamma_n}{2}-\frac{2}{\gamma_n}\text{sh}\,\frac{\gamma_n}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_{\tilde{n}\tilde{n}}\tilde{I}_{nk}\right)-\\&-B_{\tilde{n}}\sum_{k=1}^{\infty}A_{n\tilde{n}}\tilde{I}_{\tilde{n}k}=0.\end{aligned}\qquad(15)$$

Условия существования нетривиальных решений систем (15) приводят к двум характеристическим уравнениям относительно параметра λ:

$$\begin{aligned}&\prod_{n=1}^{2}\left(\frac{1}{2\gamma_n}\text{cth}\,\frac{\gamma_n}{2}-\frac{1}{\gamma_n^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_{\tilde{n}\tilde{n}}}{\gamma_n^2+\alpha_k^2}\right)-\\&-\prod_{n=1}^{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_{\tilde{n}n}}{\gamma_n^2+\alpha_k^2}=0,\\&\prod_{n=1}^{2}\left(\frac{1}{2\gamma_n}\text{th}\,\frac{\gamma_n}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_{\tilde{n}\tilde{n}}}{\gamma_n^2+\beta_k^2}\right)-\\&-\prod_{n=1}^{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_{\tilde{n}n}}{\gamma_n^2+\beta_k^2}=0.\end{aligned}\qquad(16)$$

Здесь $\alpha_k=2k\pi$; $\beta_k=(2k-1)\pi$.

Значения λ, совпадающие с корнями первого уравнения из (16), соответствуют симметричным формам связанных колебаний мембран и жидкостей, а частоты для несимметричных форм определяются из второго уравнения. Соотношения (16) совпадают с соответствующими частотными уравнениями из работы [2] при $T_2=\infty$ или $T_1=\infty$, $\rho_1=0$.

Отметим, что все приведенные соотношения справедливы при выполнении неравенства (7). Для тех случаев, когда оно не выполняется, все расчетные формулы можно легко получить с помощью замены $\gamma_n=i\tilde{\gamma}_n$, $\tilde{\gamma}_n=\sqrt{d_n(1-\rho_{n-1}/\rho_n)-\lambda^2a_n}$ и с учетом соотношений $\cos iz=\text{ch}\,z$, $i\sin iz=-\text{sh}\,z$ (по аналогии с работой [2]).

Разложим гиперболические функции в уравнениях (16) на простейшие дроби так, как это сделано в [2]. Тогда исходные уравнения можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{G_{1k} - \lambda^2 g_{1k}}{Z_k(\lambda^2)} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{G_{2k} - \lambda^2 g_{2k}}{Z_k(\lambda^2)} - -d_1 d_2 \lambda^4 \rho_{12} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{b_{1k}}{Z_k(\lambda^2)} \right)^2 = 0, \qquad (17)$$

где

$$Z_k(\lambda^2) = A_k \lambda^4 - B_k \lambda^2 + C_k;$$

$$G_{ik} = \alpha_k \left[d_i \left(1 - \frac{\rho_{i-1}}{\rho_i} \right) + \alpha_k^2 \right];$$

$$g_{ik} = \alpha_k a_i + d_i u_{ik};$$

$$A_k = g_{1k} g_{2k} - d_1 d_2 b_{1k} b_{2k};$$

$$B_k = g_{1k} G_{2k} - G_{1k} g_{2k};$$

$$C_k = G_{1k} G_{2k}.$$

Следует заметить, что частотное уравнение (17) имеет один и тот же вид как для симметричных, так и для несимметричных форм колебаний и не зависит от условия (7), что удобно для численных исследований. Однако корни этого уравнения находятся с большей погрешностью, чем корни уравнения (16).

В случае, когда мембрана находится только на свободной поверхности, частотные уравнения соответственно для симметричных и несимметричных форм колебаний представляются следующим образом:

$$\frac{1}{2\gamma_1} \operatorname{cth} \frac{\gamma_1}{2} - \frac{1}{\gamma_1^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{22}}{\gamma_1^2 + \alpha_k^2} = 0,$$
$$\frac{1}{2\gamma_1} \operatorname{th} \frac{\gamma_1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{22}}{\gamma_1^2 + \beta_k^2} = 0 \qquad (18)$$

или

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{\alpha_k (1 - \rho_{12}) - \lambda^2 u_{2k}}{Z_k(\lambda^2)} = 0. \qquad (19)$$

