

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ИНДИКАТОРЫ «ДЫШАЩЕЙ» ТРЕЩИНЫ В КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

А. Б. РОЙТМАН, О. А. ТИТОВА

Продолжительное время целью многочисленных исследований является разработка относительно простых и надежных методов неразрушающей диагностики повреждений ответственных и дорогостоящих элементов конструкций. Работа [1] представляет собой обзор (более ста статей) индикаторов повреждений (диагностических функций), которые можно использовать для диагностики трещин в элементах машиностроительных конструкций с указанием их преимуществ и недостатков. Рассмотрены основные типы индикаторов, основанные на использовании: собственных частот; модальных форм; демпфирования; антирезонансных частот; амплитуд вынужденных колебаний; дополнительных резонансных частот; связанных колебаний; фазовых кривых, а также переходные или супергармонические индикаторы. Каждый из них имеет существенные недостатки. Отмечено, что наиболее простым для измерений с относительно высоким уровнем точности является метод собственных частот.

Индикаторы трещины, расположенной на наружной поверхности замкнутой круговой цилиндрической оболочки (рис. 1), приведены в работах [2–7]. В них рассмотрены индикаторы, использующие собственные частоты и модальные формы колебаний.

Результаты, приведенные в работах [2, 3, 5], верны как для случая, когда трещина расположена на наружной поверхности, так и для случая, когда трещина расположена на внутренней поверхности оболочки.

Целью настоящей работы была разработка аналитического подхода, позволяющего получить инженерные выражения для определения параметров колебаний замкнутой цилиндрической оболочки с круговой наружной «дышащей» трещиной, расположенной посередине, с использованием результатов работ [2–7].

Основные гипотезы. При исследовании поставленной задачи сделаем некоторые допущения, основанные на известных теоретических и экспериментальных результатах.

Сформулируем предположения о размерах возмущенного поля при малых размерах трещин в оболочке (рис. 1).

1. Коэффициент интенсивности напряжений и величина раскрытия трещины в оболочке совпадают с соответствующими значениями для полосы конечной длины с поперечной краевой трещиной при чистом изгибе, полученными теоретически численными методами и приведенными в [8].

2. Параметры поля напряжений замкнутой круговой цилиндрической оболочки вдоль образующей (ось x) соответствуют полю напряжений, возникаю-

щему при растяжении полосы с эллиптическим отверстием вида $x^2/c^2 + y^2/b^2 = 1$ при $b \rightarrow \infty$ (ось y направлена по касательной к срединной поверхности оболочки и перпендикулярна оси x) и полученному экспериментально в работе [9].

3. Параметры поля напряжений по толщине оболочки (ось z), соответствующие случаю чистого изгиба полосы с прямоугольным вырезом, получены экспериментально в [9].

Предполагаем, что при раскрытии трещины в объеме материала, соответствующем зоне ее влияния, упругая энергия деформации исчезает.

Индикаторы трещин, расположенных по всей поверхности оболочки. Положим, что зона влияния трещин распространяется на величину h_1 в глубину оболочки и имеет длину l .

Согласно [10] уравнения свободных осесимметричных изгибных колебаний для круговых цилиндрических оболочек без трещин можно записать в виде

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - k_T^4 w = 0; \quad k_T^4 = \frac{\rho h \omega^2 l^4}{D} - \frac{12(1-\nu^2)l^4}{h^2 a^2}. \quad (1)$$

Здесь $\rho = \gamma/g$, где γ — плотность, кг/м³, g — ускорение земного тяготения, м/с²; ω — круговая частота колебаний, рад/с; D — цилиндрическая жесткость, кг·м; ν — коэффициент Пуассона.

Рассмотрим форму колебаний оболочки, при которой [10]

$$w = A \sin \frac{\pi x}{l} \cos \omega t, \quad (2)$$

где A — амплитуда колебаний, м; t — время колебаний, с.

