

ДИАГНОСТИКА ПОВРЕЖДЕНИЯ СВОБОДНО КОЛЕБЛЮЩИХСЯ ПОЛОГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

А. Б. РОЙТМАН, Д. И. АНПИЛОГОВ

В последнее время опубликовано значительное количество работ [1–6], посвященных исследованию качества вибрационных индикаторов повреждения (ВИП) стержневых элементов механических конструкций и сравнению эффективности этих индикаторов. При этом рассматриваются различные параметры как свободных, так и вынужденных колебаний: постоянная составляющая и амплитуды гармоник, коэффициент гармонических искажений [1], начальные фазы гармоник, амплитуды суб- и супергармонических колебаний [2] и др. Ведущей идеей этих работ является представление о стержне как о колебательной системе с одной степенью свободы: в статье [3] показано, что возникновением сопутствующих раскрытию трещины высших пространственных форм колебаний можно пренебречь. Поэтому описание движения такого стержня, являющегося системой с распределенными параметрами, эквивалентно описанию движения материальной точки под действием восстанавливающей силы.

Обычно характеристику восстанавливающей силы (ХВС) моделируют кусочно-линейной функцией смещения колеблющейся точки из положения равновесия. Эту модель обосновывают так называемым «дыханием» трещины, которое заключается в ослаблении жесткости стержня при ее раскрытии. При этом используют следующий прием [4]. Считают, что в течение полуцикла колебаний, когда трещина открывается (открытый полуцикл), происходит перераспределение потенциальной энергии упругой деформации по объему стержня. Для нового распределения энергии характерно формирование разгрузочной области — части объема материала, содержащей трещину и лишенной напряжений. Учет такой области эквивалентен выборке соответствующего объема материала, то есть ослаблению жесткости при наступлении открытого полуцикла. В момент начала полуцикла колебаний, когда трещина закрывается (закрытый полуцикл), жесткость восстанавливает свое первоначальное значение: упругие свойства стержня с закрытой трещиной не отличаются от упругих свойств стержня без трещины. Период свободных колебаний такой системы определяют как сумму полупериодов колебаний двух линейных систем [5]. С учетом модели кусочно-линейной ХВС [6] на основе асимптотического метода нелинейной механики исследованы вынужденные колебания стержня с дышащей трещиной, расположенной на его боковой поверхности. Очевидно, кусочно-линейная модель ХВС, предполагая постоянство размеров разгрузочной области, подразумевает мгновенное «переключение» жесткости стержня в моменты смены полуциклов. Поэтому одним из направлений дальнейшего

развития идеи «дышащей» трещины может являться представление о плавном «переключении» жесткости. При этом размеры разгрузочной области должны колебаться: естественно полагать, что при движении на открытом полуцикле в сторону открытия трещины размеры этой области растут. Таким образом, «дышать» должна не трещина, а порождаемая ею разгрузочная область. Этот подход позволяет рассматривать иную модель ХВС.

Другое направление связано с переходом от стержней к конструкциям с более сложной геометрией. В частности, представляет интерес диагностирование повреждения пологих цилиндрических оболочек. Целью настоящей работы является диагностирование повреждения типа дышащей трещины в полой цилиндрической оболочке на основании исследования параметров ее свободных колебаний как в рамках кусочно-линейной, так и с позиций кусочно-нелинейной модели характеристики восстанавливающей силы.

1. Изгибные колебания полой цилиндрической оболочки без трещины. Рассмотрим изгибные колебания полой цилиндрической оболочки без повреждений с геометрическими параметрами, указанными на рис. 1. Вычислим частоту собственных колебаний методом Рэлея. Пусть оболочка зашпелена вдоль контурных меридианов (координатных линий $s = 0$ и $s = s_1$) и свободно вдоль контурных дуг (координатных линий $x = 0$ и $x = 1$). Компоненты смещения точки (x, s) срединной поверхности из положения равновесия вдоль направляющей,

