УДК 517.5

А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк

Оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів згорток періодичних функцій невеликої гладкості

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

Отримано порядкові оцінки для найкращих рівномірних ортогональних тригонометричних наближень на класах 2π-періодичних функцій таких, що їх (ψ,β)-похідні належать одиничним кулям просторів L_p, $1 \leqslant p < \infty$, у випадку, коли послідовність ψ така, що добуток $\psi(n)n^{1/p}$ може прямувати до нуля повільніше за довільну степеневу функцію і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} < \infty$ при $1 < p < \infty$, $1/p+1/p' = 1$ або $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$ при $p = 1$. Аналогічні оцінки отримано для наближень в $L_{p'}$-метриках класів (ψ,β)-диференційовних функцій таких, що $\|f_\beta^\psi\|_1 \leqslant 1$.

Ключові слова: найкращі ортогональні тригонометричні наближення, класи згорток, класи (ψ,β)-диференційовних функцій.

Нехай L_p, $1 \leqslant p < \infty$, — простір 2π-періодичних сумовних в p-му степені на $[0, 2\pi)$ функцій $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ з нормою

$$\|f\|_p := \left(\int\limits_0^{2\pi} |f(t)|^p dt\right)^{1/p},$$

L_∞ — простір 2π-періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ з нормою

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_t |f(t)|.$$

Через $L^\psi_{\beta,p}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, позначимо множину функцій $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із L_1, які зображуються у вигляді згорток

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi_\beta(x-t)\varphi(t)\,dt, \qquad a_0 \in \mathbb{R}, \qquad \|\varphi\| \leqslant 1, \qquad \varphi \perp 1, \tag{1}$$

з фіксованим твірним ядром Ψ_β вигляду

$$\Psi_\beta(t) = \frac{1}{2}\sum_{\mathbb{Z}/\{0\}} \psi(|k|)e^{-i\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\mathrm{sign}k\right)} = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right). \tag{2}$$

Функцію φ в рівності (1) називають (див., наприклад, [1, с. 132, 136]) (ψ,β)-похідною функції f і позначають через f_β^ψ.

У випадку коли $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, класи $L^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, є відомими класами Вейля–Надя $W^{r}_{\beta,p}$.

Якщо послідовність $\psi(k)$ монотонно спадає і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi^{q}(k) k^{q-2} < \infty, \qquad 1 < q < \infty,$$

то, згідно з лемою 12.6.6 монографії [2, с. 193], має місце включення $\Psi_{\beta} \in L_{q'}$, $1/q + 1/q' = 1$.

З твердження 3.8.1 із [1, с. 137] і твердження 1.5.5 з [3, с. 43] випливає, що при

$$\psi(k) \downarrow 0, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2} < \infty, \qquad 1 < p < \infty, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

справедливі вкладення $L^{\psi}_{\beta,p} \subset L_{\infty}$, $L^{\psi}_{\beta,1} \subset L_{p'}$, а з твердження 3.8.1 із [1, с. 137] випливає, що при $\psi(k) > 0$ і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$ виконується вкладення $L^{\psi}_{\beta,1} \subset L_{\infty}$.

Будемо вважати, що послідовності $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, які задають класи $L^{\psi}_{\beta,p}$, є звуженнями на множину натуральних чисел деяких додатних, неперервних, опуклих донизу функцій $\psi(t)$, заданих на $[1, \infty)$, що задовольняють умову $\lim\limits_{t \to \infty} \psi(t) = 0$. Множину всіх таких функцій ψ позначатимемо через $\mathfrak{M}$.

Для класифікації функцій ψ із $\mathfrak{M}$ за їх швидкістю спадання до нуля важливу роль відіграє характеристика

$$\alpha(\psi; t) := \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}, \qquad \psi'(t) := \psi'(t+0). \tag{3}$$

За її допомогою з множини $\mathfrak{M}$ виділяють такі підмножини (див., наприклад, [1, с. 160–161]):

$$\mathfrak{M}_0 := \{\psi \in \mathfrak{M} \colon \exists\, K > 0 \ \forall\, t \geqslant 1 \ 0 < K \leqslant \alpha(\psi; t)\}, \tag{4}$$

$$\mathfrak{M}_C := \{\psi \in \mathfrak{M} \colon \exists\, K_1, K_2 > 0 \ \forall\, t \geqslant 1 \ K_1 \leqslant \alpha(\psi; t) \leqslant K_2 < \infty\}. \tag{5}$$

В (4) і (5) величини K, K_1, K_2 можуть залежати від ψ. Очевидно, що $\mathfrak{M}_C \subset \mathfrak{M}_0$.

Нехай $m \in \mathbb{N}$. Величину

$$e^{\perp}_{m}(L^{\psi}_{\beta,p})_s = \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}} \inf_{\gamma_m} \|f(x) - \sum_{k \in \gamma_m} \widehat{f}(k) e^{ikx}\|_s, \qquad 1 \leqslant p, s \leqslant \infty, \tag{6}$$

де γ_m — довільні набори із m цілих чисел, $\widehat{f}(k) := \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$ — коефіцієнти Фур'є функції f, називають найкращим ортогональним тригонометричним наближенням класу $L^{\psi}_{\beta,p}$ в метриці простору L_s.

Метою даної роботи є знаходження точних порядкових оцінок величин $e^{\perp}_{n}(L^{\psi}_{\beta,p})_p$, і $e^{\perp}_{n}(L^{\psi}_{\beta,1})_{p'}$ при $1 \leqslant p < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$.