Здесь

$$A_k = g_{1k} u_{2k} - d_1 \rho_{12} b_{1k}^2;$$

$$B_k = g_{1k} \alpha_k (1 - \rho_{12}) + G_{1k} u_{2k};$$

$$C_k = G_{1k} \alpha_k (1 - \rho_{12}).$$

Если же мембрана находится только на внутренней поверхности, соответствующие частотные уравнения принимают вид

$$\frac{1}{2\gamma_2} \operatorname{cth} \frac{\gamma_2}{2} - \frac{1}{\gamma_2^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{11}}{\gamma_2^2 + \alpha_k^2} = 0,$$
$$\frac{1}{2\gamma_2} \operatorname{th} \frac{\gamma_2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{11}}{\gamma_2^2 + \beta_k^2} = 0 \qquad (20)$$

или

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{\alpha_k - \lambda^2 u_{1k}}{Z_k(\lambda^2)} = 0, \qquad (21)$$

где

$$A_k = g_{2k} u_{1k} - d_2 \rho_{12} b_{1k}^2;$$

$$B_k = G_{2k} u_{1k} + g_{2k} \alpha_k;$$

$$C_k = G_{2k} \alpha_k.$$

Уравнения (18), (19) и (20) (21), с точностью до обозначений, совпадают с частотными уравнениями из работы [2] при $\rho_1 = \rho_2$ и $\rho_1 = 0$ соответственно.

При $h_1 = \infty$ $(b_{1n} = b_{2n} = 0)$ из уравнений (16) и (17) следует

$$\prod_{n=1}^{2} \left(\frac{1}{2\gamma_n} \operatorname{cth} \frac{\gamma_n}{2} - \frac{1}{\gamma_n^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{\tilde{n}\tilde{n}}}{\gamma_n^2 + \alpha_k^2} \right) = 0,$$

$$\prod_{n=1}^{2} \left(\frac{1}{2\gamma_n} \operatorname{th} \frac{\gamma_n}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{\tilde{n}\tilde{n}}}{\gamma_n^2 + \beta_k^2} \right) = 0,$$

$$\prod_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{G_{ik} - \lambda^2 g_{ik}} = 0.$$

Таким образом, если верхний слой имеет бесконечную глубину, то уравнения (16) и (17) распадаются на два независимых.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ВОПРОСА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ

Необходимым условием устойчивости совместных колебаний мембран и жидкостей в прямоугольном канале является положительность всех корней частотного уравнения (17). Для его приближенного анализа ограничимся двумя членами в рядах (17) (учет только одного члена не приводит к уравнению, содержащему неизвестную частоту). В этом случае имеем

$$b_0 \lambda^4 - b_1 \lambda^2 + b_2 = 0. \qquad (22)$$

Здесь

$$b_0 = \alpha_1^2 A_2 + \alpha_2^2 A_1 + \alpha_1\alpha_2(g_{21}g_{12} + g_{22}g_{11} - $$
$$-d_1 d_2(b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21}))];$$

$$b_1 = (\alpha_1 g_{22} + \alpha_2 g_{21})(\alpha_1 G_{12} + \alpha_2 G_{11}) +$$
$$+(\alpha_1 g_{12} + \alpha_2 g_{11})(\alpha_1 G_{22} + \alpha_2 G_{21});$$

$$b_2 = (\alpha_1 G_{12} + \alpha_2 G_{11})(\alpha_1 G_{22} + \alpha_2 G_{21}).$$

Корни уравнения (22) относительно λ^2 будут положительны, если

$$b_i > 0, \qquad i = 1, 2, \tag{23}$$

поскольку нетрудно показать, что при любых параметрах механической системы $b_0 > 0$. Из неравенств (23) с учетом выражений для b_1 и b_2 получаем условие устойчивости собственных колебаний механической системы:

$$\alpha_1 G_{22} + \alpha_2 G_{21} > 0.$$

При симметричных формах колебаний это неравенство дает

$$\rho_1 - \rho_2 < \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{2}\frac{T_2}{gb^2} = R_1\frac{T_2}{gb^2}, \qquad R_1 \approx 49.348,$$

а при несимметричных –

$$\rho_1 - \rho_2 < \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{2}\frac{T_2}{gb^2} = R_2\frac{T_2}{gb^2}, \qquad R_2 \approx 98.696.$$

Полученное условие устойчивости не зависит от натяжения верхней мембраны, инерционности мембран и глубин заполнения. Следует отметить, что если нижняя жидкость тяжелее, чем верхняя ($\rho_2 \geq \rho_1$), то полученное условие устойчивости выполнено всегда. В противном случае возможна потеря устойчивости.

