

# Аппроксимация рельефа и расчет топопоправок в рамках метода линейных интегральных представлений

© И. Э. Степанова, 2011

Институт физики Земли РАН, Москва, Россия

Поступила 7 октября 2010 г.

*Представлено членом редколлегии В. И. Старостенко*

Лінійні задачі гравіметрії і магнітометрії до недавнього часу розглядали або як задачі знаходження розв'язків лінійних інтегральних рівнянь, або як задачі знаходження значень інтегральних операторів. Проте в цьому випадку виникають нескінченновимірні конструкції, не реалізовані на практиці. Адекватні реальній геофізичній практиці постановки з'являються в межах методу лінійних інтегральних зображень, загальну методологію та конструктивні основи якого розробив В. М. Страхів. У цьому методі скінченність і наближеність отриманої інформації про досліджувані потенціальні поля (гравітаційне, магнітне, термічне тощо) та рельєф місцевості враховують первісно. Аналітичні апроксимації рельєфу дають змогу створювати цифрові моделі і розраховувати за ними топопоправки.

Linear problems of gravimetry and magnetometry were considered so far either as problems of finding solutions of linear integral equations or as problems of finding integral operators values. But in this case infinite-dimensional constructions appear, which are practically unimplemented. Problem statements adequate to real geophysical practice appear within the boundaries of linear integral concepts method which general methodology and constructive bases were elaborated by V. N. Strakhov. In this method finiteness and proximity of available information on the studied potential fields (gravity, magnetic, thermal et al.) and on lay of land are taken into account initially. Analytical approximations of the relief allow to produce digital models of the locality and to calculate with their help topographic corrections.

**1. Теоретические основы расчета поправки за рельеф с помощью метода линейных интегральных представлений.** В. Н. Страхив [Страхив, 1999а] предложил общую аналитическую идею решения задачи вычисления поправки за рельеф в случае детальных гравиметрических съемок. Разрабатываемая на основе этой идеи методика включает в себя две важнейшие компоненты:

- а) построение аналитической аппроксимации превышений рельефа поверхности Земли над принятой горизонтальной плоскостью;
- б) вычисление соответствующих определенных интегралов, дающих представление поправок за рельеф.

Введение поправок за влияние рельефа местности в случае проведения детальных гравиметрических съемок (масштаба 1 : 25 000 и крупнее) представляет собой процедуру, с одной стороны, принципиально важную, а с другой — весьма трудоемкую. Поэтому крайне важно иметь необходимые компьютерные технологии вычисления поправок.

В случае детальных съемок на относительно небольших площадях (до 2500 км<sup>2</sup>) возможно использование идеализации Земли как полупространства, ограниченного некоторой криволинейной поверхностью  $S$  и имеющего асимптотическую горизонтальную плоскость.

При реализации компьютерной технологии следует использовать соотношение ( $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ),  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , ось  $0\xi_3 = 0x_3$  направлена вниз)

$$g_3(x) = G\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{\xi_3^{(0)}}^{\xi_3(\xi_1, \xi_2)} \frac{(\xi_3 - x_3) d\xi_3}{R^3(\xi - x)} \right\} d\xi_1 d\xi_2, \quad (1)$$

в котором  $\xi_3^{(0)} = \text{const}$  — уравнение плоскости, определяющей объем Земли, заключенный между этой плоскостью и поверхностью  $S$ ;  $\sigma = \text{const}$  — плотность масс в указанном объеме;  $G$  — универсальная гравитационная постоянная,

$$R(\xi - x) = \sum_{k=1}^3 (\xi_k - x_k)^2 = (\xi_3 - x_3)^2 + \rho^2(\xi - \hat{x});$$

$\xi = (\xi_1, \xi_2)$ ;  $\hat{x} = (x_1, x_2)$ ;  $\xi_3 = \xi_3(\xi_1, \xi_2)$  — уравнение поверхности  $S$ . При этом  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  — вектор координат точек, принадлежащих носителю масс,  $x = (x_1, x_2, x_3)$  — вектор координат точек, расположенных выше поверхности  $S$  (описывающей рельеф Земли). В уравнении (1)  $g_3(x)$  — производная по  $x_3$  от потенциала плотности масс  $\sigma$  в указанном объеме Земли.

Ясно, что

$$\frac{(\xi_3 - x_3)}{R^3(\xi - x)} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{1}{R(\xi - x)} \right) = - \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left( \frac{1}{R(\xi - x)} \right),$$

и поэтому из соотношения (1) следует

$$\begin{aligned} g_3(x) &= -G\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{\xi_3^{(0)}}^{\xi_3(\xi_1, \xi_2)} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{1}{R(\xi - x)} \right) d\xi_3 \right\} d\xi_1 d\xi_2 = \\ &= G\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{R(\xi|_S - x)} - \frac{1}{R(\xi^{(0)} - x)} \right) d\xi_1 d\xi_2; \end{aligned}$$

здесь принято обозначение

$$\xi|_S = (\xi_1, \xi_2, \xi_3(\xi_1, \xi_2)), \quad \xi^{(0)} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3^{(0)}). \quad (2)$$

Из приведенных соотношений следует, что четыре основные проблемы вычислений значений функции  $g_3(x)$  в точках наблюдения  $x^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , таковы:

- 1) задание плоскости  $\xi_3^{(0)} = \text{const}$ ;
- 2) задание поверхности  $S$  — уравнения  $\xi_3 = \xi_3(\xi_1, \xi_2)$ ,  $\xi_3 \in S$ ;
- 3) задание величины  $\sigma$ ;
- 4) задание координат точек наблюдения  $x_3^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

