

Член-корреспондент НАН Украины В. С. Гудрамович, Э. Л. Гарт

## Проекционно-итерационная модификация метода локальных вариаций для задач локальной устойчивости сферических оболочек

*Предложена и теоретически обоснована проекционно-итерационная схема реализации метода локальных вариаций для решения вариационных задач с квадратичным функционалом. На примере решения задачи о локальной устойчивости сферической оболочки показана практическая эффективность предложенной модификации метода локальных вариаций.*

**Ключевые слова:** локальная устойчивость, сферическая оболочка, метод локальных вариаций, проекционно-итерационная схема реализации.

Использование современных вычислительных средств для разработки и апробации эффективных методов расчета и проведения численных экспериментов в значительной степени экономит время и средства при создании конструкций новой техники. Поэтому разработка эффективных численных методов решения задач механики деформируемого твердого тела и усовершенствование уже существующих методов — весьма актуальная задача.

Многие задачи механики можно рассматривать в вариационной постановке и для их исследования использовать аппарат и методы функционального анализа.

Одним из эффективных численных методов решения вариационных задач является метод локальных вариаций (МЛВ), исследованный в работах Ф. Л. Черноусько и др. [1, 2]. Этот метод является вариантом методов вариаций в фазовом пространстве, развитых в работах Н. Н. Моисеева, в основу которых положено изменение фазовых компонент траектории [2].

МЛВ имеет ряд преимуществ по сравнению с другими численными методами. Он позволяет легко учитывать ограничения на искомые функции, произвольность формы области и другие усложнения. В механике деформируемого твердого тела МЛВ эффективен для существенно неоднородных напряженных состояний. Этот метод позволяет рассмотреть различные виды нагружения тонкостенных систем и граничные условия, различную структуру таких систем. Однако следует заметить, что при решении некоторых классов задач, например, вариационных, которые сводятся к линейным краевым задачам, МЛВ требует большего времени расчета для достижения заданной точности, чем конечно-разностные методы и вариационные методы типа Рунге. Поиск путей устранения указанного недостатка привел к идее разработки более эффективных схем его реализации на основе идеологии проекционно-итерационных методов [3–6], позволяющих значительно сократить машинное время счета. Эффективность проекционно-итерационных схем реализации методов конечных разностей и конечных элементов для решения широкого круга задач теории упругости и пластичности показана в [7–10]. Разработка проекционно-итерационной модификации еще одного численного метода решения вариационных задач — МЛВ, представляет несомненный интерес. Отметим, что вопросам уменьшения машинного времени счета для МЛВ уделялось внимание ранее [11].

---

© В. С. Гудрамович, Э. Л. Гарт, 2015

1. Рассмотрим задачу о нахождении в области  $G$  с границей  $\Gamma$  функции  $u(x, y) \in L_2(G)$ , доставляющей минимум квадратичному функционалу

$$F = \iint_G f(x, y, u, u'_x, u'_y) dx dy = \iint_G \left\{ S \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + Q \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + Ru^2 + 2Tu \right\} dx dy \quad (1)$$

и удовлетворяющей граничному условию

$$u = g(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (2)$$

Здесь  $S, Q, R, T, g$  — заданные непрерывно-дифференцируемые функции независимых переменных  $x, y$ .

Для решения поставленной задачи (1), (2) применим проекционно-итерационную модификацию МЛВ. Исходную задачу запишем в виде

$$F(u) \rightarrow \inf, \quad u \in \Omega, \quad (3)$$

где  $\Omega$  — некоторое множество вещественного гильбертова пространства  $H$ ;  $F(u)$  — ограниченный снизу на  $\Omega$  функционал ( $\inf_{u \in \Omega} F(u) = F^* > -\infty$ ). В частности,  $H = L_2(\Omega)$ ;  $\Omega$  — множество функций из  $L_2(\Omega)$ , удовлетворяющих граничным условиям (2).