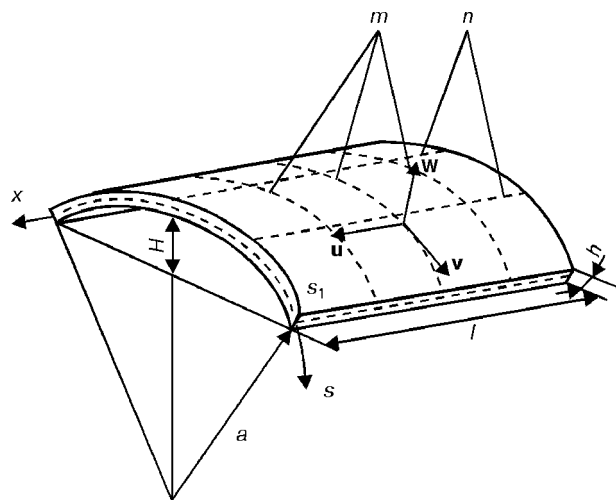


Рис. 1. Геометрические параметры полой цилиндрической оболочки: a — радиус оболочки; l — длина меридиана (образующей); s_1 — длина дуги (направляющей); H — высота подъема; h — толщина оболочки; (x, s) — криволинейная система координат; m — количество узловых дуг; n — количество узловых меридианов.

касательной к образующей и нормали соответственно в случае изгибных колебаний ищем в виде [7]

$$\begin{cases} u_1 = 0, \\ v_1 = 0, \\ w_1 = AX(x)Y(s)\phi_1(t), \end{cases} \quad (1)$$

где A — некоторая константа, зависящая от начальных условий; $\phi_1(t)$ — временной сомножитель компонент смещения; X, Y — балочные функции, соответствующие граничным условиям

$$\begin{aligned} X''(0) = X'''(0) = X''(1) = X'''(1) = 0, \\ Y(0) = Y'(0) = Y(s_1) = Y'(s_1) = 0. \end{aligned}$$

С использованием этих условий для простейшей формы колебаний имеем

$$X \equiv 1, \quad Y = \operatorname{ch} \frac{ks}{s_1} - \cos \frac{ks}{s_1} - \sigma \left(\operatorname{sh} \frac{ks}{s_1} - \sin \frac{ks}{s_1} \right).$$

Здесь $\sigma = (\operatorname{ch}k - \cos k) / (\operatorname{sh}k - \sin k)$, где k — наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{ch}k \cdot \cos k = 1$.

Вычислим потенциальную энергию упругой деформации оболочки. Она равна [7, 8]

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \iint_{(\Omega)} dx ds \int_{-h/2}^{h/2} [\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + 2\mu\epsilon_1\epsilon_2 + (1-\mu)\gamma^2/2 + \\ + z^2\{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\mu\kappa_1\kappa_2 + 2(1-\mu)\tau^2\}] dz. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь E — модуль упругости; μ — коэффициент Пуассона материала оболочки; Ω — область $x \in [0; 1], s \in [0; s_1]$. Параметры деформации срединной поверхности вычисляются следующим образом. Осевые деформации вдоль направлений x, s равны $\epsilon_1 = \partial u / \partial x, \epsilon_2 = \partial v / \partial s - w / a$, а сдвиг в срединной поверхности $\gamma = \partial v / \partial x + \partial u / \partial s$. Параметры кривизны вдоль направлений x, s равны $\kappa_1 = -\partial^2 w / \partial x^2, \kappa_2 = (\partial v / \partial s) / a - \partial^2 w / \partial s^2$.

Параметр кручения срединной поверхности

$$\tau = (\partial v / \partial x) / a - \partial^2 w / (\partial x \partial s).$$

При рассмотрении колебаний вида, описываемого соотношениями (1), четыре из шести параметров деформации, определяющих потенциальную энергию оболочки, оказываются равными нулю: $\epsilon_1 = 0, \gamma = 0, \kappa_1 = 0, \tau = 0$. Поэтому формула (2) для потенциальной энергии упругой деформации оболочки значительно упрощается и принимает следующий вид:

$$\Pi = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \iint_{(\Omega)} dx ds \int_{-h/2}^{h/2} (\epsilon_2^2 + z^2 \kappa_2^2) dz. \quad (3)$$

Полагая $w = w_1$, с учетом выражения (1) получаем

$$\Pi = \frac{ELA^2}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{hs_1}{a^2} + \frac{h^3}{12} \frac{k^4}{s_1^3} \right) \phi_1^2(t). \quad (4)$$

Кинетическая энергия колебаний оболочки [7, 8]

$$T = \frac{\rho h}{2} \int_0^1 \int_0^{s_1} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} dx ds,$$