В случае детальных съемок задание плоскости  $\xi_3^{(0)} = \text{const}$  должно осуществляться двумя условиями:

а) для всех  $x^{(i)}$  можно использовать (с требуемой точностью) приближенную формулу:

$$g_3(x) \approx G\sigma \iint_{\Sigma} \left( \frac{1}{R(\xi|_S - x)} - \frac{1}{R(\xi^{(0)} - x)} \right) d\xi_1 d\xi_2, \quad (3)$$

где  $\Sigma$  — конечная односвязная область в плоскости переменных  $(\xi_1, \xi_2)$ ;

б) для всех  $(\xi_1, \xi_2) \in \Sigma$

$$\xi_3^{(0)} - \xi_3(\xi_1, \xi_2) > 0. \quad (4)$$

В случае детальных съемок необходимо вычислять значения функции  $g_3(x)$  с двумя различными значениями  $\sigma$ :

а) стандартным, принятом при картосоставлении по материалам государственной гравиметрической съемки;

б) обоснованным с геологических позиций для данной конкретной площади.

Наиболее сложной и ответственной является проблема задания поверхности  $S$ , точнее — проблема построения той аппроксимации поверхности  $S$ , которая будет использоваться при вычислении значений функции  $g_3(x)$  в точках наблюдения  $x^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Основная вычислительная процедура состоит в построении по заданным значениям функции

$$\Delta\xi_3(\xi_1, \xi_2) = \xi_3(\xi_1, \xi_2) - \xi_3^{(0)},$$

в совокупности точек  $(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)})$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ , аналитической аппроксимации указанной функции, справедливой во всей области  $\Sigma$ , см. формулу (3), т. е. справедливой во всей области интегрирования. Ясно, что в силу (4) имеем  $\Delta\xi_3(\xi_1, \xi_2) < 0$  для всех  $(\xi_1, \xi_2) \in \Sigma$ .

Для построения аналитической аппроксимации используются значения  $\Delta\xi_3(\xi_1, \xi_2)$ :

во-первых, непосредственно для точек наблюдения;

во-вторых, в определенной совокупности точек топографических карт соответствующего масштаба (например, в случае гравиметрических съемок масштаба 1 : 25 000 желательнее использовать топографические карты масштаба 1 : 10 000);

в-третьих, в определенной совокупности характерных точек рельефа; эти значения должны быть получены в процессе проведения гравиметрических съемок.

Можно показать, что принятая совокупность точек  $S$  должна обеспечивать построение аналитической аппроксимации поверхности  $S$  (при  $(\xi_1, \xi_2) \in \Sigma$ ) со среднеквадратичной ошибкой порядка 5 см.

Построение аналитических аппроксимаций функции  $\Delta\xi_3(\xi_1, \xi_2)$  следует выполнять методом линейных интегральных представлений (см. [Страхов и др., 1997; 2002; Страхов, 1997; 1999а—в], исходя из следующего фундаментального факта: функция, непрерывная<sup>1</sup> на произвольной горизонтальной плоскости (плоскости переменных  $(\xi_1, \xi_2)$ ), может рассматриваться как предельные значения некоторой функции трех переменных  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , гармонической в полупространстве  $\xi_3 < 0$ , верхнем к заданной горизонтальной плоскости.

В качестве интегральных представлений функции  $\Delta\xi_3(\xi_1, \xi_2)$  могут использоваться:

- во-первых, основанные на так называемой основной формуле теории гармонических функций (см. [Страхов, 1997, Страхов и др., 2002]);
- во-вторых, основанные на представлении интегралом Фурье (см. [Страхов и др., 2002]);
- в-третьих, основанные на представлении с помощью интегрального преобразования Радона (см. [Степанова, 2002]).

<sup>1</sup> Либо даже из более общего класса  $L_2(-\infty, +\infty)$  функций с суммируемым квадратом на плоскости переменных  $(\xi_1, \xi_2)$ .

Построение аналитической аппроксимации функции  $\Delta \xi_3 (\xi_1, \xi_2)$  в конечном итоге редуцируется к решению системы линейных алгебраических уравнений с симметричной положительно полуопределенной матрицей  $A$  размерности  $(n \times n)$ , где  $n$  — число точек на  $S$  с известными координатами  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , использованных для построения аналитической аппроксимации.

После того, как аналитическая аппроксимация функции  $\Delta \xi_3 (\xi_1, \xi_2)$  построена, необходимая последующая операция состоит в задании некоторой совокупности узлов  $(\xi_1^{(s)}, \xi_2^{(s)})$  в области  $\Sigma$ , см. (2), позволяющей ввести представление

$$g_3(x) = G\sigma \sum_{v=1}^n \iint_{\Delta_v} \left( \frac{1}{R(\xi|_S - x)} - \frac{1}{R(\xi^{(0)} - x)} \right) d\xi_1 d\xi_2,$$

где  $\{\Delta_v\}_1^n$  — некоторая совокупность треугольников, представляющих собой замощение области  $\Sigma$  (отсюда, кстати, следует, что при первоначальном задании  $\Sigma$  должна учитываться необходимость ее представления в указанном виде).