Предположим, что колебания оболочки начнутся из положения, в котором она находилась под действием наружного давления, а затем нагрузка мгновенно снимается. В этот момент времени слои оболочки, в которых расположена трещина, сжаты. Совершая изгибные колебания, оболочка проходит нейтральное положение, трещина раскрывается. Затем оболочка снова проходит нейтральное поло-

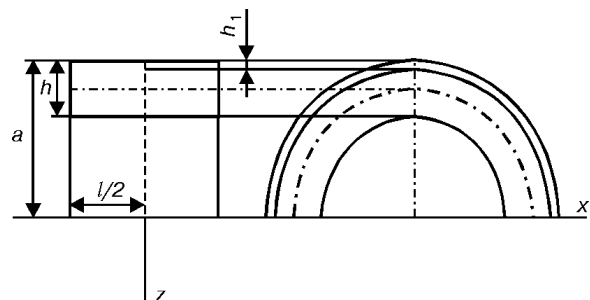


Рис. 1. Схема оболочки с трещиной.

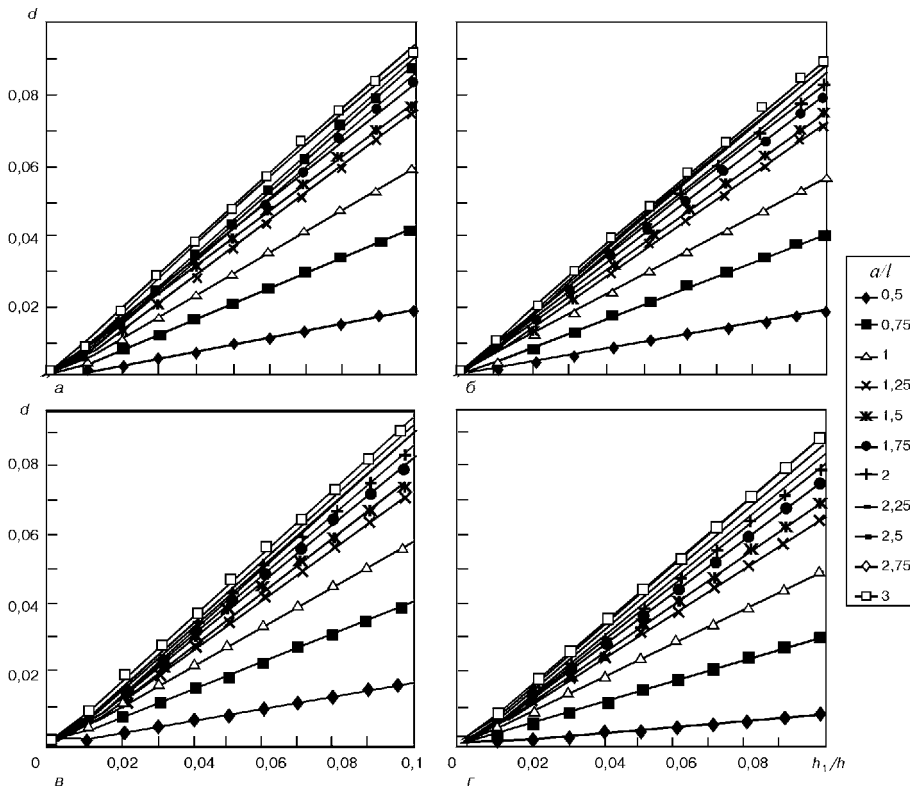


Рис. 2. Зависимости диагностической функции d от h_1/h в случае разных a/l для меди (а), чугуна (б), бетона (в) и стекла (г).

жение, трещина закрывается, и оболочка достигает исходного положения.