Изложим основную идею проекционно-итерационной модификации МЛВ. Исходный функционал  $F(u)$ , заданный на некотором множестве  $\Omega$  гильбертова пространства  $H$ , аппроксимируется последовательностью более простых функционалов  $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$ , заданных на некоторых множествах  $\tilde{\Omega}_n$  пространств  $\tilde{H}_n$ , изоморфных подпространствам  $H_n$  исходного пространства  $H$  ( $u_n = \Phi_n^{-1} \tilde{u}_n$ ,  $u_n \in H_n$ ,  $\tilde{u}_n \in \tilde{H}_n$ ,  $\Phi_n$  — оператор, осуществляющий взаимно однозначное соответствие между элементами подпространств  $H_n$  и  $\tilde{H}_n$ ). Для минимизации полученной последовательности функционалов  $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$  применяется МЛВ таким образом, что, начиная с некоторого номера  $n = N$  (соответствующего грубому разбиению области  $G$ ), достаточно малого числа  $h_n$  и некоторого начального приближения  $\tilde{u}_{n,ij}^{(k)}$  ( $k = 0, i = \overline{0, N_1}, j = \overline{0, N_2}$ ) последовательно в каком-либо порядке варьируются значения  $\tilde{u}_{n,ij}^{(k)}$  во всех внутренних точках  $(x_i, y_j)$  области  $G$  путем прибавления или вычитания величины  $h_n$ . Варирование продолжается не до полной сходимости (т. е. когда дальнейшее дробление шага  $h_n$  не приводит к уменьшению значения функционала), а до тех пор, пока функционал почти не уменьшается, а решение  $\tilde{u}_{n,ij}^{(k)}$  ( $k = 0, 1, \dots, k_n$ ) меняется в небольшом количестве точек, т. е.  $|\tilde{F}_n(\tilde{u}_{ij}^{(k)}) - \tilde{F}_n(\tilde{u}_{ij}^{(k+1)})| < \varepsilon_n$ ,  $|\tilde{u}_{n,ij}^{(k)} - \tilde{u}_{n,ij}^{(k+1)}| < \delta_n$ , за исключением  $(i, j) \in I_n$ , где  $I_n$  — фиксированное множество индексов мощности  $\ll (N_1 - 1) \times (N_2 - 1)$ . Далее, найденное значение  $\tilde{u}_{n,ij}^{(k)}$  интерполируется на более мелкое разбиение и используется в качестве начального приближения для минимизации следующего  $\tilde{F}_{n+1}(\tilde{u}_{n+1})$  функционала. Процесс продолжается до полной сходимости итераций при некотором малом шаге  $h_n$  и выполнении условия

$$|\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)}) - \tilde{F}_{n+1}(\tilde{u}_{n+1}^{(k_{n+1})})| < \varepsilon, \quad (4)$$

где  $\varepsilon$  — заданная точность вычислений.

2. Рассмотрим применение проекционно-итерационной модификации МЛВ к вариационной задаче (1), (2) с квадратичным функционалом. Так же, как в [1], разобьем плоскость  $Oxy$  на равные прямоугольные ячейки параллельными прямыми  $x = x_0 + i\Delta x_n$ ,

$y = y_0 + j\Delta y_n$ . Здесь  $\Delta x_n > 0$ ,  $\Delta y_n > 0$  — достаточно малые числа,  $i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;  $n$  — некоторое натуральное число, соответствующее номеру шага процесса разбиения области  $G$ . Выберем величины  $x_0, y_0$  и натуральные числа  $N_1^{(n)}, N_2^{(n)}$  так, чтобы при заданных значениях  $\Delta x_n, \Delta y_n$  область  $G + \Gamma$  содержалась в прямоугольнике  $\bar{G}$ :

$$\bar{G} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_2: \begin{array}{l} x_0 \leq x \leq x_{N_1^{(n)}} = x_0 + N_1^{(n)} \Delta x_n; \\ y_0 \leq y \leq y_{N_2^{(n)}} = y_0 + N_2^{(n)} \Delta y_n \end{array} \right\}.$$

