УДК 517.977.56

М. М. Копець

Оптимальне керування осесиметричними коливаннями круглої мембрани

(Представлено членом-кореспондентом НАН України А. О. Чикрієм)

Розглядається лінійно-квадратична задача оптимального керування осесиметричними коливаннями круглої мембрани. Запропоновано формулювання вищезгаданої задачі в полярній системі координат. За допомогою методу множників Лагранжа отримано необхідні умови оптимальності. Доведено єдиність оптимального керування. Отримано систему інтегро-диференціальних рівнянь Ріккаті та додаткові умови для неї. Розв'язок цієї системи дає можливість виписати формулу для обчислення оптимального керування.

Ключові слова: задача оптимального керування, квадратичний функціонал, метод множників Лагранжа, необхідні умови оптимальності, осесиметричні коливання круглої мембрани, система рівнянь Ріккаті.

Останні шістьдесят років характеризуються стрімким розвитком науки та техніки. Значний прогрес спостерігається в літакобудуванні, ракетобудуванні, суднобудуванні, у військовій та космічній техніці. В кожній із перерахованих галузей зустрічаються коливні процеси. В одних випадках ними можна скористатись, в інших — навпаки, їх потрібно нейтралізувати через їх негативний вплив на протікання того або іншого процесу. Це означає, що процеси коливання потрібно не тільки вивчати, але й вміти ефективно ними керувати. Подібні задачі ефективного керування механічними процесами саме і досліджує теорія оптимального керування. В теорії оптимального керування важливе місце займає лінійно-квадратична задача. Цей термін означає, що потрібно знайти екстремальне значення квадратичного функціонала на множині розв'язків деякої системи лінійних диференціальних рівнянь, праві частини яких певним чином залежать від одного або декількох параметрів (керувань).

У даній роботі вперше розглядається лінійно-квадратична задача оптимального керування процесом осесиметричних коливань круглої мембрани. Для цієї задачі отримані необхідні умови оптимальності та виведена відповідна система інтегро-диференціальних рівнянь Ріккаті в полярних координатах.

Постановка задачі. Диференціальне рівняння вимушених осесиметричних коливань круглої мембрани має вигляд

$$\frac{\partial^2 z(t,r)}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 z(t,r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z(t,r)}{\partial r}\right) + u(t,r), \tag{1}$$

де через t позначено змінну, що описує час, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, для змінної r маємо обмеження $0 \leqslant r \leqslant R$. Дійсні числа $a > 0$, $R > 0$, $t_0 \geqslant 0$ та $t_1 > 0$ задані. Функція $u(t,r) \in L_2(\Omega)$ називається допустимим керуванням, де множина Ω має вигляд $\Omega = (t,r)\colon t_0 \leqslant t \leqslant t_1, 0 \leqslant r \leqslant R$. Для рівняння (1) задано початкові умови

$$z(t_0,r) = f(r), \qquad \frac{\partial z(t_0,r)}{\partial t} = g(r) \tag{2}$$

та крайові умови

$$|z(t,0)| < \infty, \qquad z(t,R) = 0. \tag{3}$$

Розв'язком крайової задачі (1)–(3) вважається її узагальнений розв'язок. Якість процесу керування оцінюється за допомогою такого функціонала:

$$I(u,z) = \frac{1}{2}\int_0^R z^2(t_1,r)rdr + \frac{1}{2}\int_0^R \left[\frac{\partial z(t_1,r)}{\partial t}\right]^2 rdr + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^R [z^2(t,r) + u^2(t,r)]rdrdt. \tag{4}$$

Допустиме керування, на якому реалізується мінімум функціонала (4), називається оптимальним керуванням. Задача оптимізації (1)–(4) полягає у знаходженні оптимального керування.

Необхідні умови оптимальності. В переважній більшості випадків для знаходження розв'язку задач оптимізації, подібних до задачі (1)–(4), використовується принцип максимуму Понтрягіна або метод динамічного програмування Белмана. В даній роботі для цієї мети застосовано метод множників Лагранжа, суть якого полягає в заміні функціонала (4) таким функціоналом:

$$J(\psi,u,z) = \frac{1}{2}\int_0^R z^2(t_1,r)rdr + \frac{1}{2}\int_0^R \left[\frac{\partial z(t_1,r)}{\partial t}\right]^2 rdr + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^R [z^2(t,r) + u^2(t,r)]rdrdt +$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1}\int_0^R \psi(t,x)\left[a^2\left(\frac{\partial^2 z(t,r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z(t,r)}{\partial r}\right) + u(t,r) - \frac{\partial^2 z(t,r)}{\partial t^2}\right]rdrdt, \tag{5}$$