где ρ — плотность материала. Используя выражения (1), приходим к такому результату:

$$T_1 = 0,5\rho h s_1 A^2 \dot{\phi}_1^2. \quad (5)$$

Точкой здесь и далее обозначено дифференцирование по времени. В связи с отсутствием потерь энергии свободные колебания оболочки описываются уравнением

$$\dot{T}_1 + \dot{\Pi}_1 = 0. \quad (6)$$

При подстановке выражений (4) и (5) в уравнение (6) имеем

$$\ddot{\phi}_1 + \frac{E}{\rho(1-\mu^2)} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{h^2}{12} \frac{k^4}{s_1^3} \right) \phi_1 = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7) совпадает с уравнением

$$\ddot{\phi}_1 + K_1 \phi_1 = 0 \quad (8)$$

свободных колебаний материальной точки единичной массы, закрепленной на пружине жесткостью K_1 , поэтому оболочке без трещины при рассматриваемой форме колебаний следует приписать жесткость

$$K_1 = \frac{E}{\rho(1-\mu^2)} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{h^2}{12} \frac{k^4}{s_1^3} \right). \quad (9)$$

Из уравнения (7) видно, что малые свободные колебания оболочки без повреждений являются гармоническими и происходят с частотой $\omega_1 = \sqrt{K_1}$.

2. Изгибные колебания пологой цилиндрической оболочки с поверхностью, покрытой густой сетью трещин. Пусть теперь оболочка имеет рассеянное повреждение в виде сети трещин, покрывающих ее поверхность. Таким повреждениям, носящим коррозионно-эрозионный характер и достигающим до 80 % всей площади поверхности, могут быть подвергнуты лопатки авиационных газотурбинных двигателей, работающих в условиях химически активных сред [9]. Густоту сети трещин будем считать настолько высокой, что происходит перекрытие разгрузочных областей соседних трещин. Пусть средняя глубина этих трещин равна h_1 . Тогда можно считать, что поверхностный слой толщиной h_1 , продолжая вносить вклад в массово инерционные свойства оболочки на обоих полуциклах, вносит вклад в ее упругие свойства только на закрытом полуцикле. Жесткость оболочки для открытого полуцикла следует вычислять в соответствии с выражением (9), подставляя вместо толщины h остаточную толщину $h^* = h - h_1$. Считая оболочку пологой, а ее радиус — достаточно большим, пренебрежем слагаемым $1/a^2$. Тогда жесткости соответственно на закрытом и открытом полуциклах равны

$$K_1 = \frac{E}{\rho(1-\mu^2)} \frac{h^2}{12} \frac{k^4}{s_1^3}, \quad K_2 = \frac{E}{\rho(1-\mu^2)} \frac{h^2(1-\alpha)^2}{12} \frac{k^4}{s_1^3},$$

где $\alpha = h_1/h$ — относительная глубина сети трещин. Если соотношение (8) трактовать как второй закон Ньютона, то выражения $K_1\phi$ и $K_2\phi$ будут силами упругости, соответствующими закону Гука.

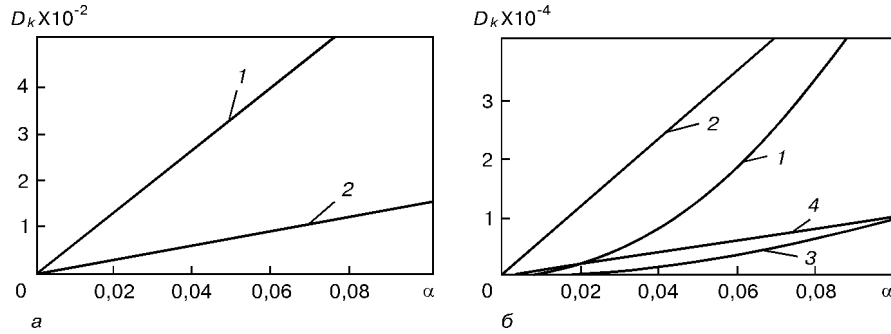


Рис. 2. Зависимость амплитуд гармоник от относительной глубины трещины: а — постоянная составляющая и амплитуда второй гармоники (1 — k = 0; 2 — k = 2); б — амплитуды высших гармоник (1 — k = 3; 2 — 4; 3 — 5; 4 — 6).