Обозначим через  $P_{ij}$  точки пересечения прямых (вершины ячеек) с координатами  $x_i = x_0 + i\Delta x_n$ ,  $y_j = y_0 + j\Delta y_n$  ( $i = 0, N_1^{(n)}$ ;  $j = 0, N_2^{(n)}$ ). Точку  $P_{ij}$  будем считать внутренней, если она вместе с четырьмя ячейками, вершиной которых она является, лежит в замкнутой области  $G + \Gamma$ . Остальные точки  $P_{ij}$ , лежащие в области  $G + \Gamma$ , будем считать граничными, а точки вне области  $G + \Gamma$  — внешними. Положим  $u_{n,ij} = u(x_i, y_j)$ . Условие (2) перенесем с контура  $\Gamma$  в граничные точки, полагая для них  $u_{n,ij} = g(\xi_i, \eta_j)$ , где  $(\xi_i, \eta_j)$  — точка контура  $\Gamma$ , в некотором смысле близкая к  $(x_i, y_j)$ . В качестве  $(\xi_i, \eta_j)$  можно взять, например, ближайшую к  $(x_i, y_j)$  точку контура  $\Gamma$  либо определить ее условием сноса по одной из координатных осей:  $\xi_i = x_i$  или  $\eta_j = y_j$ .

Интеграл (2) приближенно заменим суммой интегралов по ячейкам, целиком принадлежащих области  $G + \Gamma$ :

$$F \approx \tilde{F}_n = \sum_{ij} \tilde{F}_{n,ij}, \quad (5)$$

где  $\tilde{F}_{n,ij}$  — приближенное значение интеграла по ячейке с вершинами  $P_{ij}, P_{i+1,j}, P_{i,j+1}, P_{i+1,j+1}$ ; индексом  $n$  обозначено соответствие полученного выражения дискретизации области  $G$  с шагами  $\Delta x = \Delta x_n$ ,  $\Delta y = \Delta y_n$ .

Будем искать значения  $u_{ij}$  для всех внутренних точек  $P_{ij}$  области  $G$ , которые доставляют минимум выражению (5). Таким образом, от исходной задачи (1), (2) осуществим переход к последовательности задач минимизации функции многих переменных

$$\tilde{F}_n(\tilde{u}_n) \rightarrow \inf, \quad \tilde{u}_n \in \tilde{\Omega}_n \subset \tilde{H}_n, \quad (6)$$

где  $\tilde{\Omega}_n = \Phi_n \Omega_n$ ,  $\Phi_n$  — линейный оператор взаимно однозначного соответствия пространств  $H_n$  и  $\tilde{H}_n$  ( $\Phi_n u_n = \tilde{u}_n$ ,  $\Phi_n^{-1} \tilde{u}_n = u_n$ );  $\tilde{H}_n$  — подпространство, изоморфное  $H_n$ . Предположим, что последовательность подпространств  $H_n$  предельно плотна в  $H$ , т. е.

$$\forall u \in H \quad \exists \{u_n\} \in H_n: \quad \|u - u_n\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Начиная с некоторого достаточно грубого разбиения, соответствующего некоторому номеру  $n = N$ , будем искать значения  $u_{ij}$ , минимизирующие сумму (1) с помощью метода последовательных приближений. В качестве нулевого приближения  $u_{ij}^{(0)}$ ,  $i = \overline{0, N_1}, j = \overline{0, N_2}$  возьмем любой набор чисел, удовлетворяющий ограничениям (2). Удачный выбор нулевого приближения может значительно ускорить сходимость метода, поэтому здесь следует учесть имеющуюся априорную информацию о предполагаемом решении (качественные, физические и другие соображения).

**3.** Сформулируем теорему о сходимости предложенной модификации.

**Теорема 1.** Пусть на множестве  $\Omega$  вещественного гильбертова пространства  $H$  задан ограниченный снизу функционал  $F(u)$  вида (1). Предположим, что последовательность подпространств  $H_n$  предельно плотна в  $H$ . Последовательность приближений  $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}\}$  к точке минимума функционала (1) строится по правилу:

$$\tilde{u}_n^{(k+1)} = \{\tilde{u}_{n,11}^{(k+1)}, \tilde{u}_{n,12}^{(k+1)}, \tilde{u}_{n,1l}^{(k+1)}, \tilde{u}_{n,21}^{(k+1)}, \dots, \tilde{u}_{n,ml}^{(k+1)}\}, \quad (7)$$

где  $\tilde{u}_{n,ij}^{(k+1)}$  ( $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, l}; k = 0, 1, \dots, k_n - 1$ ) определяются из условия (4);  $k_n$  — количество итераций для приближения к точке минимума функционала  $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$ ;  $\tilde{u}_{n+1}^{(0)}$  — новое начальное приближение к точке минимума функционала  $\tilde{F}_{n+1}(\tilde{u}_{n+1})$ , получаемое путем интерполяции:

$$\tilde{u}_{n+1}^{(0)} = \Phi_{n+1}\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)} \quad (8)$$

( $k = 0, 1, \dots, k_n - 1; n = 1, 2, \dots; \tilde{u}_1^{(0)} \in \tilde{\Omega}_1$ ).