де функція $\psi(t,x)$ називається множником Лагранжа. В результаті такої заміни задача оптимізації (1)–(4) зводиться до задачі відшукання мінімуму функціонала (5) із врахуванням початкових умов (2) та крайових умов (3). Далі шукаємо приріст ΔJ функціонала (5) згідно з формулою

$$\Delta J = J(\psi + \varepsilon\delta\psi, u + \varepsilon\delta u, z + \varepsilon\delta z) - J(\psi,u,z).$$

Застосовуючи метод з роботи [1] та враховуючи вираз (5), отримаємо таке співвідношення:

$$\Delta J = \varepsilon\int_0^R \left[z(t_1,r) + \frac{\partial\psi(t_1,r)}{\partial t}\right]rdr + \varepsilon\int_0^R \left[\frac{\partial z(t_1,r)}{\partial t} - \psi(t_1,r)\right]rdr +$$
$$+ \varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_0^R \left[z(t,r) + a^2\left(\frac{\partial^2\psi(t,r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi(t,r)}{\partial r}\right) - \frac{\partial^2\psi(t,r)}{\partial t^2}\right]\delta z(t,r)rdrdt +$$
$$+ \varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_0^R \left[a^2\left(\frac{\partial^2 z(t,r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z(t,r)}{\partial r}\right) + u(t,x) - \frac{\partial^2 z(t,r)}{\partial t^2}\right]\delta\psi(t,r)rdrdt +$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^R[\delta z(t_1,r)]^2rdr+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^R\left[\frac{\partial\delta z(t_1,r)}{\partial t}\right]^2rdr+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^R[[\delta z(t,r)]^2+[\delta u(t,r)]^2]rdrdt. \tag{6}$$

На підставі рівності (6) можна сформулювати таке твердження.

Теорема 1. *Оптимальне керування* $u(t,x)$ *в задачі оптимізації* (1)–(4) *єдине і визначається із співвідношень*

$$\frac{\partial^2 z(t,r)}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 z(t,r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z(t,r)}{\partial r}\right)+u(t,r), \tag{7а}$$

$$z(t_0,r)=f(r),\qquad \frac{\partial z(t_0,r)}{\partial t}=g(r), \tag{7б}$$

$$|z(t,0)|<\infty,\qquad z(t,R)=0, \tag{7в}$$

$$\frac{\partial^2 \psi(t,r)}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 \psi(t,r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \psi(t,r)}{\partial r}\right)+z(t,r), \tag{7г}$$

$$z(t_1,r)+\frac{\partial\psi(t_1,r)}{\partial t}=0,\qquad \frac{\partial z(t_1,r)}{\partial t}-\psi(t_1,r)=0, \tag{7д}$$

$$|\psi(t,0)|<\infty,\qquad \psi(t,R)=0, \tag{7е}$$

$$u(t,r)+\psi(t,r)=0. \tag{7ж}$$

Доведення. Якщо мають місце співвідношення (7а)–(7ж), то перша варіація функціонала (5) дорівнює нулю. А це і є необхідна умова його екстремуму. В цьому випадку рівність (6) матиме вигляд

$$\Delta J=\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^R[\delta z(t_1,r)]^2rdr+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^R\left[\frac{\partial\delta z(t_1,r)}{\partial t}\right]^2rdr+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^R[[\delta z(t,r)]^2+[\delta u(t,r)]^2]rdrdt. \tag{8}$$

Очевидно, що $\Delta J>0$ для $\delta u(t,r)\neq 0$. Це означає, що функціонал (4) досягає свого мінімального значення на керуванні $u(t,r)$. Припустимо, що існує ще одне оптимальне керування $\overline{u}(t,r)=u(t,r)+\delta u(t,r)$. Тоді обидва ці керування задовольняють співвідношення (7а)–(7ж). Крім того, повинна виконуватись рівність $\Delta J=0$. Із співвідношення (8) випливає, що це можливо тільки в тому випадку, коли $\delta u(t,r)=0$. Тому $\overline{u}(t,r)=u(t,r)$, що і завершує доведення теореми 1.