Если учитывать в рядах (17) три члена, то $R_1 \approx 45.512$, $R_2 \approx 92.116$, а если четыре – то $R_1 \approx 43.844$, $R_2 \approx 89.113$. Следовательно, с достаточной для практики точностью можно считать, что

$$R_1 \approx 43.844, \qquad R_2 \approx 89.113.$$

4. ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА БУБНОВА – ГАЛЕРКИНА

Рассмотрим применение метода Бубнова – Галеркина к построению приближенного решения краевой задачи на собственные значения для интегро-дифференциального уравнения (9). Для случая несимметричных колебаний рассматриваемой механической системы по аналогии с подходом, изложенным в [2], представим функции $W_n(y)$ в виде отрезка ряда Фурье:

$$W_i = \sum_{i=1}^{p} W_i \sin 2\pi i\left(y + \frac{1}{2}\right). \tag{24}$$

Представление (24) удовлетворяет всем граничным условиям задачи (9). После его подстановки в уравнение (9) и применения метода Бубнова – Галеркина задачу об определении частот и форм связанных колебаний мембран и жидкостей сведем к однородной системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} &\left(A_1 - \lambda^2 B_1\right)\vec{W}_1 + \lambda^2\tilde{B}_1\vec{W}_2 = 0,\\ &\lambda^2\tilde{B}_2\vec{W}_1 + \left(A_2 - \lambda^2 B_2\right)\vec{W}_2 = 0, \end{aligned} \tag{25}$$

где $\vec{W}_i = (W_{i1}, W_{i2}, \ldots, W_{ip})^T$. Элементы симметричных матриц A_i, B_i, $\tilde{B}_i$ определяются по формулам

$$A_n = \left\|\left(d_n\left(1 - \frac{\rho_{n-1}}{\rho_n}\right) + 2\pi^2 i^2\right)\delta_{ij}\right\|,$$

$$B_n = \left\|a_n\delta_{ij} + \sum_{k=1}^{p}\frac{64ijd_n u_{ns}}{\pi^3 s(4i^2 - s^2)(4j^2 - s^2)}\right\|,$$

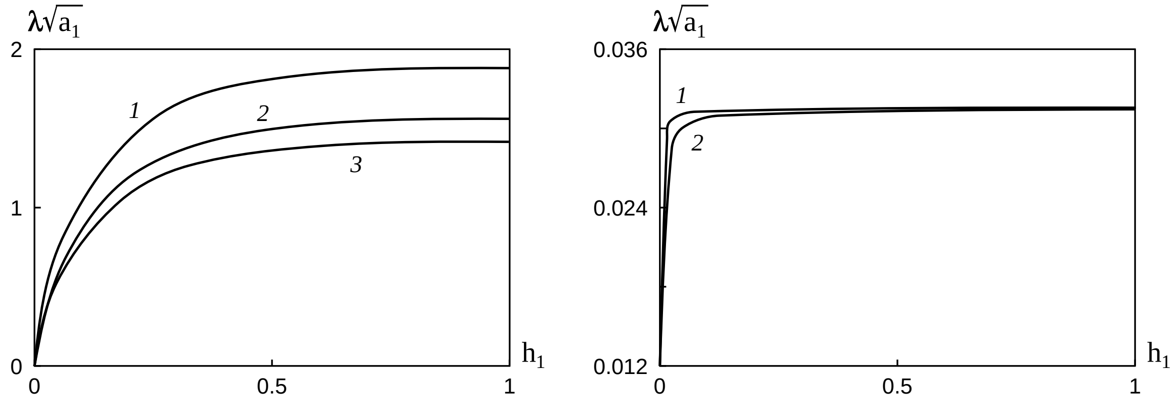
$$\tilde{B}_n = \left\|\sum_{k=1}^{p}\frac{64ijd_n b_{ns}}{\pi^3 s(4i^2 - s^2)(4j^2 - s^2)}\right\|,$$

$$i, j = \overline{1, p}, \; s = 2k - 1, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