Для нахождения же интегралов вида

$$J_v(x) = \iint_{\Delta_v} \left( \frac{1}{R(\xi|_S - x)} - \frac{1}{R(\xi^{(0)} - x)} \right) d\xi_1 d\xi_2,$$

следует использовать специальные квадратурные формулы интегрирования по треугольной области, имеющие наивысшую алгебраическую степень точности (см. [Крылов, 1967]). Процедура интегрирования должна иметь следующую организацию (в существенном экономизирующую общий объем вычислений):

а) для каждого треугольника  $\Delta_v$  отбирается некоторое число  $x^{(i)}$  ближайших точек (по значениям  $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$ );

б) для всех выбранных точек вычисление интеграла по  $\Delta_v$  осуществляется с помощью кубатурного процесса с достижением требуемой степени точности;

в) для всех остальных точек  $x^{(i)}$ , отличных от указанных в а) и б), нахождение интеграла по  $\Delta_v$  осуществляется с использованием фиксированного числа узлов кубатурной формулы — того числа, которое является максимальным в кубатурном процессе по нахождению значений интегралов для ближайших к  $\Delta_v$  точек  $x^{(i)}$  (см. п. а) и б)).

**2. Аппроксимация рельефа.** Изложим [Страхов и др., 2002] основные принципы метода линейных интегральных представлений и методику построения аналитических аппроксимаций линейных элементов потенциальных полей, описываемых гармоническими функциями и основной формулой Грина для гармонической функции — **S-аппроксимация** потенциальных полей.

Из основной формулы Грина для гармонических функций в некоторой области  $D$  пространства  $R^3$  [Кошляков, 1962] следует:

$$V(M) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[ \frac{1}{r_{MP}} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{MP}} \right) \right] d\sigma_P.$$

Здесь  $\Sigma$  — граница области  $D$ ,  $n$  — внешняя нормаль,  $M$  — точка наблюдения,  $P$  — точка на поверхности  $\Sigma$ , по которой производится интегрирование. Таким образом, любая гармоническая функция может быть представлена с помощью интегралов, являющихся поверхностными потенциалами. Будем считать, что рельеф — это предельные значения на поверхности Земли

(в локальном варианте она представляет собой горизонтальную плоскость) силы тяжести, создаваемой группой тел, имеющих форму прямоугольных параллелепипедов.

Если известны компоненты магнитного или гравитационного поля (например, первая производная потенциала по  $z$  на некотором рельефе над физической поверхностью Земли), то можно представить потенциал поля в виде суммы простого и двойного слоев, создаваемых горизонтальной плоскостью, расположенной ниже заданного рельефа:

$$V(M) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_1(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_3^2}} +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_2(\xi_1, \xi_2) x_3 d\xi_1 d\xi_2}{\left[ \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_3^2} \right]^3},$$

$$M = (x_1, x_2, x_3), \quad \hat{x} = (x_1, x_2), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad \hat{\xi} = (\xi_1, \xi_2).$$

Система координат выбрана так, чтобы плоскость простого и двойного слоев задавалась уравнением  $x_3 = 0$ . Тогда производная по  $x_3$  потенциала  $V$ , взятая с обратным знаком, будет иметь вид

$$-\frac{\partial V}{\partial x_3}(M) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_1(\hat{\xi}) x_3 d\hat{\xi}}{\left[ \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2} \right]^3} +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_2(\hat{\xi}) \left( (x_3^2 - (x_1 - \xi_1)^2) - (x_2 - \xi_2)^2 \right)^2 d\hat{\xi}}{\left[ \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_3^2} \right]^5},$$

$$M = (x_1, x_2, x_3). \tag{5}$$

Функции  $\rho_1, \rho_2$  неизвестны. Пусть компоненты поля заданы в конечном множестве точек  $M_i, i = 1, 2, \dots, N; M_i = (x_i^{(i)}, y_i^{(i)}, z_i^{(i)})$ . Обозначим подынтегральную функцию в первом слагаемом в (5) в точке  $M_i$  через  $Q_1^{(i)}$ , а во втором слагаемом — через  $Q_2^{(i)}$ . Тогда получим

$$-\frac{\partial V(M_i)}{\partial x_3} \equiv f_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \rho_1(\hat{\xi}) Q_1^{(i)}(\hat{\xi}) + \rho_2(\hat{\xi}) Q_2^{(i)}(\hat{\xi}) \right) d\hat{\xi}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

На практике компоненты поля бывают заданы с некоторой погрешностью, поэтому входной информацией являются значения  $f_{i,\delta}$ . С помощью решения вариационной задачи

$$\Omega(\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \rho_1^2(\hat{\xi}) + \rho_2^2(\hat{\xi}) \right) d\hat{\xi} = \min_{\rho}$$

$$f_{i, \delta} - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \rho_1(\hat{\xi}) Q_1^{(i)}(\hat{\xi}) + \rho_2(\hat{\xi}) Q_2^{(i)}(\hat{\xi}) \right) d\hat{\xi} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

получим искомые функции:

$$\rho_1^{(a)}(\hat{\xi}) = \tilde{\rho}_1(\hat{\xi}, \lambda), \quad \rho_2^{(a)}(\hat{\xi}) = \tilde{\rho}_2(\hat{\xi}, \lambda),$$

$$\tilde{\rho}_1(\hat{\xi}, \lambda) = \sum_{i=1}^N \lambda_i Q_1^{(i)}(\hat{\xi}), \quad \tilde{\rho}_2(\hat{\xi}, \lambda) = \sum_{i=1}^N \lambda_i Q_2^{(i)}(\hat{\xi}).$$