В работах [2, 3] использован следующий подход для определения параметров колебаний оболочки. Нахождение частоты колебаний оболочки сводится к решению алгебраического уравнения относительно ∇ :

$$\nabla^3 - K_2 \nabla^2 + K_1 \nabla - K_0 = 0, \quad (3)$$

где $\nabla = 4(1 - \nu^2 \pi^2 f^2 a^2 / g)$; $f = \omega / 2\pi$; E — модуль Юнга, Па;

$$K_0 = \frac{1}{2} (1 - \nu^2)(1 + \nu) \lambda^4 + \frac{(1 - \nu)}{2} b [\lambda^8 + 4(1 - \nu^2) \lambda^4];$$

$$K_1 = \frac{(1 - \nu)}{2} \lambda^4 + \frac{1}{2} (3 - \nu - 2\nu^2) \lambda^2 + b \left[\frac{1}{2} (3 - \nu) \lambda^6 + 2(1 - \nu) \lambda^4 + 2(1 - \nu) \lambda^2 \right]; \quad (4)$$

$$K_2 = 1 + \frac{3 - \nu}{2} \lambda^2 + b [\lambda^4 + 2(1 - \nu) \lambda^2]; \quad \lambda = \frac{\pi a}{l}; \quad b = \frac{h^2}{12a^2}.$$

Наинизший корень уравнения (3) приближенно находится по формуле

$$\nabla \approx \frac{K_0}{K_1} + \left(\frac{K_0}{K_1} \right)^2 \frac{K_2}{K_1}. \quad (5)$$

Предполагалось, что за полный период цикла колебаний проявляются две частоты, соответствующие закрытой (ω_0) и открытой (ω_1) трещинам. Для нахождения этих частот параметры ω и h имеют вид:

$$\omega = \begin{cases} \omega_0, & \text{трещина закрыта,} \\ \omega_1, & \text{трещина открыта,} \end{cases} \quad (6)$$

$$h = \begin{cases} h, & \text{трещина закрыта,} \\ h - h_1, & \text{трещина открыта.} \end{cases}$$

Полный период колебаний можно записать в виде

$$T = \frac{\pi}{\omega_0} + \frac{\pi}{\omega_1} = \frac{\pi (\omega_1 + \omega_0)}{\omega_1 \omega_0}. \quad (7)$$

Колебания проходят с усредненной частотой $\bar{\omega} = 2\pi / T = 2\omega_1 \omega_0 / (\omega_1 + \omega_0)$.

Для различных временных промежутков цикла ω запишем в виде

$$\omega = \begin{cases} A_2 \sin \frac{\pi x}{l} \cos \omega_0 t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2\omega_0} \quad (a), \\ A_1 \sin \frac{\pi x}{l} \cos \omega_1 t, & \frac{\pi}{2\omega_1} \leq t \leq \frac{3\pi}{2\omega_1} \quad (б), \\ A_2 \sin \frac{\pi x}{l} \cos \omega_0 (t - \frac{2\pi}{\omega_1} + \frac{2\pi}{\omega_0}), & \frac{2\pi}{\omega_1} - \frac{\pi}{2\omega_0} \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega_1} \quad (a). \end{cases} \quad (8)$$

Здесь A_1, A_2 — амплитуды колебаний соответственно с a — закрытой трещиной; b — открытой трещиной.

Предположим, что полное открытие (закрытие) трещины при переходе нейтрального положения происходит за малый промежуток времени $\Delta t = \pi / 2\omega_1 - \pi / 2\omega_0$. При небольших трещинах $\omega_1 \approx \omega_0$ и $\Delta t \approx 0$, а процесс описывается выражением (8). Разложим последнее в ряд Фурье, приняв $A_1 = A_2 = A$:

$$w(x, t) = A \sin \frac{\pi x}{l} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\bar{\omega}t + b_k \sin k\bar{\omega}t) \right], \quad (9)$$

где

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T w(x, t) \cos k\bar{\omega}t dt, \quad k \in [0, \infty]; \quad (10)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T w(x, t) \sin k\bar{\omega}t dt, \quad k \in [1, \infty].$$

В данном случае индикатором трещины могут быть значения диагностической функции

$$d = \frac{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \quad (11)$$

Значения коэффициентов a_1, a_2, b_1, b_2 приведены в [2].