Таким образом, восстанавливающая сила оказывается кусочно-линейной функцией координаты φ , поэтому колебания для каждого полупериода являются гармоническими и происходят с частотами $\omega_1 = \sqrt{K_1}$, $\omega_2 = \sqrt{K_2}$. При этом

$$\omega_2/\omega_1 = 1 - \alpha. \quad (10)$$

Закон движения произвольной точки срединной поверхности оболочки имеет вид

$$\varphi(t) = \begin{cases} \sin \omega_1 t, & 0 \leq t \leq \pi/\omega_1, \\ -\beta \sin \omega_2(t - \pi/\omega_1), & \pi/\omega_1 < t \leq 2\pi/\omega. \end{cases} \quad (11)$$

Здесь β — отношение амплитуд открытого и закрытого полупериодов; ω — усредненная частота колебаний, равная

$$\omega = \frac{2\pi}{\pi/\omega_1 + \pi/\omega_2} = \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}. \quad (12)$$

Выбор фазового сдвига на открытом полупериоде обеспечивает непрерывность функции (11) в точке $t_0 = \pi/\omega_0$ и противофазность открытого и закрытого полупериодов. Легко показать, что при выполнении условия $\beta = \omega_1/\omega_2$ функция (11) оказывается гладкой. Кроме того, при выполнении указанного условия оказываются равными максимальные значения потенциальных энергий, достигаемые на различных полупериодах. Имеем $\beta = (1 - \alpha)^{-1}$. С учетом выражения (10) соотношение (12) запишем в виде

$$\omega/\omega_1 = 2(1 - \alpha)/(2 - \alpha).$$

Тогда функция (11) принимает вид:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \sin \omega_1 t, & 0 \leq t \leq \pi/\omega_1, \\ \beta \sin[(1 - \alpha)\omega_1 t + \alpha\pi], & \pi/\omega_1 < t \leq 2\pi/\omega. \end{cases} \quad (13)$$

Рассмотрим разложение функции (13) в ряд Фурье на интервале $t \in [0, 2\pi/\omega]$:

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t).$$

Вычисление коэффициентов этого ряда с использованием выражений (13) приводит к результатам:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \frac{\omega}{\omega_1} M_k (1 + \cos k\pi \frac{\omega}{\omega_1}), \quad (14)$$

$$b_k = 0, \quad 1, 2, \dots, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \frac{\omega}{\omega_1} M_k \sin k\pi \frac{\omega}{\omega_1}, \quad k \in N,$$

$$M_k = \frac{1}{1 - k^2(\omega/\omega_1)^2} - \frac{\beta\omega_2/\omega_1}{(\omega_2/\omega_1)^2 - k^2(\omega/\omega_1)^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

Учитывая отношения частот ω_1 , ω_2 , ω , заключаем, что коэффициенты уравнения (14), а также произвольные их комбинации являются частотно независимыми функциями параметра α и поэтому могут быть приняты в качестве ВИП.

Рассмотрим в качестве одного из таких индикаторов отношение D_k амплитуды $d_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ k-й гармоники функции (13) к амплитуде $d_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ его первой гармоники: $D_k = d_k/d_1$.

Имеем

$$d_k = \frac{2}{\pi} \frac{\omega}{\omega_1} \left| M_k \cos \frac{k\pi}{2} \frac{\omega}{\omega_1} \right|, \quad k \in N;$$

$$D_k = \left| \frac{M_k \cos \frac{k\pi(1 - \alpha)}{2 - \alpha}}{M_1 \cos \frac{\pi(1 - \alpha)}{2 - \alpha}} \right|, \quad k \ll N.$$

Аналогично для постоянной составляющей (нулевой гармоники) получаем

$$D_0 = \left| \frac{a_0/2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \right| = \left| \frac{M_0}{2M_1 \cos \frac{\pi(1 - \alpha)}{2 - \alpha}} \right|.$$

Графики зависимостей $D_k(\alpha)$ представлены на рис. 2 а, б, из которых видно, что амплитуды нечетных гармоник являются низкочувствительными ВИП.

Роль ВИП может играть также начальная фаза первой гармоники функции (13). Представим первую гармонику $\varphi_1(t) = a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t$ функции (13) в виде $\varphi_1(t) = d_1 \sin(\omega t + \psi)$.