Виведення системи інтегро-диференціальних рівнянь Ріккаті. Оскільки система співвідношень (7а) — (7ж) лінійна, то є підстави вважати, що мають місце такі дві залежності:

$$\frac{\partial\psi(t,r)}{\partial t}=-\int_0^R\left[P_{11}(t,r,\rho)z(t,\rho)+P_{12}(t,r,\rho)\frac{\partial z(t,\rho)}{\partial t}\right]\rho d\rho, \tag{9}$$

$$\psi(t,r) = \int_0^R \left[P_{21}(t,r,\rho)z(t,\rho) + P_{22}(t,r,\rho)\frac{\partial z(t,\rho)}{\partial t}\right]\rho d\rho, \tag{10}$$

де функції $P_{11}(t,r,\rho)$, $P_{12}(t,r,\rho)$, $P_{21}(t,r,\rho)$, $P_{22}(t,r,\rho)$ потрібно знайти. Вважаємо, що мають місце крайові умови

$$|P_{12}(t,r,0)| < \infty, \qquad P_{12}(t,r,R) = 0, \tag{11}$$

$$|P_{22}(t,r,0)| < \infty, \qquad P_{22}(t,r,R) = 0. \tag{12}$$

Подібно до того, як це було зроблено в [2], одержуємо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial P_{11}(t,r,\rho)}{\partial t} + a^2\left(\frac{\partial^2 P_{12}(t,r,\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P_{12}(t,r,\rho)}{\partial \rho}\right) + a^2\left(\frac{\partial^2 P_{21}(t,r,\rho)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial P_{21}(t,r,\rho)}{\partial r}\right) +$$
$$+ \frac{1}{\rho}\delta(r-\rho) - \int_0^R P_{12}(t,r,\lambda)P_{21}(t,\lambda,\rho)\lambda d\lambda = 0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial P_{12}(t,r,\rho)}{\partial t} + a^2\left(\frac{\partial^2 P_{22}(t,r,\rho)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial P_{22}(t,r,\rho)}{\partial r}\right) + P_{11}(t,r,\rho) -$$
$$- \int_0^R P_{12}(t,r,\lambda)P_{22}(t,\lambda,\rho)\lambda d\lambda = 0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial P_{21}(t,r,\rho)}{\partial t} + a^2\left(\frac{\partial^2 P_{22}(t,r,\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P_{22}(t,r,\rho)}{\partial \rho}\right) + P_{11}(t,r,\rho) -$$
$$- \int_0^R P_{22}(t,r,\lambda)P_{21}(t,\lambda,\rho)\lambda d\lambda = 0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial P_{22}(t,r,\rho)}{\partial t} + P_{12}(t,r,\rho) + P_{21}(t,r,\rho) - \int_0^R P_{22}(t,r,\lambda)P_{22}(t,\lambda,\rho)\lambda d\lambda = 0. \tag{16}$$

Зіставляючи умови (7д) та рівності (9), (10), маємо співвідношення

$$P_{11}(t_1,r,\rho) = \frac{1}{\rho}\delta(r-\rho), \qquad P_{12}(t_1,r,\rho) = 0, \tag{17}$$

$$P_{21}(t_1,r,\rho) = 0, \qquad P_{22}(t_1,r,\rho) = \frac{1}{\rho}\delta(r-\rho). \tag{18}$$

Отже, справедливе таке твердження.

Теорема 2. *Функції* $P_{11}(t,r,\rho)$, $P_{12}(t,r,\rho)$, $P_{21}(t,r,\rho)$, $P_{22}(t,r,\rho)$ *задовольняють систему інтегро-диференціальних рівнянь* (13)–(16), *крайові умови* (11), (12) *і додаткові умови* (17), (18). *Оптимальне керування має вигляд*

$$u(t,r) = -\int_0^R \left[P_{21}(t,r,\rho)z(t,\rho) + P_{22}(t,r,\rho)\frac{\partial z(t,\rho)}{\partial t}\right]\rho d\rho.$$

де функція $z(t,\rho)$ є розв'язком наступної крайової задачі

$$\frac{\partial^2 z(t,\rho)}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 z(t,\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial z(t,\rho)}{\partial \rho}\right) - \int\limits_0^R \left[P_{21}(t,r,\rho)z(t,\rho) + P_{22}(t,r,\rho)\frac{\partial z(t,\rho)}{\partial t}\right]\rho d\rho,$$

$$z(t_0,\rho) = f(\rho), \qquad \frac{\partial z(t_0,\rho)}{\partial t} = g(\rho),$$

$$|z(t,0)| < \infty, \qquad z(t,R) = 0.$$

Таким чином, у роботі розглянуто лінійно-квадратичну задачу оптимального керування осесиметричними коливаннями круглої мембрани. Актуальність цієї задачі не викликає сумнівів, оскільки в основному подібні задачі досліджувались у прямокутній декартовій системі координат. Автором запропоновано формулювання вищезгаданої задачі в полярній системі координат. За допомогою методу множників Лагранжа отримано необхідні умови оптимальності. Доведено єдиність оптимального керування. Отримано систему інтегро-диференціальних рівнянь Ріккаті та додаткові умови для неї. Розв'язок цієї системи дає можливість виписати формулу для обчислення оптимального керування. Необхідно також відзначити доцільність узагальнення одержаних у даній роботі результатів на випадок систем із дробовими похідними [3, 4] за допомогою методу розв'язувальних функцій [5–7].