Таким образом, приходим к следующей системе линейных уравнений:

$$A\lambda = f_{\delta}, \tag{6}$$

элементы матрицы которой в данном случае имеют вид

$$a_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( Q_1^{(i)}(\hat{\xi}) Q_1^{(j)}(\hat{\xi}) + Q_2^{(i)}(\hat{\xi}) Q_2^{(j)}(\hat{\xi}) \right) d\hat{\xi},$$

$$1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq N. \tag{7}$$

Коэффициенты  $a_{ij}$  могут быть вычислены явно с помощью интеграла Пуассона:

$$a_{ij} = 2\pi \left\{ \frac{x_{3,i} + x_{3,j}}{\left( \sqrt{(x_{3,i} + x_{3,j})^2 + (x_{1,i} - x_{1,j})^2 + (x_{2,i} - x_{2,j})^2} \right)^3} + \frac{(x_{3,i} + x_{3,j}) \left( 9 \left[ (x_{1,i} - x_{1,j})^2 + (x_{2,i} - x_{2,j})^2 \right] - 6 (x_{3,i} + x_{3,j})^2 \right)}{\left( \sqrt{(x_{3,i} + x_{3,j})^2 + (x_{1,i} - x_{1,j})^2 + (x_{2,i} - x_{2,j})^2} \right)^7} \right\},$$

$$1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq N. \tag{8}$$

**3. Методика расчета поправки за рельеф.** *Общие методические вопросы.* Автором была разработана следующая методика вычисления поправки за рельеф.

В параграфе 3 предполагается, что область интегрирования — вся плоскость. На практике, конечно, необходимо задавать некоторые пределы интегрирования:  $A < x, y < B$ , где  $A$  и  $B$  — числа, выбираемые с учетом всей имеющейся априорной информации о точности наблюдаемых величин (элементов гравитационного поля и т. д.).

Для расчета поправки за рельеф разобьем плоскость  $XOY$  на несколько зон (взяты три зоны, не считая "нулевой", но можно построить и большее их количество).

Нулевой зоной назовем площадь гравиметрической съемки. За ней располагаются 1-я, 2-я и т. д. зоны (они окаймляют нулевую зону). Интеграл по  $i$ -й зоне представим в виде суммы

интегралов по треугольникам, составляющим триангуляцию соответствующей зоны. Для интегрирования по треугольнику применим квадратурную формулу наивысшей степени точности. Важнейшим моментом при расчете поправок за рельеф является решение вопроса о том, в каком порядке производить вычисления: для каждой точки съемки последовательно находить значения подинтегральной функции или сохранять значения подинтегральной функции в различных точках и суммировать затем для всех точек съемки одновременно. Наиболее целесообразным представляется первый путь: он позволяет по вычислениям в пределах одной зоны оценить параметры дальнейших расчетов (шаги интегрирования по  $x$  и  $y$  в последующих зонах, количество узлов в квадратурной формуле, само число зон). После того как триангуляция нулевой зоны будет построена, для каждого треугольника применяется квадратурная формула наивысшей степени точности: находятся параметры линейного преобразования, переводящего стандартный двумерный симплекс (можно также взять равносторонний треугольник со стороной 1) в заданный треугольник, а для стандартного симплекса параметры квадратурной формулы известны [Крылов и др., 1967].

*Методика построения триангуляции нулевой зоны.* Проблема построения треугольников по заданному множеству точек плоскости аналогична проблеме построения плоского связного графа, заматающего заданное множество точек плоскости. В отличие от классической проблемы Штейнера [Фоменко, Тужилин, 1983], мы не ставим себе целью найти минимальные сети из плоских двумерных деревьев. Основная задача — построить по точкам наблюдений (как подчеркивает В.Н. Страхов во многих своих работах — аппроксимации элементов аномальных гравитационных полей необходимо находить только по известной сети точек наблюдений, без какого-либо пересчета в другие точки, с тем чтобы не уменьшилась точность аппроксимации) такую триангуляцию площади съемки и прилегающих к ней зон, чтобы поправка за рельеф вычислялась с максимальной точностью.

*Разбиение нулевой зоны на слои выпуклости.* Точки гравиметрической съемки разделим на несколько "слоев". Для этого сначала определим максимальное и минимальное значения координат  $x$  и  $y$ , а затем опишем вокруг точки с координатами

$$\left( \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}, \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} \right)$$

окружность радиуса  $\max \left( \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}, \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} \right) \equiv r$  и разобьем круг, ограниченный

этой окружностью, на  $n$  частей, ограниченных концентрическими окружностями радиусов  $\frac{r}{n} k$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Точки съемки, попадающие внутрь кольца с радиусами  $\frac{r}{n} (k - 1)$ ,  $\frac{r}{n} k$ , будем считать принадлежащими  $k$ -му слою. Затем последовательно построим выпуклые оболочки точек, принадлежащих  $k$ -му слою. Как известно [Фоменко, Тужилин, 1980], выпуклая оболочка некоторого конечного множества точек плоскости находится однозначно. Приведем соответствующий алгоритм.

Если известна наименьшая координата  $x_{\min}$  заданной совокупности точек, то можно провести вертикальную прямую  $x = x_{\min}$ , которая пройдет через точку с минимальной координатой  $x$ . Это будет первая точка, принадлежащая границе выпуклой оболочки нашего множества.

Далее, из всех точек заданной совокупности выберем следующую так, чтобы прямая, проведенная через нее и первую точку, составляла наименьший угол с вертикальной прямой  $x = x_{\min}$ , и т. д. Конечно, координаты всех вершин границы выпуклой оболочки (которая представляет собой выпуклый  $m$ -угольник, где  $m$  не обязательно совпадает с количеством точек) необходимо заносить в некоторый вспомогательный массив.

Когда выпуклые оболочки всех слоев будут построены, можно будет приступить к триангуляции нулевой зоны.