Здесь $\psi = \arctg a_1/b_1$. Имеем

$$\psi = \text{artg} [(1 + \cos \pi\omega/\omega_1)/(\sin \pi\omega/\omega_1)].$$

Используя отношение частот, находим

$$\psi = 0,5\alpha\pi/(2 - \alpha).$$

3. Чувствительности индикаторов повреждения. Для сравнения рассматриваемых ВИП сравним их чувствительности к возникновению повреж-

дения. В основу описания качества индикатора положим характер его поведения в окрестности точки $\alpha_0 = 0$. Определим понятие чувствительности $S(X)$ индикатора X соотношением

$$S(X) = \left. \frac{\partial X}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}$$

Чувствительности индикаторов удобно находить, пользуясь их разложениями в ряд Маклорена по параметру α . Для амплитудных ВИП имеем

$$D_0(\alpha) = \frac{2}{\pi} \alpha + \dots, \quad D_2(\alpha) = \frac{4}{9\pi} \alpha + \dots, \\ D_k(\alpha) = 0, \quad K = 2n + 1, \quad n \in N.$$

Соответственно

$$S(D_0) = \frac{2}{\pi}, \quad S(D_2) = \frac{4}{9\pi}, \\ S(D_k) = 0, \quad k = 2n + 1, \quad n \in N.$$

Для фазового ВИП

$$\psi(\alpha) = (\pi/4)(\alpha + \dots), \quad S(\psi) = \pi/4.$$

Таким образом, критерии D_0, D_2, ψ следует рассматривать как высокочувствительные, а критерии $D_{2n+1}, n \in N$, — как низкоэффективные. Легко видеть, что критерий постоянной составляющей функции (13) обладает значительно большей чувствительностью, чем критерий амплитуды второй гармоники. Критерий ψ нетрудно свести к временному запаздыванию функции (13) по отношению к своей первой гармонике. Соответствующий временной сдвиг обратно пропорционален частоте и, следовательно, предпочтителен при исследовании степени поврежденности крупногабаритных конструкций, для которых характерны малые частоты собственных колебаний.

4. Изгибные колебания пологой цилиндрической оболочки с одной трещиной. Пусть на наружной поверхности оболочки имеется одна продольная трещина глубиной h_1 , расположенная вдоль координатной линии $s = s_0$. Разобьем оболочку на малые элементы семейством плоскостей $x = \text{const}$. При рассматриваемой форме колебаний смещение w не зависит от значения x . Для каждого из элементов колебания происходят в плоскостях $x = \text{const}$, причем с одинаковыми распределениями амплитуды по координате s . Поэтому достаточно описать движение одного элемента, ограниченного плоскостями $x = x_0$ и $x = x_0 + dx$. Всю оболочку можно представить как набор независимо и синхронно колеблющихся элементов. Полуширину разгрузочной области обозначим через d (рис. 3). Поскольку оболочка является пологой, примем, что полуширина разгрузочной области в одном ее элементе при раскрытии трещины равняется полуширине разгрузочной области в стержне. Значения полуширины разгрузочной области в стержне оценены теоретически с использованием коэффициента интенсивности напряжений [3], а также на основании экспериментальных данных [10]. Эти оценки несколько отличаются друг от друга, но приводят к близким значениям величины d .

Вычислим жесткость оболочки на открытом полуцикле. По аналогии с выражениями (1), рассматривая ту же форму колебаний, определим для открытого полуцикла смещение точек срединной поверхности оболочки соотношением

$$w_2 = BY(s)\varphi_2(t). \tag{16}$$

Здесь амплитуда B играет ту же роль для открытого полуцикла, что и амплитуда A в выражении (1) для закрытого. Используя соотношение (3) аналогично (4), получаем

$$P_2 = \frac{ElB^2}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{hs_1}{a^2} + \frac{h^3}{12} \frac{k^4}{s_1^3} \right) \varphi_2^2(t) - \Delta\Pi. \tag{17}$$

Здесь $\Delta\Pi$ — энергия, которая была бы локализована в разгрузочной области при отсутствии разгрузки. С учетом размеров $2d \times 1 \times h_1$ и расположения $s = s_0 \pm d$ разгрузочной области на основании выражения (3) при соответствующем изменении пределов интегрирования имеем

$$\Delta\Pi = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \iint_{\Delta\Omega} dx ds \int_{h/2-h}^{h/2} (\epsilon_2^2 + z^2 \kappa_2^2) dz, \tag{18}$$