При $T_2 = \infty$ или $T_1 = \infty$, $\rho_1 = 0$ система (25) совпадает с системой, полученной в работе [2]. В случае, когда механическая система содержит только n-ую мембрану, система записывается следующим образом:

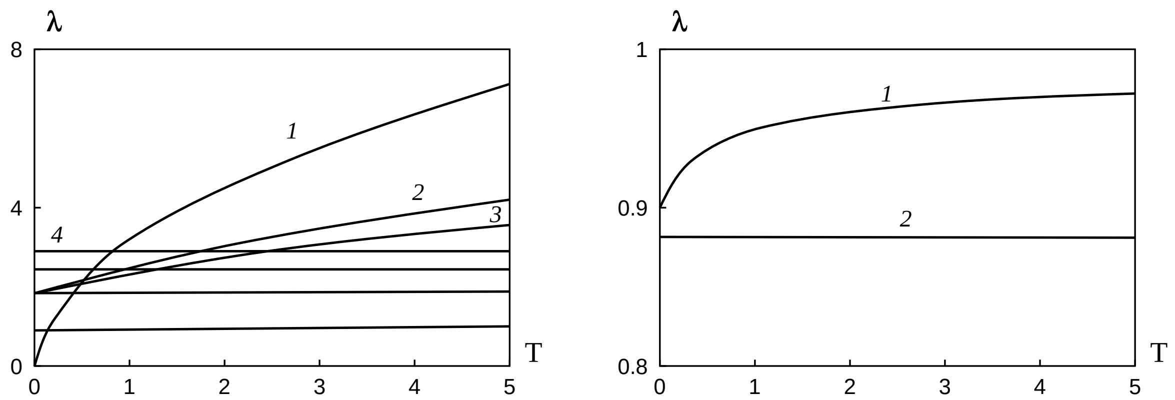
$$\left(A_n - \lambda^2\tilde{B}_n(\lambda^2)\right)\vec{W}_n = 0,$$

$$\begin{aligned} &\tilde{B}_n(\lambda^2) = \\ &= \left\|a_n\delta_{ij} + \sum_{k=1}^{p}\frac{64ijd_n}{\pi^3 s(4i^2 - s^2)(4j^2 - s^2)}\times\right.\\ &\left.\times\left(u_{ns} + \frac{\lambda^2\rho_{12}b_{1s}^2}{(1 - \rho_{n-1}/\rho_n)\pi s - u_{\tilde{n}s}\lambda^2}\right)\right\|. \end{aligned} \tag{26}$$



а *б*

Рис. 2. Зависимость первой безразмерной собственной частоты от глубины верхней жидкости h_1:
а – из первого набора, *б* – из второго набора;
1 – $\varepsilon_1 = 0.5$, *2* – $\varepsilon_1 = 0.2$, *3* – $\varepsilon_1 = 0$



а *б*

Рис. 3. Зависимость безразмерных собственных частот от натяжения мембраны T_1

Следует отметить, что линейные системы (26) в методе Бубнова – Галеркина, а также частотные уравнения (19) – (21) при отсутствии одной из мембран нельзя получить из общего случая с помощью предельного перехода, поскольку в соответствующих соотношениях (уравнения (16), (17) и система (25)) учтены граничные условия закрепления мембран.

5. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

Известно, что собственные колебания двухслойной жидкости имеют спектр, состоящий из двух наборов частот [11]. Первый из них соответствует собственным колебаниям свободной, а второй – внутренней поверхности. В рассматриваемой задаче также можно выделить два набора собственных частот, соответствующих колебаниям мембран на "свободной" и внутренней поверхностях жидкости.

Численный анализ показал, что добавление второй жидкости ($\rho_1 \neq 0$) на поверхность мембраны, находящейся на "свободной" поверхности однородной жидкости, приводит к уменьшению собственных частот. Этот эффект имеет понятную физическую природу. Уменьшение частот должно быть наиболее существенным при $\rho_1 > \rho_2$. Заметим, однако, что при малых натяжениях мембраны происходит потеря устойчивости ее равновесного положения.