Рассмотрим  $k$ -й и  $(k + 1)$ -й слои. Первый из них назовем внутренним, а второй — внешним. Поместим начало полярной системы координат в центр упомянутой выше окружности. Упорядочим точки обоих слоев по возрастанию угла  $\varphi$ . Первой вершиной первого треугольника будет точка с наименьшим значением угла  $\varphi$ . Эту точку (будем считать, не ограничивая общности, что она принадлежит внутреннему слою) соединим либо со следующей по величине угла точкой, принадлежащей внешнему слою, либо, если следующая по величине точка также принадлежит внутреннему слою, будем перебирать точки до тех пор, пока не найдем точку на

внешнем слое. В последнем случае третьей вершиной первого треугольника будет либо точка с максимальным значением  $\varphi$ , либо найденная нами точка на внешнем слое, а второй вершиной будет следующая за первой точка, принадлежащая внутреннему слою. Далее процесс повторяется, пока не будут исчерпаны все точки  $k$ -го и  $(k + 1)$ -го слоев. Таким образом, построим триангуляцию площади съемки. Для завершения построения нулевой зоны отметим точки  $(n + 1)$ -го "фиктивного" слоя — они будут располагаться по периметру прямоугольника, охватывающего площадь съемки.

Необходимо отметить, что получающиеся треугольники могут быть "не слишком хорошими", т. е. слишком вытянутыми или маленькими и т. п., как показали численные и графические эксперименты даже при небольшом количестве точек съемки. На практике поле измеряется в большом ( $N = 10^3$  или даже очень большом  $N = 10^5$ ) количестве пунктов наблюдения. Поэтому триангуляция нулевой зоны становится серьезной проблемой, требующей больших затрат времени (как исследователя, так и компьютерного). Некоторые точки при необходимости надо "выбрасывать" и, наоборот, если треугольники слишком большие, можно их раздробить на более мелкие (например, барицентрическое подразделение). Количество слоев также можно варьировать.

Разбиение выпуклой оболочки. Второе решение проблемы триангуляции нулевой зоны состоит в следующем.

Построим выпуклую оболочку всего множества точек съемки. Пронумеруем вершины, принадлежащие границе выпуклой оболочки. Обозначим вершины через  $P_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ . Здесь  $K$  — число сторон многоугольника. Проведем диагонали полученного выпуклого многоугольника из вершины  $P_1$ . Получим  $K - 2$  треугольника. Затем можно внутри каждого из  $K - 2$  треугольников выбрать точку, принадлежащую заданному множеству точек плоскости (обозначим его через  $\Psi_N$ , где  $N$  — число точек множества) и соединить ее с вершинами соответствующего треугольника (критерий принадлежности некоторой точки внутренности треугольника легко выписать). Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока либо не будут исчерпаны все точки множества  $\Psi_N$  (оно конечно, поэтому процесс должен прерваться на каком-то шаге, скажем на  $S$ -м), либо не будет достигнута необходимая точность поправки за рельеф при расчетах с количеством узлов, полученных на текущем,  $m$ -м, шаге.

Кроме того, можно триангулировать выпуклую оболочку заданного множества точек следующим образом. Выберем некоторую точку, не совпадающую ни с одной из граничных точек выпуклой оболочки (если такой точки нет, то зададим ее сами). Соединим эту точку с точками границы (они у нас пронумерованы, соответствующая программа была разработана автором). Если точек границы  $M$ , то получим столько же треугольников. Далее, внутри каждого из этих треугольников выберем некоторую точку, принадлежащую заданному множеству, если ее нет, добавим. Процесс продолжаем до тех пор, пока не будут исчерпаны все точки множества.

Построение 1-й и последующих зон. В качестве параметров 1-й зоны зададим значения  $x_{\min}, x_{\max}, y_{\min}, y_{\max}$  и будем считать, что точки, расположенные в области  $\{x_{\min} \leq x \leq x_{\max}, y_{\min} \leq y \leq y_{\max}\}$  и не принадлежащие нулевой зоне, лежат в первой зоне (т. е. 1-я зона окаймляет нулевую). Последующие зоны имеют такое же строение. Разобьем  $k$ -ю зону на прямоугольные треугольники с катетами длины  $h_x(k), h_y(k)$  (здесь  $h_x(k), h_y(k)$  — шаги по координатам  $x$  и  $y$  соответственно). Для каждого такого прямоугольного треугольника применим квадратурную формулу наивысшей степени точности (формулу Гаусса на отрезке  $[-1, 1]$  по одной переменной и формулу наивысшей степени точности на отрезке  $[0, 1]$  для интеграла  $\int_0^1 x f(x) dx$ ). Значения  $h_x(k), h_y(k)$  можно корректировать с учетом вычисления вклада в поправку предыдущих зон.

Таким образом, для расчета поправки за рельеф необходим интерактивный режим работы пользователя и компьютера — параметры задачи необходимо корректировать с учетом вычислений на предыдущих этапах. Такой подход представляется наиболее оптимальным.

Результаты расчета поправки на практическом примере, предоставленном В.М. Новоселицким. Сибирская площадь. Аппроксимационный подход к спектральному анализу гравитационных аномалий был апробирован на материалах детальной гравиметрической съемки



на Сибирской площади (Пермская область). Эти материалы были любезно предоставлены профессором В.М. Новоселицким. Схема расположения пунктов гравиметрических наблюдений представлена на рис. 1. Из этой схемы видна крайне неравномерное размещение 2721 гравиметрических пунктов по площади.