где $\Delta\Omega$ — проекция разгрузочной области на срединную поверхность, ограниченная координатными линиями $x = 0, x = 1, s = s_0 - d, s = s_0 + d$. Используя соотношение (16) при вычислении параметров деформации ϵ_2 и κ_2 , подставим их в выражение (18), а полученное значение $\Delta\Pi$ — в формулу (17). Получаем потенциальную энергию упругой деформации оболочки с трещиной

$$P_2 = \frac{ElB^2}{2(1-\mu^2)} \left\{ \frac{h(s_1 - \alpha J_1)}{a^2} + \frac{h^3}{12} \left[\frac{k^4}{s_1^3} - \alpha(3 - 6\alpha + 4\alpha^2)J_2 \right] \right\} \varphi_2^2(t),$$

где

$$J_1 = \int_{s_0-d}^{s_0+d} Y^2 ds, \quad J_2 = \int_{s_0-d}^{s_0+d} (Y'')^2 ds.$$

Здесь штрихи обозначают дифференцирование по s . Эти интегралы удобно вычислить с помощью замены $y = ks/s$:

$$\frac{J_1}{s_1} = \frac{1}{k} \int_{y_1}^{y_2} [\text{ch } y - \cos y - \sigma(\text{sh } y - \sin y)]^2 dy, \\ s_1^3 J_2 = k^3 \int_{y_1}^{y_2} [\text{ch } y + \cos y - \sigma(\text{sh } y + \sin y)]^2 dy,$$

где $y_{1,2} = ks_0/s_1 \pm kd/s_1$. Соответствующие первообразные равны

$$[\text{ch } y \pm \cos y - \sigma(\text{sh } y \pm \sin y)]^2 dy = \\ = 1/4 \{ (1 + \sigma^2) \text{sh } 2y + (1 - \sigma^2) \sin 2y - 2\sigma(-\text{ch } 2y - \cos 2y) \} \pm \\ \pm (1 + \sigma^2) \sin \text{ch } y \cdot \text{ch } y \pm (1 - \sigma^2) \cos y \cdot \text{sh } y \pm 2\sigma \sin y \cdot \text{sh } y.$$

Кинетическая энергия на открытом полуцикле определяется аналогично выражению (5):

$$T_2 = 0,5phls_1 B^2 \dot{\varphi}_2^2.$$

Составляя уравнение движения, аналогичное уравнению (7), находим жесткость оболочки на открытом полуцикле:

$$K_2 = \frac{E}{\rho(1-\mu^2)} \left\{ \frac{1}{a^2} (1 - \alpha \frac{J_1}{s_1}) + \frac{h^2}{12} \left[\frac{k^4}{s_1^4} - \alpha(3 - 6\alpha^2 + 4\alpha^2) \frac{J_2}{s_1} \right] \right\} \quad (19)$$

Используя формулы (9) и (19), вычислим относительное уменьшение жесткости при раскрытии трещины, в виде

$$\frac{K_1 - K_2}{K_1} = \alpha \frac{\delta^2 \left(\frac{J_1}{s_1} \right) + \frac{q^2}{12} (3 - 6\alpha + 4\alpha^2) s_1^3 J_2}{\delta^2 + \frac{q^2}{12} k^4} \quad (20)$$

Здесь $\delta = s_1/a$ — угол, под которым видна дуга оболочки из ее оси, $q = h/s_1$ — относительная толщина оболочки. Если оболочка достаточно пологая, то уравнение (20) легко преобразовать к виду

$$\frac{K_1 - K_2}{K_1} = \alpha \frac{(3 - 6\alpha + 4\alpha^2) s_1^3 J_2}{k^4}$$

Отсюда имеем

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{K_2}{K_1}} = \left[1 - \alpha \frac{(3 - 6\alpha + 4\alpha^2) s_1^3 J_2}{k^4} \right]^{1/2} \approx 1 - \alpha \frac{3s_1^3 J_2}{2k^4}$$

Сопоставляя это соотношение с выражением (10), устанавливаем, что принципиальных различий между случаем поврежденной поверхности и случаем одиночной продольной трещины не имеется. Количественное отличие состоит в том, что при диагностировании одиночной продольной трещины вместо ее относительной глубины α следует использовать величину

$$\alpha' = \alpha \frac{3s_1^3 J_2}{2k^4}$$

При этом соотношения для чувствительностей ВИП, полученные в п. 3, будучи независимыми от глубины трещины, сохраняют свои значения.