Тогда проекционно-итерационная последовательность  $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}\}$ , построенная по формулам (7), (8), сходится к экстремали  $u^*$  функционала  $F(u)$  на  $\Omega$ .

Заметим, что в отличие от МЛВ, предложенного в [1], проекционно-итерационная модификация этого метода позволяет значительно экономить машинное время, поскольку не требует на каждом этапе варьирования достижения полной сходимости по  $h$  при фиксированных  $\Delta x, \Delta y$ . Кроме того, на практике заранее не известны конечные значения  $\Delta x, \Delta y, h$  и представляется более целесообразным использование критерия останова (4), позволяющего также сократить время счета, обеспечив заданную точность решения.

Следует также заметить, что в отличие от модификации МЛВ, изложенной в [11] и использующей схемы МЛВ с переменным шагом варьирования [2], проекционно-итерационная модификация МЛВ более проста для реализации и требует меньших затрат машинного времени на ПК, что не влияет на качество получаемого решения [12].

**4.** Применим предложенную модификацию МЛВ к задачам локальной устойчивости сферической оболочки при существенно неоднородном напряженном состоянии, вызванном локальным краевым нагружением. Эти задачи важны для оболочечных конструкций аэрокосмической, антенной техники и др. [13, 14]. Действие локальных нагрузок передается через штампы, поведение которых описывается разными моделями, и воспринимается кольцом, подкрепляющим край оболочки.

Такая схема передачи нагрузок моделирует поперечное нагружение сферических диафрагм протяженных оболочечных конструкций, зеркальных антенн, концентраторов лучистой энергии.

На рис. 1 показаны некоторые варианты нагружения и формы волнообразования. Контактное давление является переменным вдоль площадок контакта с различной степенью его локализации — в зависимости от жесткостных параметров штампов и конструкции. Это определяет форму волнообразования. На рис. 1, а, б для малой площадки контакта — одна вмятина, на рис. 1, а, в для протяженной площадки — две вмятины (в этом случае происходит концентрация контактного давления в краевых зонах штампов). Для жестких штампов может произойти нарушение контакта с образованием дискретных площадок контакта различной протяженности. Рис. 1, б, в показывают испытанные оболочки из сплава АМГ6 М, изготовленные методом взрывной штамповки (с контролем отклонения поверхности оболочек от сферической). На рис. 1, г показано устройство, позволяющее проводить

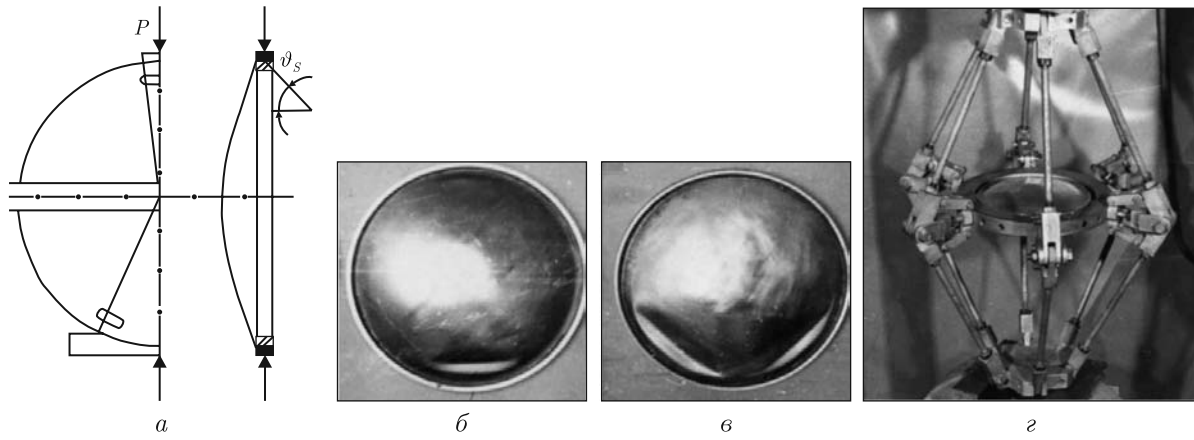


Рис. 1

испытания сферической оболочки разными системами штампов по различным схемам локального нагружения (в том числе по схеме, показанной на рис. 1, а).