Участок детальной гравиметрической съемки характеризуется сложным и расчлененным рельефом поверхности Земли (рис. 2). Перепады высот составляют около 100 м. Гравитационное поле участка также характеризуется достаточно сложной морфологией, поле с юго-запада убывает на северо-восток от  $-3,5$  до  $7,8$  мГал и осложнено большим количеством локальных аномалий. Гравиметрическая карта в редукции Буге ( $\sigma = 2,3$  г/см<sup>3</sup>) представлена на рис. 3.

Для выполнения расчетов из 2721 гравиметрических пункта случайным образом были выбраны 226 пунктов, которые использовались для независимого контроля точности аппроксимации. На первом этапе аппроксимация рельефа строилась по оставшимся 2495 точкам, контроль производился как в 226 контрольных точках, так и во всех 2721 исходных точках. На следующем этапе аппроксимация строилась по данным во всех 2721 точках, контроль также производился по этим точкам.

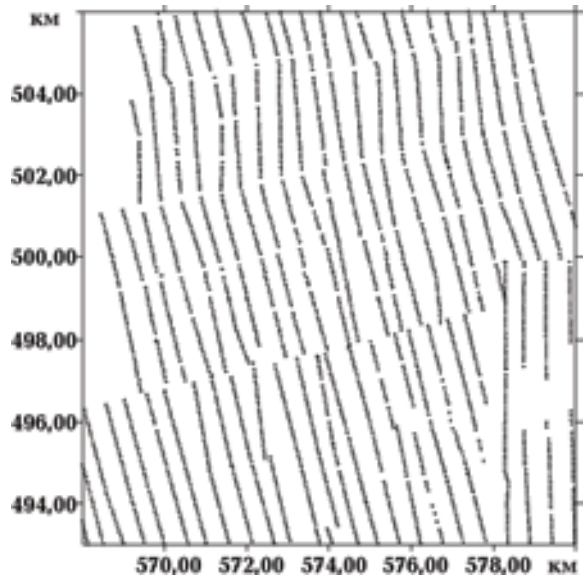


Рис. 1. Сибирская площадь. Схема расположения гравиметрических пунктов.

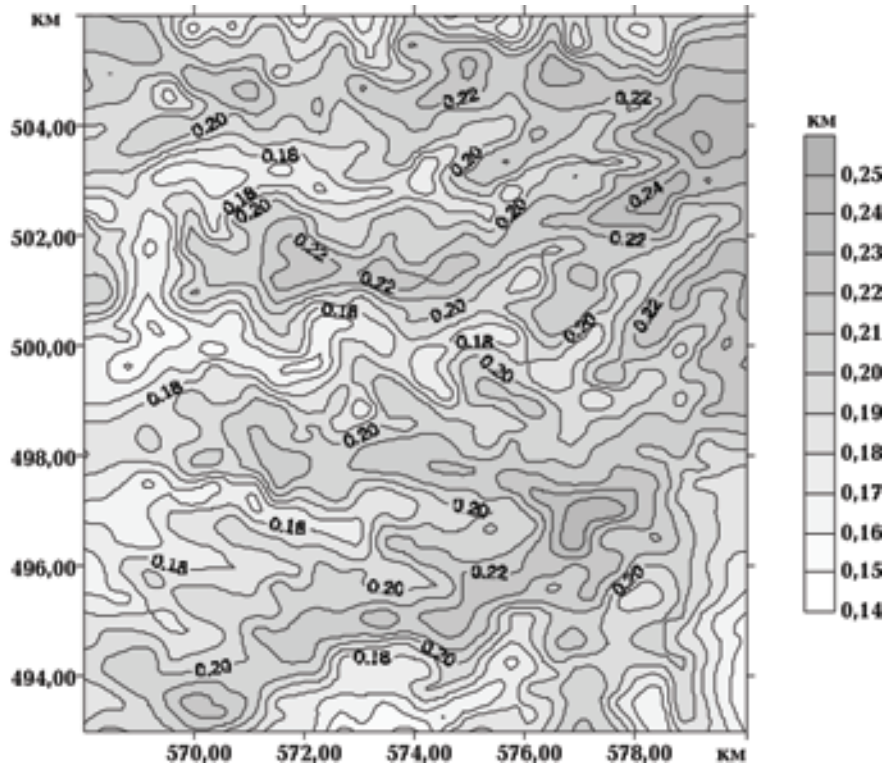


Рис. 2. Сибирская площадь. Карта рельефа земной поверхности.

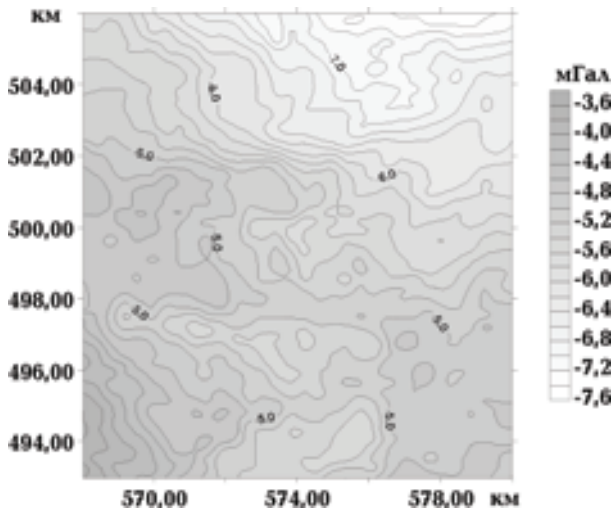


Рис. 3. Сибирская площадь. Карта наблюдаемого гравитационного поля аномалии Буге ( $\sigma = 2,3 \text{ г/см}^3$ ).