5. Изгибные колебания пологой цилиндрической оболочки с одной трещиной. Случай переменных размеров разгрузочной области. Рассмотрим задачу, сформулированную в п. 4. Ограничимся схематическим расчетом, сохраняя только малые порядка α . Кроме того, оболочку будем считать настолько пологой, что энергией растяжения срединной поверхности по сравнению с энергией изгиба можно пренебречь. Зададим функцию прогиба в виде

$$w = Y(s)\Phi(t).$$

Основываясь на этом, вычислим потенциальную энергию оболочки. При использовании выражений (3) и (18) исключим слагаемое ϵ_2^2 . Имеем

$$\Pi = \frac{El\Phi^2}{2(1-\mu^2)} \frac{h^3}{12} \frac{k^4}{s_1^3} - \Delta\Pi,$$

где

$$\Delta\Pi = \frac{El\Phi^2}{2(1-\mu^2)} \frac{h^3}{12} \alpha(3 - 6\alpha + 4\alpha^2) \int_{s_0-d}^{s_0+d} (Y'')^2 ds \quad (21)$$

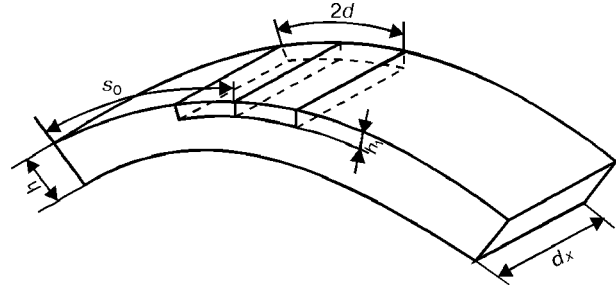


Рис. 3. Разгрузочная область в малом элементе оболочки.

Будем считать, что в случае неглубоких трещин мгновенное значение размера разгрузочной области, формируемой вокруг трещины, пропорционально смещению w_0 точки срединной поверхности с координатой $s = s_0$ в момент времени t :

$$d = Hw_0 = HY(S_0)\Phi(t).$$

Пусть колебания оболочки являются малыми. Вместе с ними мала и величина d . Учитывая небольшую скорость изменения функции $(Y'')^2$, положим

$$\int_{s_0-d}^{s_0+d} (Y'')^2 ds \approx (Y''(s_0))^2 2d = H_1 \Phi,$$

где $H_1 = 2HY(s_0)(Y''(s_0))^2$. Пренебрегая слагаемым $(-6\alpha + 4\alpha^2)$ в формуле (21), для потенциальной энергии получаем

$$\Pi = \frac{El}{2(1-\mu^2)} \frac{h^3}{12} \left[\frac{k^4}{s_1^3} \Phi^2 - 3\alpha H_1 \Phi^3 \right]$$

Кинетическая энергия на открытом полуцикле определяется аналогично выражению (5):

$$T = 0,5\rho h l s_1 \dot{\Phi}^2.$$

Составим уравнение движения, аналогичное (6):

$$\ddot{\Phi} + K\Phi - K\gamma\Phi^2 = 0. \quad (22)$$

Здесь

$$K = \frac{E}{\rho(1-\mu^2)} \frac{h^3}{12} \frac{k^4}{s_1^3}, \quad \gamma = \alpha \frac{9H_1 s_1^3}{2k^4}.$$

Уравнение (22) преобразуем к виду

$$\ddot{\Phi} + K^*\Phi = 0,$$

где $K^* = K(1 - \gamma\Phi)$. Полученное уравнение формально совпадает с уравнением (8), однако в этом случае роль жесткости играет переменная величина K^* , линейно уменьшающаяся с ростом смещения. Уравнение (22) применимо только к открытому полуциклу. Для закрытого жесткость сохраняет значение $K = K^*(0)$. Таким образом, характеристику восстанавливающей силы следует считать кусочной линейно-квадратичной функцией смещения. Решение уравнения свободных колебаний упругого тела с жесткостью, линейно изменяющейся на одном из полуциклов и постоянной на другом полуцикле, по-

лучено в [11] численно и аналитически методом последовательных приближений.