Отметим, что при теоретическом рассмотрении контактной задачи приходится решать своеобразную “двойную” контактную задачу взаимодействия: оболочки и кольца с определением усилий их взаимодействия и кольца, нагруженного этими усилиями, со штампом. Методы решения таких задач разработаны в [13, 14].

Для описания поведения сферических оболочек использовались соотношения нелинейной теории пологих оболочек [15]. Система уравнений, определяющих критическое состояние таких оболочек, эквивалентна вариационному уравнению

$$\delta\mathfrak{E} = \delta \int_S \left\{ T_1 \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + 2B^{-1} T_{12} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \theta} + B^{-2} T_2 \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + K[\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2 + \right. \\ \left. + 2(1 - \nu)\varepsilon_{12}^2] + D[\chi_1^2 + \chi_2^2 + 2\nu\chi_1\chi_2 + 2(1 - \nu)\chi_{12}^2] \right\} B d\alpha d\theta = 0, \quad (9)$$

где  $\mathfrak{E}$  — потенциальная энергия деформации оболочки;  $B = R \sin \theta$ ,  $K = EH/(1 - \nu^2)$ ,  $D = EH^3/12(1 - \nu^2)$ ;  $R$ ,  $H$  — радиус и толщина;  $S$  — поверхность оболочки;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $E$  — модуль упругости;  $T_{ij}$  — усилия;  $\varepsilon_{ij}$  — деформации;  $\chi_{ij}$  — кривизны;  $\alpha$ ,  $\theta$  — координаты.

На основе предложенного вычислительного алгоритма проекционно-итерационной модификации МЛВ разработана программа расчета для ПК. Рассмотрена задача о нагружении сферической оболочки двумя одинаковыми штампами. При расчетах определялся критический параметр  $\lambda_* = P_*/EH^2$  в зависимости от параметров  $i$  и  $\vartheta_S$  ( $P_*$  — критическая сила потери устойчивости;  $i = EIE_k^{-1}(R \sin \vartheta_S)^{-4} \cdot 10^7$ ;  $E_k$  — модуль упругости опорного кольца;  $\vartheta_S$  — сферическая координата края оболочки;  $I$  — момент инерции кольца).

На рис. 2, а показана расчетная зависимость  $\lambda_{1*}$  от  $i$  при заданном  $\vartheta_S$  ( $\vartheta_S = 50$ ), на рис. 2, б — зависимость  $\lambda_{2*}$  от  $\vartheta_S$  при заданном  $i$  ( $i = 5$ ). Кружками показаны осредненные значения полученных в эксперименте критических усилий. На рис. 2, а осреднены результаты для 25, на рис. 2, б — для 14 испытаний. Диапазоны параметров испытанных оболочек  $R/H = 400 \div 800$ ,  $\vartheta_S = 40 \div 60^\circ$ ,  $i = 2,5 \div 9$ . Оболочки нагружались самоуравновешенной системой двух одинаковых штампов малой протяженности.