Аппроксимация рельефа была выполнена с точностью  $\Delta = 1,74 \cdot 10^{-4}$ , что следует из таблицы. На рис. 1 изображены рельеф земной поверхности и карта разности между теоретическими значениями функции, описывающей рельеф, и  $S$ -аппроксимацией этой функции, полученной в результате решения системы (6)–(8).

Метод М7 — метод блочного координатного спуска, разработанный В. Н. Страховым для решения систем линейных алгебраических уравнений с приближенно заданной правой частью [Страхов и др., 2002].

После того как  $S$ -аппроксимация рельефа земной поверхности была найдена (рис. 4), с помощью процедуры, описанной выше, вычислялась поправка за рельеф.

При этом в треугольниках, расположенных в “ближней” зоне по отношению к точ-

**S-аппроксимация рельефа в практических примерах**

Но- мер	$N, N_1, N_2$	$H_1, H_2$	Метод реше- ния СЛАУ	$\sigma_{\min}, \text{ м}$	$\sigma_{\max}, \text{ м}$	$\sigma_0, \text{ м}$	$\sigma_1, \sigma_{\text{конт}1}, \text{ м}$	$\sigma_2, \sigma_{\text{конт}2}, \text{ м}$	$v$	$n$	$\Delta / t$
1	21 392 15 371 17 020	300 м	T-7	4,8	6	5,4	6,4 7,7	5,3 7,3	0,90	12	0,0095 00 : 07 : 05
2	24 931 18 317 21 230	200 м	T-7	2,9	3,7	3,1	3,6 3,9	3,3 4,6	0,89	13	0,0143 02 : 13 : 47
3	2721 2280 2473	90 м	S-5	0,24	0,28	0,25	0,287 0,37	0,264 0,43	0,89	10	0,000160 00 : 08 : 13
4	3541 3028 3256	0,001	S-5	0,001	0,0015	0,0012	0,002 0,05	0,0017 0,08	0,91	12	0,01012 00 : 09 : 45

Примечания. Здесь  $\sigma = \frac{\|Ax - f_\delta\|_E}{\sqrt{N}}$  — среднеквадратическое отклонение;  $\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{\delta_{\max}^2}{N}}$ ;

$\sigma_{\min} = \sqrt{\frac{\delta_{\min}^2}{N}}$ ;  $\Delta = \frac{\|Ax - f_\delta\|_E}{\|f_\delta\|_E}$  — показатель качества решения;  $v = \frac{\|\delta f_{\text{точн}} - (Ax - f_\delta)\|_E}{\|\delta f_{\text{точн}}\|_E}$ ;  $t$  —

время решения СЛАУ;  $n$  — количество пробных решений;  $H$  — координата  $z$  плоскости, на которой распределены простой и двойной слои (или координаты  $H_1, H_2$ , если таких плоскостей две);  $N$  — число исходных точек;  $N_1$  — число точек без контрольных точек I типа;  $N_2$  — число точек без контрольных точек II типа;  $\sigma_0$  — среднеквадратичное отклонение, полученное с помощью аппроксимации по исходным точкам;  $\sigma_1$  — среднеквадратичное отклонение, полученное с помощью аппроксимации по точкам рельефа без контрольных точек I типа;  $\sigma_{\text{конт}1}$  — I среднеквадратичное отклонение, полученное в контрольных точках I типа;  $\sigma_2$  — среднеквадратичное отклонение, полученное с помощью аппроксимации по точкам рельефа без контрольных точек II типа;  $\sigma_{\text{конт}2}$  — среднеквадратичное отклонение, полученное в контрольных точках II типа.

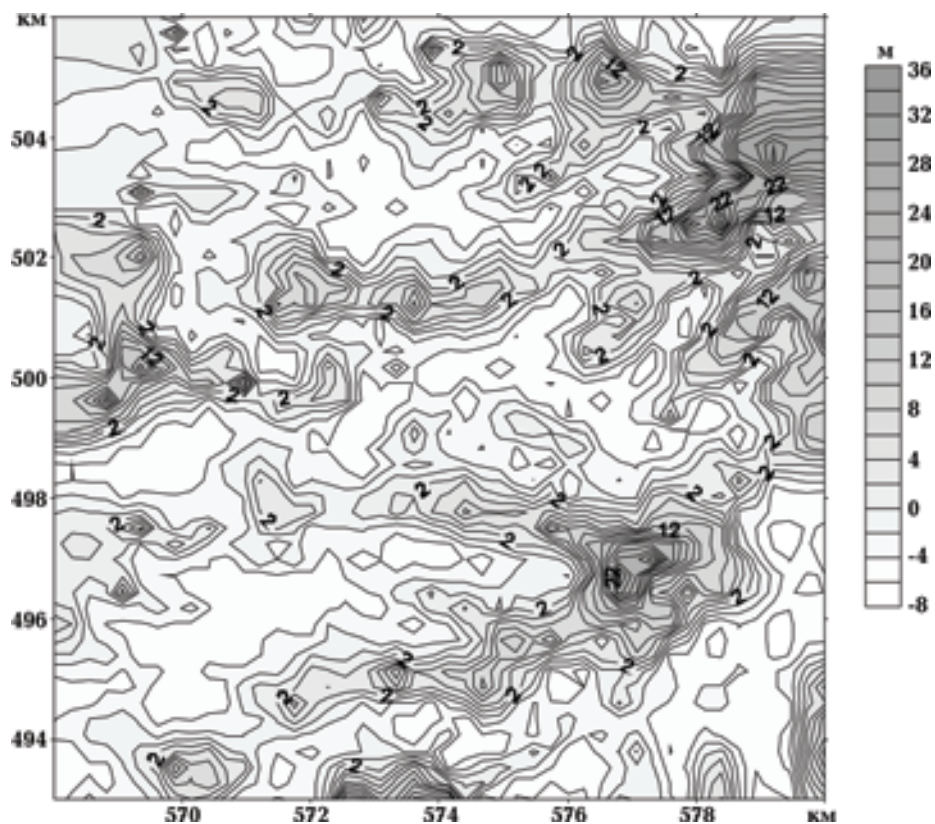


Рис. 4. Карта разности исходного рельефа и рельефа, полученного в результате S-аппроксимации, в примере В.М. Новоселицкого.