Построены графики зависимости диагностической функции d от h_1/h и a/l . В работе [2] приведены результаты для магниевых сплавов и цинка, в [3] — для стали 25 и алюминия, в настоящей работе — для меди, чугуна, бетона и стекла (рис. 2).

Собственные частоты колебаний оболочки с трещиной (см. рис. 1). Имитация возмущенного поля напряжений в случае изгиба цилиндрической оболочки с трещиной приведена на рис. 3.

В статье [11] показано, что при малых значениях трещины оценка параметра Δ , описывающего зону влияния раскрытой поперечной краевой трещины, может быть реализована с незначительным отклонением с помощью любой формулы из работ [8, 12–14]. По мнению авторов, наиболее удобное для инженерной практики соотношение

$$\Delta = 2,5Pl(1 - \nu)h_1/Gh^2b. \quad (12)$$

Для определения частот колебаний оболочки с трещиной и без нее используем следующий энергетический подход. Считаем, что система консервативна, т. е. $K + \Pi = \text{const}$, где K, Π — соответственно кинетическая и потенциальная энергия колебаний оболочки. Совершая колебания, оболочка проходит положения, в одном из которых $K = K_{\text{max}}, \Pi = 0$, а в другом $K = 0, \Pi = \Pi_{\text{max}}$. Исходя из консервативности системы, получаем

$$K_{\text{max}} = \Pi_{\text{max}}. \quad (13)$$

Вычислив K_{max} и Π_{max} по формулам из работы [10], для колебаний оболочки без трещины получим частоту колебаний

$$\omega_0 = \left[\frac{D}{\rho(1 - \nu^2)} \left(\frac{h^2 \pi^4}{12l^4} + \frac{1}{a^2} \right) \right]^{1/2}. \quad (14)$$

Для оболочки с трещиной максимальная кинетическая энергия колебаний оболочки с трещиной имеет вид

$$K = \frac{1}{2} \rho \omega_0^2 \pi A_1^2 h l. \quad (15)$$

Максимальную потенциальную энергию колебаний оболочки для различных имитаций открытия трещины вычислим по формуле [10]

$$\Pi = \frac{E}{2(1 - \nu^2)} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\left(z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{w}{a} \right)^2 + 2\nu z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{w}{a} \right] dz d\beta dx. \quad (16)$$

Здесь δ — параметр, определяющий глубину трещины в зависимости от момента времени и значения x, m ; β — угол поворота, который отсчитывается в плоскости, проходящей через точку оболочки перпендикулярно оси симметрии срединной поверхности оболочки, рад.

Например, для случая, изображенного на рис. 3, а,

$$\delta = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{l - \Delta}{2}; \\ \frac{4}{3}h_1, & \frac{l - \Delta}{2} \leq x \leq \frac{l + \Delta}{2}; \\ 0, & \frac{l + \Delta}{2} \leq x \leq l. \end{cases} \quad (17)$$

Для определения частоты колебаний оболочки с трещиной, т. е. имитации трещины, показанной на рис. 3, а, с помощью формул (15) и (16) получим следующее выражение:

$$\omega_1^2 = \frac{2D}{\rho(1 - \nu^2)hl} \left\{ \left(\frac{\pi^4 h^3}{12l^4} + \frac{h}{a^2} \right) \left(\frac{l - \Delta}{2} - \frac{l}{2\pi} \sin \frac{\pi \Delta}{l} \right) + \left[\frac{\pi^4}{l^4} \frac{(h/2 - h_1)^3 + h^3/8}{3} + \frac{h - h_1}{a^2} - 2\nu \frac{\pi^2}{l^2 a} \frac{(h/2 - h_1)^2 - h^2/4}{2} \right] \right\} \left(\frac{\Delta}{2} + \frac{l}{2\pi} \sin \frac{\pi \Delta}{l} \right), \quad (18)$$

Аналогичны результаты и для других имитаций, которые из-за громоздкости не приводятся.