Пусть в однородной жидкости с упругой мембраной на “свободной” поверхности произошла двухслойная стратификация с сохранением массы жидкости

$$\rho_1 = \rho(1-\varepsilon_1), \qquad \rho_2 = \rho(1+\varepsilon_2),$$

$$\varepsilon_2 = h_1\varepsilon_1/h_2, \qquad h_2 = h - h_1.$$

Здесь ρ – начальная плотность однородной жидкости; h – глубина заполнения. Для оценки влияния стратификации на частотный спектр были проведены численные исследования при $h=1.0$, $a_1=0.1$. Если $\varepsilon_1<0.1$ и $d_1=10$, то первый набор частот близок к частотам колебаний однородной жидкости и при $\varepsilon_1=0$ совпадает с ним.

Это видно из рис. 2, где показана зависимость первой безразмерной собственной частоты первого (рис. 2, *а*) и второго (рис. 2, *б*) наборов от глубины заполнения канала верхней жидкостью h_1 при пренебрежимо малом h_2 ($h_2=0.001$). Заметим, что с увеличением глубины слоя верхней жидкости собственные частоты механической системы возрастают, а при $h_1>0.5$ становятся практически постоянными.

На рис. 3, *а* кривыми *1*, *3* показаны первые собственные частоты колебаний закрепленной по контуру мембраны в вакууме и на поверхности однородной жидкости соответственно. Если жидкость разделилась на два слоя при значениях параметров $h_1=0.2$, $\varepsilon_1=0.5$, то первая частота собственных колебаний системы увеличивается (кривая *2*). Кроме того, появляется второй набор частот (кривые *4*), на которые натяжение мембран влияет несущественно. Это видно из рис. 3, *б*, где кривыми *1*, *2* изображены первые собственные частоты из второго набора при наличии и отсутствии мембраны на “свободной” поверхности соответственно.

В табл. 1 приведена сходимость первых четырех собственных значений уравнения (18) в зависимости от количества членов p в отрезках рядов (18) при $\varepsilon_1=0.1$, $h_1=0.1$, $h_2=0.9$. Из таблицы следует, что при $p=2$ ошибка для первого собственного значения $\lambda_1\sqrt{a_1}$ составляет 0.3 %. При $p=4$ в значениях $\lambda_i\sqrt{a_1}$ $(i=\overline{1,4})$ получено до четырех верных значащих цифр, а при $p=6$ – до пяти. При $p=14$ их количество возрастает до шести. При расчетах учитывалось условие (7).

В табл. 2 приведены аналогичные данные, полученные с помощью уравнения (17). Здесь при $p=4$ ошибка для $\lambda_i\sqrt{a_1}$ составляет 9÷12 %, при $p=6$ – 6÷7 %, при $p=8$ – 4÷5%, а при $p=10$ – 3÷4 %. Частоты, полученные с помощью метода Бубнова – Галеркина, даны в табл. 3. Из нее видно, что этот метод позволяет получить в первом приближении $\lambda_1\sqrt{a_1}$ с ошибкой 6.62 %. Решение, построенное по шести координатным функциям, дает погрешность менее 1 %, по восьми – менее 0.3%. При учете десяти координатных функций получаем 2÷4 верных значащих цифры для первых четырех собственных значений.

Численные исследования частотных уравнений (16) и (17) показали, что для получения качественной картины удобно использовать соотношения (17) при $p\ge 4$. Для уточнения частот целесообразно применять формулы (16) или метод Бубнова – Галеркина с более, чем четырьмя координатными функциями. К аналогичному выводу приходим при расчетах по формулам (19) и (21).

Табл. 1. Частоты первого набора, вычисленные с помощью уравнения (18)

p	$\lambda_1\sqrt{a_1}$	$\lambda_2\sqrt{a_1}$	$\lambda_3\sqrt{a_1}$	$\lambda_4\sqrt{a_1}$
2	1.369718	4.216998	–	–
4	1.366277	4.006543	7.423590	11.873995
6	1.366069	4.000544	7.372909	11.251036
8	1.366033	3.999562	7.366208	11.222234
10	1.366023	3.999295	7.364474	11.215598
12	1.366019	3.999199	7.363864	11.213357
14	1.366017	3.999158	7.363605	11.212424

Табл. 2. Частоты первого набора, вычисленные с помощью уравнения (19)

p	$\lambda_1\sqrt{a_1}$	$\lambda_2\sqrt{a_1}$	$\lambda_3\sqrt{a_1}$	$\lambda_4\sqrt{a_1}$
2	1.665737	–	–	–
4	1.490161	4.421652	8.261339	–
6	1.444142	4.253551	7.860605	12.024867
8	1.422971	4.181336	7.711366	11.760429
10	1.410816	4.141044	7.631407	11.628318
12	1.402931	4.115332	7.581377	11.547898
14	1.397405	4.097501	7.547089	11.493591