Основным результатом этой работы является установление неизохронности рассматриваемых колебаний, то есть зависимости их частоты от амплитуды. Это явление не обнаруживается в системах с кусочно-линейной ХВС, поскольку коэффициенты Фурье-функции (13) оказываются амплитудно независимыми. Таким образом, учет «дыхания» размеров разгрузочной области приводит к качественно новым индикаторам повреждения, основанным на зависимости количественных характеристик колебаний от амплитуд полуциклов. В частности, в работе [11] показано, что скорость роста отношения амплитуд открытого и закрытого полуциклов по мере роста амплитуды открытого полуцикла равна $\gamma/3$. Другой способ определения степени поврежденности состоит в измерении увеличения относительного падения частоты, происходящего по мере роста амплитуды свободных колебаний. Параметр γ , а вместе с ним и степень поврежденности определяют из градуировочной кривой [11]. Эти индикаторы (скорость роста отношения амплитуд и увеличения относительного падения частоты) в принципе не могут быть получены на основании результатов работ [2, 4, 6, 10], поскольку все эти результаты ограничены рамками модели кусочно-линейной ХВС.

ВЫВОДЫ

1. Рассмотрены свободные колебания поврежденной пологой цилиндрической оболочки. В рамках модели кусочно-линейной характеристики восстанавливающей силы исследованы случаи полностью поврежденного поверхностного слоя и одиночной продольной «дышащей» трещины. Установлено качественное совпадение этих случаев.

2. Вычислены чувствительности индикаторов повреждения. Наиболее чувствительны постоянная составляющая, амплитуда второй гармоники и на-

чальная фаза первой гармоники функции смещения.

3. Предложена кусочная линейно-квадратичная модель характеристики восстанавливающей силы, описывающая неизохронность колебаний. Выявлены индикаторы повреждения, основанные на зависимости характеристик свободных колебаний от их амплитуды.

1. *Ройтман А. Б., Пылов А. А., Александрова Н. Б.* Продольные колебания консольного стержня с поперечной трещиной. Сообщение 1. Малые колебания // Пробл. прочности. — 1999. — № 2. — С. 23–34.
2. *Матвеев В. В., Бовсуновский А. П.* Некоторые аспекты колебаний упругого тела с «дышащей» несплошностью материала // Там же. — 2000. — № 5. — С. 44–60.
3. *Матвеев В. В., Бовсуновский А. П.* К определению вибрационных характеристик стержня с закрывающейся трещиной при изгибных колебаниях // Там же. — № 3. — С. 5–23.
4. *Бовсуновский А. П.* К вопросу об определении собственной частоты поперечных и продольных колебаний стержня с трещиной. Сообщение 1. Аналитический подход // Там же. — 1999. — № 2. — С. 35–44.
5. *Вибрации в технике.* Справочник. В 6 т. — Т. 2. Колебания нелинейных механических систем / Под ред. И.И. Блехмана. — М.: Машиностроение, 1979. — 351 с.
6. *Матвеев В. В.* К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщение 1. Продольные колебания, аналитическое решение // Пробл. прочности. — 1997. — № 6. — С. 5–20.
7. *Гонткевич В. С.* Собственные колебания пластинок и оболочек. — Киев: Наук. думка, 1964. — 288 с.
8. *Филип А. П.* Элементы теории оболочек. — Л.: Стройиздат, 1987. — 383 с.
9. *Надежность и ресурс авиационных газотурбинных двигателей* / Под ред. И. А. Биргера. — М.: Машиностроение, 1969. — 539 с.
10. *Бовсуновский А. П.* К вопросу об определении собственной частоты поперечных и продольных колебаний стержня с трещиной. Сообщение 2. Результаты эксперимента и расчета // Пробл. прочности. — 1999. — № 3. — С. 45–53.
11. *Антилогов Д. И.* Свободные колебания упругого тела с линейно изменяющейся жесткостью // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. — 2000. — № 2. — С. 83–87.

Запорож. гос. ун-т,
Запорож. гос. техн. ун-т

Поступила в редакцию
04.04.2001