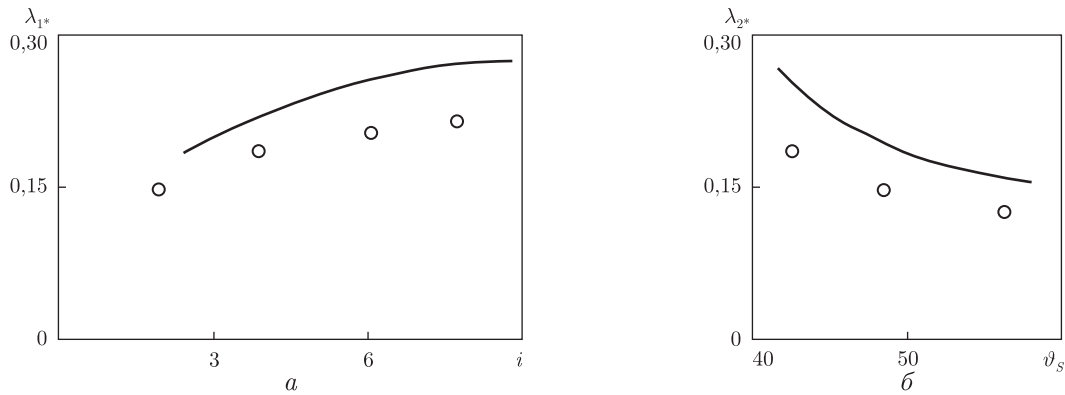


Рис. 2

В испытаниях применялась скоростная киносъемка, которая дает возможность проследить процесс волнообразования. Экспериментальные данные качественно подтверждают результаты расчета. Расхождение можно объяснить чувствительностью моделей оболочек к несовершенствам при изготовлении, неоднородностью материала и погрешностями эксперимента при локальном нагружении.

Уточнение алгоритма расчета путем применения проекционно-итерационной модификации МВЛ привело при вычислении критических усилий к уменьшению расчетного времени в 4–5 раз. Это было отмечено и в [12].

5. Проекционно-итерационная схема численной реализации МЛВ особенно эффективна для задач, в которых целесообразно введение сетки с переменным шагом. В механике деформируемого твердого тела — это задачи, в которых имеет место локальная концентрация напряжений. Важными для многих отраслей техники являются задачи устойчивости оболочек при локальном нагружении. Особенности таких задач показаны на примере устойчивости сферических оболочек при локальном краевом нагружении штампами. Форма волнообразования оболочки при этом имеет локальный характер и зависит от параметров конструкции и штампов. Задача сводится к минимизации функционала, зависящего от усилий докритического состояния и перемещений оболочки, который заменяется суммой по шагам сетки, автоматически сгущающейся в зоне концентрации напряжений.

Проекционно-итерационные модификации метода локальных вариаций позволяют значительно (для рассмотренных задач в 4–5 раз) уменьшить время компьютерных расчетов. Полученные численные значения критических усилий и конфигурация форм волнообразования подтверждаются результатами экспериментов.

## Цитированная литература

1. Черноуцько Ф. Л. Метод локальных вариаций для численного решения вариационных задач // Журн. вычислит. матем. и матем. физ. — 1965. — 5, № 4. — С. 749–754.
2. Черноуцько Ф. Л., Баничук Н. В. Вариационные задачи механики и управления. — Москва: Наука, 1973. — 238 с.
3. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др. Приближенное решение операторных уравнений. — Москва: Наука, 1969. — 455 с.
4. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. — Москва: Наука, 1978. — 592 с.
5. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. — Москва: Наука, 1981. — 416 с.

6. Kluge R. Ein Projektions-iterationsverfahren bei Fixpunktproblemen und Gleichungen mit monotonen Operatoren // Monatsber. Detsch. Akad. Wiss. Berlin, 1969. – **11**, No 8–9. – S. 599–609.
7. Гарт Э. Л., Борисовская И. В. Исследование вычислительной эффективности проекционно-итерационных вариантов методов конечных элементов и конечных разностей // Вестн. Днепропетр. ун-та. Сер. Механика. – 2004. – **2**, вып. 8. – С. 44–51.
8. Hart E. L. Projection-iterative version of the pointwise relaxation method // J. Math. Sci. – 2010. – **167**, No 1. – P. 76–88.
9. Hudramovich V. S., Hart E. L., Rjabokon' S. A. Plastic deformation of nonhomogeneous plates // J. Math. Eng. – 2013. – **78**, No 1. – P. 181–197.
10. Hart E. L., Hudramovich V. S. Projection-iterative schemes for realization of the finite element method in problems of deformation of plates with holes and inclusions // J. Math. Sci. – 2014. – **203**, No 1. – P. 55–69.
11. Мухамедиев Ш. А., Никитин Л. В., Юнга С. Л. Применение модифицированного метода локальных вариаций в задачах нелинейной механики разрушения // Изв. АН СССР. МТТ. – 1976. – № 1. – С. 76–83.
12. Гарт Е., Гудрамович В. Проекційно-ітераційні модифікації методу локальних варіацій та аспекти їх застосування в задачах локальної стійкості оболонок // Сучасні пробл. механіки та математики. Матеріали Міжнарод. науч. конф. – Львів: ИППММ НАН України, 2008. – Т. 3. – С. 18–20.
13. Моссаковский В. И., Гудрамович В. С., Макеев Е. М. Контактные задачи теории оболочек и стержней. – Москва: Машиностроение, 1978. – 248 с.
14. Hudramovich V. S. Contact mechanics of shell structures under local loading // Int. Appl. Mech. 2009. – **45**, No 7. – P. 708–729.
15. Муштари Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. – Казань: Таткнигоиздат, 1957. – 432 с.