Табл. 3. Частоты первого набора, вычисленные с помощью метода Бубнова – Галеркина

p	$\lambda_1\sqrt{a_1}$	$\lambda_2\sqrt{a_1}$	$\lambda_3\sqrt{a_1}$	$\lambda_4\sqrt{a_1}$
1	1.456441	–	–	–
2	1.374633	4.455916	–	–
4	1.367345	4.034112	7.487536	12.789980
6	1.366637	4.021700	7.398510	11.294058
8	1.366462	4.019134	7.384928	11.242897
10	1.366399	4.018277	7.380821	11.229668

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выведено частотное уравнение собственных колебаний двухслойной жидкости в прямоугольном канале с упругими мембранами на "свободной" и внутренней поверхностях. Показано, что при большой глубине заполнения канала верхней жидкости оно распадается на два независимых уравнения.

Рассмотрены случаи, когда мембрана находится только на "свободной" или внутренней поверхности двухслойной жидкости. Получено условие устойчивости совместных колебаний жидкостей и упругих мембран. Оно определяется разностью плотностей, натяжением внутренней мембраны и шириной канала.

Показано, что частотный спектр состоит из двух наборов собственных частот, соответствующих колебаниям мембран на "свободной" и внутренней поверхностях. С увеличением натяжения мембраны, находящейся на "свободной" поверхности жидкости, существенно увеличиваются частоты колебаний первого набора и незначительно – частоты колебаний второго набора. Аналогичная картина наблюдается и для мембраны, находящейся на внутренней поверхности. Увеличение натяжения мембран и уменьшение их массы приводят к увеличению собственных частот, что находится в соответствии с теоремой Рэлея.

Сравнивая затраты машинного времени на реализацию рассмотренных расчетных схем при использовании пакета Maple, приходим к выводу о том, что более предпочтительным является алгоритм, основанный на аналитическом решении задачи.

1. *Докучаев Л. В* Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами.– М.: Машиностроение, 1987.– 232 с.
2. *Троценко В. А.* Свободные колебании жидкости в прямоугольном канале с упругой мембраной на свободной поверхности // Прикл. мех.– 1995.– **31**, N 8.– С. 74–80.
3. *Самодаев В. Е.* Влияние перегрузки на частоты колебаний жидкости в жестком цилиндрическом баке с мембраной на свободной поверхности // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью.– Томск: Изд-во ТГУ, 1972.– С. 180–186.
4. *Capodanno P.* Small planar oscillations of a container with elastic cover containing two immiscible liquids // Eur. J. Mech. B.– 1990.– **9**, N 3.– P. 289–306.
5. *Capodanno P.* Vibrations d'un Liquide dans un Container Culindricue Summetrique a Fond Elastique en Apesanteur // Mecanique Appliquee.– 1993.– **38**, N 1.– P. 59–72.
6. *Capodanno P.* Vibrations d'un Fluide Compressible une Cavite Fermee par Une Membran Supportee par un Ecru // Mech. Resch Communicat.– 1995.– **22**, N 1.– P. 1–7.
7. *Копачевский Н. Д., Орлова Л. Д., Пашкова Ю.С.* Дифференциально-операторные и интегродифференциальные уравнения в проблеме малых колебаний гидродинамических систем // Ученые записки Симф. ун-та.– 1995.– N 2(41).– С. 98–108.
8. *Пашкова Ю. С.* Колебания жидкости в сосуде, закрытом упругой мембраной, и общие вопросы эволюции гидродинамических систем.– Донецк: Автореф. дис., 1996.– 15 с.
9. *Кононов Ю. Н., Шевченко В. П.* Свободные колебании двухслойной жидкости с упругими инерционными мембранами на свободной и внутренней поверхностях // Теор. прикл. мех.– 2001.– N 32.– С. 158–163.
10. *Кононов Ю. Н., Шевченко В. П.* Свободные колебании многослойной стратифицированной жидкости, разделенной упругими мембранами // Теор. прикл. мех.– 1999.– N 29.– С. 151–163.
11. *Ламб Г.* Гидродинамика.– М.: Гостехиздат, 1947.– 827 с.