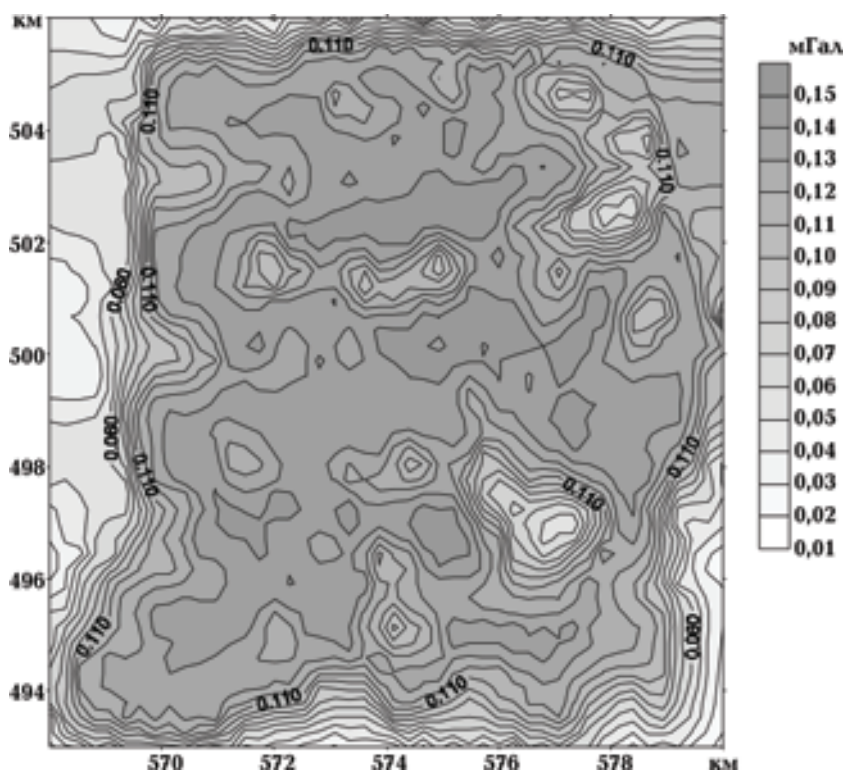


Рис. 5. Карта изолиний поправки за рельеф в примере В.М. Новоселицкого ( $N = 2721$ , количество зон  $m = 2$ ).

ке, в которой вычисляется поправка, количество узлов в кубатурной формуле было равно 192 (24 узла в квадратурной формуле Гаусса  $\times$  8 узлов в формуле интегрирования по отрезку  $[0,1]$  с весом  $x$ ). В "дальней" зоне количество узлов полагалось равным 96. Такие значения были выбраны для обеспечения точности интегрирования порядка  $10^{-13}$ .

Карта изолиний поправки представлена на рис. 5.

**Заключение.** Метод линейных интегральных представлений позволяет с достаточно высокой точностью строить аналитические аппроксимации рельефа местности, что позволяет в дальнейшем рассчитывать топопоправки. Развитие предлагаемой методики вычисления поправок за рельеф сделает возможным быстрое и эффективное создание ЦММ для различных регионов, в том числе с горным и расчлененным рельефом. Метод, описываемый в статье, не требует задания регулярной сети высотных отметок, интерполирования значений функции, описывающей рельеф местности и т. п.

### Список литературы

- Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. — Москва: Физматгиз, 1962. — 767 с.
- Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. — Москва: Наука, 1967. — 500 с.
- Степанова И. Э. Использование преобразования Радона в рамках метода линейных интегральных представлений для решения задач гравиметрии // Докл. РАН. — 2002. — **384**, № 1. — С. 108—112.
- Страхов В.Н. Геофизика и математика. — Москва: ОИФЗ РАН, 1999а. — 64 с.
- Страхов В. Н. О построении аналитических аппроксимаций аномальных гравитационных и магнитных полей // Основные проблемы теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. — Москва: ОИФЗ РАН, 1999б. — С. 65—125.
- Страхов В.Н. Третья парадигма в теории и практике интерпретации потенциальных полей (гравитационных и магнитных аномалий). Ч. II // Электр. науч.-инф. журн. "Вестник ОГГГН РАН". — Москва: ОИФЗ РАН, 1997. — № 2 (2). — С. 55—82.
- Страхов В.Н. Три парадигмы в теории и практике интерпретации потенциальных полей (анализ прошлого и прогноз будущего) // Изв. секции наук о Земле РАЕН. — 1999в. — № 2. — С. 95—135.
- Страхов В.Н., Степанова И.Э., Гричук Л.В. Метод интегральных представлений при решении задач гравиметрии и магнитометрии в трехмерной постановке // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей. — Москва: ОИФЗ РАН, 1997. — С. 105—108.
- Страхов В.Н., Степанова И.Э., Керимов И.А. К вопросу о вычислении поправок за рельеф // Физика Земли. — 2002. — № 4. — С. 55—66.
- Фоменко А.Т., Тужилин А.А. Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей. — Москва: Наука, 1991. — 174 с.