Графики зависимости отношения ω_0/ω_1 от относительной глубины трещины приведены на рис. 4.

В работе [15] рассмотрен способ нахождения экспериментальных значений функции τ_2/τ_1 при колебаниях элементов конструкций с трещинами, которая совпадает с рассмотренным в данной работе аналитическим индикатором трещин ω_0/ω_1 .

Амплитудные индикаторы трещины (см. рис. 1). В работах [2, 6] предлагалось использовать в качестве признака существования трещины (из-за наличия открытой и закрытой) величину асимметрии цикла колебаний, под которой подразумевалось отношение амплитуд колебаний оболочки с трещиной и без нее.

В работе [2] найдены отношения амплитуд колебаний оболочки с трещиной и без нее для имитации эффекта открытия трещины в виде, изображенном на рис. 3, а, б.

Для отношения амплитуд колебаний оболочки с трещиной и без нее, изображенной на рис. 3, в, г, получены формулы, которые из-за громоздкости не приводятся.

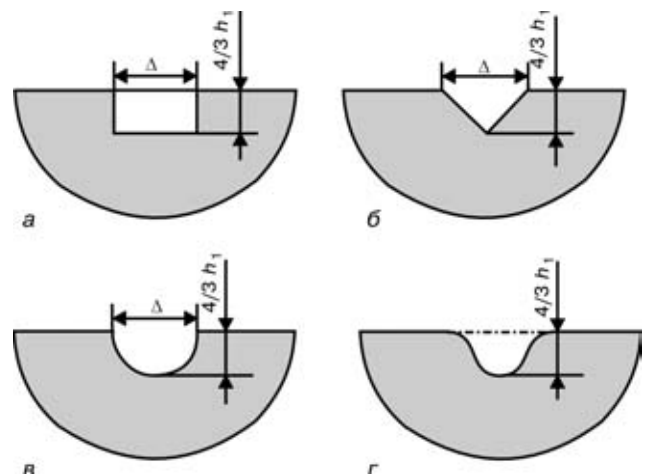


Рис. 3. Имитация зоны влияния трещины: прямоугольником (а), треугольником (б), эллипсом (в) и функцией вида $f(x) = \alpha e^{-x^2/\sigma^2}$ (г).

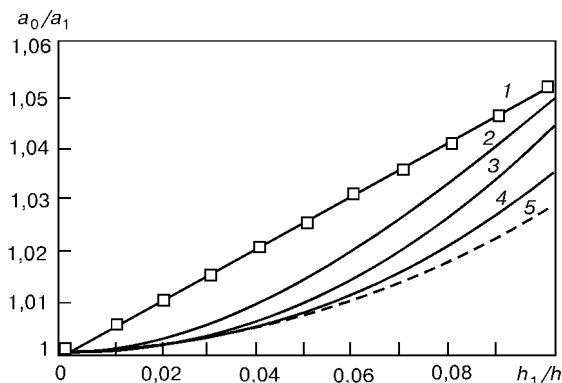


Рис. 4. Зависимость отношения частот колебаний для имитации влияния раскрытой трещины: 1 — по всей длине оболочки; 2-4 — изображенной соответственно на рис. 3, а, в, г, б.

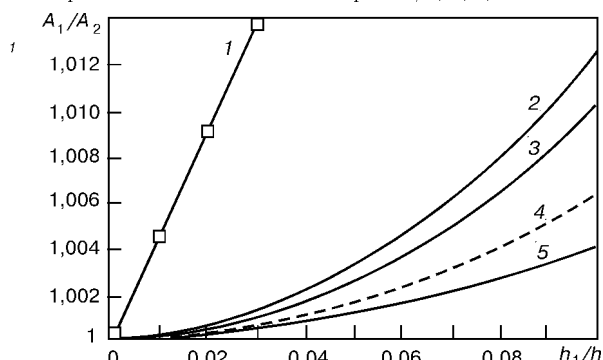


Рис. 5. Отношение амплитуд колебаний оболочки с трещиной и без нее для имитации влияния раскрытой трещины: 1 — по всей длине оболочки; 2-4 — изображенной соответственно на рис. 3, а-г.