## References

1. Chernous'ko F. L. J. vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki, 1965, **5**, No 4: 749–754 (in Russian).
2. Chernous'ko F. L., Banichuk N. V. Variational Problems of Mechanics and Control, Moscow: Nauka, 1973 (in Russian).
3. Krasnosel'skii M. A., Vainikko G. M., Zabreiko P. P. et al. Approximate Solution of the Operator Equations, Moscow: Nauka, 1969 (in Russian).
4. Samarskii A. A., Nikolaev E. S. Methods for Solving Finite-Difference Equations, Moscow: Nauka, 1978 (in Russian).
5. Marchuk G. I., Agoshkov V. I. Introduction to Projection-Grid Methods, Moscow: Nauka, 1981 (in Russian).
6. Kluge R. Monatsber. Detsch. Akad. Wiss. Berlin, 1969, **11**, No 8–9: 599–609.
7. Hart E. L., Borisovskaja I. V. Vestnik Dnepropetrovskogo universiteta, Ser. Mechanika, 2004, Is. 8, **2**: 44–51 (in Russian).
8. Hart E. L. J. Math. Sci., 2010, **167**, No 1: 76–88.
9. Hudramovich V. S., Hart E. L., Rjabokon' S. A. J. Math. Eng., 2013, **78**, No 1: 181–197.
10. Hart E. L., Hudramovich V. S. J. Math. Sci., 2014, **203**, No 1: 55–69.
11. Mukhamediev Sh. A., Nikitin L. V., Junga S. L. Izvestiya AN SSSR. MTT, 1976, No 1: 76–83 (in Russian).
12. Hart E. L., Hudramovich V. S. Modern problems of mechanics and mathematics. Materialy mezhdunarodnoy науч. konf. Lvov: IPPMM NANU, 2008, **3**: 18–20 (in Ukrainian).
13. Mossakowskii V. I., Hudramovich V. S., Makeev E. M. Contact Problems in the Theory of Shells and Rods, Moscow: Mashinostrojenie, 1978 (in Russian).
14. Hudramovich V. S. Int. Appl. Mech. 2009, **45**, No 7: 708–729.
15. Mushtari Ch. M., Galimov K. Z. Nonlinear Theory of Elastic Shells, Kazan': Tatknigoizdat, 1957 (in Russian).

*Институт технической механики НАН Украины  
и ГКА Украины, Днепропетровск  
Днепропетровский национальный университет  
им. Олесь Гончара*

*Поступило в редакцию 24.03.2015*

Член-кореспондент НАН України В. С. Гудрамович, Е. Л. Гарт

## **Проекційно-ітераційна модифікація методу локальних варіацій для задач локальної стійкості сферичних оболонок**

Інститут технічної механіки НАН України і ГКА України, Дніпропетровськ  
Дніпропетровський національний університет ім. Олеса Гончара

*Запропоновано та теоретично обґрунтовано проекційно-ітераційну схему реалізації методу локальних варіацій для розв'язання варіаційних задач з квадратичним функціоналом. На прикладі розв'язання задачі про локальну стійкість сферичної оболонки показана практична ефективність запропонованої модифікації методу локальних варіацій.*

**Ключові слова:** локальна стійкість, сферична оболонка, метод локальних варіацій, проекційно-ітераційна схема реалізації.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **V. S. Hudramovich, E. L. Hart**

## **Projection-iterative version of the method of local variations for the problems of local stability of spherical shells**

Institute of Technical Mechanics of the NAS of Ukraine, Dnipropetrovsk  
Oles Honchar Dnipropetrovsk National University

*A projection-iterative scheme of a realization of the method of local variations for solving the variational problems with quadratic functional is proposed and theoretically grounded. By the example of solving the problem of local stability of a spherical shell, the practical efficiency of the proposed modification of the method of local variations is demonstrated.*

**Keywords:** local stability, spherical shell, method of local variations, projection-iterative scheme of implementation.