Цитована література

1. *Копец М. М.* Матричное интегро-дифференциальное уравнение Риккати для параболической системы // Пробл. управления и инфоматики. – 2014. – № 1. – С. 12–22.
2. *Копец М. М.* Линейно-квадратическая задача оптимального управления для гиперболической системы // Пробл. управления и инфоматики. – 2015. – № 1. – С. 40–51.
3. *Chikrii A. A., Eidel'man S. D.* Game control problem for quasi-linear systems with fractional derivatives of Riemann-Liouville // Cybernetics and Systems Analysis. – 2012. – No 6. – P. 66–99.
4. *Eidel'man S. D., Chikrii A. A.* Dynamic game approach problem for equations of fractional order // Ukr. mat. zhurn. – 2000. – **52**, No 11. – P. 1566–1583.
5. *Chikrii A. A., Rappoport J. S., Chikrii K. A.* Multivalued mapping and their selectors in the theory of conflict-controlled processes // Cybernetics and Systems Analysis. – 2007. – **43**, No 5. – P. 719–730.
6. *Chikrii A. A., Dzyubenko K. J.* Bilinear Markov processes of searching for moving targets // J. of Information Sci. – 2001. – **33**, No 5. – P. 62–74.
7. *Pilipenko Yu. V., Chikrii A. A.* The oscillation processes of conflict control // Прикл. мат. та мех. – 1993. – **57**, No 3. – P. 3–14.

References

1. *Kopets M. M.* Problems of control and infomatik, 2014, No 1: 12–22 (in Russian).
2. *Kopets M. M.* Problems of control and infomatik, 2015, No 1: 40–51.
3. *Chikrii A. A., Eidel'man S. D.* Cybernetics and Systems Analysis, 2012, No 6: 66–99 .
4. *Eidel'man S. D., Chikrii A. A.* Ukr. mat. zhurn, 2000, **52**, No 11: 1566–1583.
5. *Chikrii A. A., Rappoport J. S., Chikrii K. A.* Cybernetics and Systems Analysis, 2007, **43**, No 5: 719–730.
6. *Chikrii A. A., Dzyubenko K. J.* J. of Information Sci, 2001, **33**, No 5: 62–74.
7. *Pilipenko Yu. V., Chikrii A. A.* Prikl. Matematika i Mechanika, 1993, **57**, No 3: 3–14.

НТУ України "Київський політехнічний інститут"

Надійшло до редакції 17.03.2015

М. М. Копец

Оптимальное управление осесимметричными колебаниями круглой мембраны

НТУ Украины “Киевский политехнический институт”

Рассматривается линейно-квадратическая задача оптимального управления осесимметричными колебаниями круглой мембраны. Предложена формулировка вышеупомянутой задачи в полярной системе координат. С помощью метода множителей Лагранжа получены необходимые условия оптимальности. Доказана единственность оптимального управления. Получена система интегро-дифференциальных уравнений Риккати и дополнительные условия для нее. Решение этой системы дает возможность выписать формулу для вычисления оптимального управления.

Ключевые слова: задача оптимального управления, квадратичный функционал, метод множителей Лагранжа, необходимые условия оптимальности, осесимметричные колебания круглой мембраны, система уравнений Риккати.

M. M. Kopets

Optimal control over axisymmetric vibrations of a circular membrane

NTU of Ukraine “Kiev Polytechnic Institute”

The article discusses the linear-quadratic problem of optimal control over axisymmetric vibrations of a circular membrane. The statement of the aforementioned task in polar coordinates is suggested. Using the method of Lagrange multipliers, necessary optimality conditions are obtained. The uniqueness of optimal control is proved. A system of integro-differential Riccati equations and additional conditions for it are obtained. The solution of this system makes it possible to write down the formula for calculating the optimal control.

Keywords: optimal control problem, quadratic functional, method of Lagrange multipliers, necessary conditions of optimality, axisymmetric vibrations of a circular membrane, system of Riccati equations.