На рис. 5 приведены графики зависимости отношения амплитуд от относительной глубины трещины h_1/h . Размер зоны влияния трещины выбирался по уравнению (12).

Из рисунка следует, что выбор типа имитации раскрытия трещины (см. рис. 3) является несущественным при $h_1/h \leq 0,02$. В этом случае следует различать A_1/A_2 с точностью до 1 %, а экспериментатор для диагностики малых трещин может надежно использовать указанный участок рис. 4. Для больших размеров h_1/h следует использовать другие критерии.

1. Krawczuk M., Ostachowicz W. Damage indicators for diagnostic of fatigue cracks in structures by vibration measurements

— a survey // J. of Theoret. and Appl. Mech. — 1996. — 34, № 2. — P. 307-326.

2. Ройтман А. Б., Титова О. А. Амплитудно-частотные характеристики и диагностика цилиндрической оболочки с круговой «дышащей» трещиной // Пробл. обчисл. механіки і міцності конструкцій. — Дніпропетровськ, 1999. — Т. 5. — С. 168-182.

3. Ройтман А. Б., Титова О. А. Колебания цилиндрической оболочки с круговой поперечной трещиной // Механика оболочек и пластин: Сб. докл. XIX Междунар. конф. по теории оболочек и пластин. — Нижний Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 1999. — С. 164-168.

4. Титова О. А. Диагностика трещин в цилиндрической оболочке // II Всеукр. молодіжна наук.-практ. конф. з міжнародною участю «Людина і космос»: 36. тез. — Дніпропетровськ: НЦАОМУ, 2000. — С. 97.

5. Шишканова С. Ф., Титова О. О. Імітація відкриття тріщини при коливаннях циліндричної оболонки з пошкодженнями // Вісник Запорізь. держ. ун-ту: Збірн. наук. статей. Фізико-математичні науки. — 2000. — № 1. — С. 157-159.

6. Roytman A., Shamrovsky A., Titova O. Diagnostics of longitudinal crack in the closed cylinder shell // Proc. of the intern. conf. «Mechanika-2000». — Kaunas: Technologija, 2000. — P. 323-328.

7. Ройтман А. Б., Александрова Н. Б., Христенко Т. А. Вибрационная диагностика «дышащих» трещин в изделиях // Техн. диагностика и неразруш. контроль. — 2000. — № 1. — С. 58-67.

8. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2 т. / Под ред. Ю. Мураками. Пер. с англ. — М.: Мир. — 1990. — Т.2. — С. 453-1016.

9. Саити Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. — Киев: Наук. думка, 1968. — 888 с.

10. Гонткевич В. С. Собственные колебания пластинок и оболочек. Справ. пособие. — Киев: Наук. думка, 1964. — 288 с.

11. Ройтман А. Б., Титова О. А. Обоснование аналитических моделей диагностирования «дышащих» трещин в элементах конструкций // Техн. диагностика и неразруш. контроль. — 2000. — № 3. — С. 27-33.

12. Грабовски Б. Вибрационные свойства ротора турбины с поперечной трещиной // Тр. Амер. О-ва инженеров-механиков. Конструирование и технология машиностроения. — 1980. — 102, №1. — С. 98-104.

13. Матвеев В. В., Бовсуновский А. П. К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщение 2. Изгибные колебания. Аналитическое решение // Пробл. прочности. — 1998. — № 6. — С. 9-22.

14. Бовсуновский А. П. К вопросу об определении собственной частоты поперечных и продольных колебаний стержня с трещиной. Сообщение 1. Аналитический подход // Там же. — 1999. — № 2. — С. 35-44.

15. Ройтман А. Б. Экспериментальная оценка асимметрии цикла поперечных колебаний образцов с поперечными вырезами // Там же. — 2000. — № 3. — С. 120-124.