Для класів Вейля–Надя $W^{r}_{\beta,p}$ порядкові оцінки величин (6) досліджувалися в роботах Е. С. Белінського [4] та А. С. Романюка [5–7].

Для класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ порядкові оцінки величин (6) вивчалися в роботах В. В. Шкапи [8, 9] та О. С. Федоренка [10, 11]. При цьому в роботах [8, 9] порядкові рівності для величин $e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty}$, $1 < p < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, було знайдено за умови $\psi \in B \bigcap \Theta^*_p$, а для величин $e^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,1})_{p'}$, $1 < p < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$, $\beta \in \mathbb{R}$, — за умов $\psi \in B \bigcap \Theta^*_p$ і опуклості функції $1/\psi(t)$, де B — множина незростаючих додатних функцій $\psi(t)$, $t \geqslant 1$, для кожної з яких можна вказати додатну сталу K таку, що $\psi(t)/\psi(2t) \leqslant K$, $t \geqslant 1$, а Θ^*_p — множина незростаючих додатних функцій $\psi(t)$, для яких існує $\varepsilon > 0$ таке, що послідовність $\psi(k)k^{(1/p)+\varepsilon}$ не зростає. При зазначених умовах із [8, 9] випливають оцінки

$$e^{\perp}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty} \asymp e^{\perp}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{p'} \asymp \psi(n)n^{1/p}, \qquad \beta \in \mathbb{R}, \qquad 1 < p < \infty, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{7}$$

У даній роботі знайдено порядкові оцінки величин $e^{\perp}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty}$ і $e^{\perp}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_{p'}$, $1 \leqslant p < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$, у випадку, коли функція $g_p(t) = \psi(t)t^{1/p}$ належить до множини $\mathfrak{M}_0$, і, крім того, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} < \infty$ при $1 < p < \infty$ або $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$ при $p = 1$. При цьому константи в отриманих оцінках виражаються через параметри класів в явному вигляді.

Щоб сформулювати основні результати роботи, введемо такі позначення. Для кожного $1 < s < \infty$ покладемо

$$\xi(s) := \max\left\{4\left(\frac{\pi}{s-1}\right)^{1/s},\ 14(8\pi)^{1/s}s\right\}, \tag{8}$$

а для будь-якої функції $\psi \in \mathfrak{M}$ через $\underline{\alpha}_n(\psi)$, $n \in \mathbb{N}$, будемо позначати величини

$$\underline{\alpha}_n(\psi) := \inf_{t \geqslant n} \alpha(\psi; t), \tag{9}$$

де характеристика $\alpha(\psi; t)$ означається формулою (3).

Теорема 1. *Нехай* $1 < p < \infty$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$, *а функція* $g_p(t) = \psi(t)t^{1/p}$ *така, що* $g_p \in \mathfrak{M}_0$ *і* $\underline{\alpha}_1(g_p) = \inf\limits_{t \geqslant 1} \alpha(g_p; t) > p'$. *Тоді для довільних* $n \in \mathbb{N}$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$ *мають місце співвідношення*

$$K^{(1)}_{\psi,p}\left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2}\right)^{1/p'} \leqslant e^{\perp}_{2n}(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty} \leqslant e^{\perp}_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty} \leqslant K^{(2)}_{\psi,p}\left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2}\right)^{1/p'}, \tag{10}$$

$$\frac{4}{3}K^{(1)}_{\psi,p}\left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2}\right)^{1/p'} \leqslant e^{\perp}_{2n}(L^{\psi}_{\beta,1})_{p'} \leqslant e^{\perp}_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,1})_{p'} \leqslant K^{(2)}_{\psi,p}\left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2}\right)^{1/p'}, \tag{11}$$

в яких

$$K^{(1)}_{\psi,p} = \frac{1}{3\xi(p)}\left(\frac{\underline{\alpha}_1(g_p)}{p' + \underline{\alpha}_1(g_p)}\right)^{1/p}\left(1 - \frac{p'}{\underline{\alpha}_1(g_p)}\right), \qquad K^{(2)}_{\psi,p} = \frac{1}{\pi}\xi(p')\left(\frac{p' + \underline{\alpha}_1(g_p)}{\underline{\alpha}_1(g_p)}\right)^{1/p'}.$$

Наслідок 1. *Нехай* $1 < p < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi^{p'}(k)k^{p'-2} < \infty$ *і* $g_p(t) = \psi(t)t^{1/p}$ *така, що* $\underline{\alpha}_1(g_p) = \inf\limits_{t \geqslant 1} \alpha(g_p; t) > p'$. *Тоді якщо* $g_p \in \mathfrak{M}_0$, *то*

$$e_n^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty} \asymp e_n^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,1})_{p'} \asymp \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2}\right)^{1/p'}, \qquad \beta \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

якщо ж $g_p \in \mathfrak{M}_C$, то виконуються порядкові рівності (7).

Зауважимо, що коли $g_p \in \mathfrak{M}_0$ і

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(g_p; t) = \infty, \tag{13}$$

то порядкові рівності (7) місця не мають, оскільки в цьому випадку виконується оцінка

$$\psi(n) n^{1/p} = o\left(\left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi^{p'}(k) k^{p'-2}\right)^{1/p'}\right), \qquad n \to \infty.$$

Прикладом функцій ψ, які задовольняють умови наслідку 1 і для яких виконується умова (13), є функції виду $\psi(t) = t^{-1/p} \ln^{-\gamma}(t+K)$, $\gamma > 1/p'$, $K \geqslant e^{\gamma p'} - 1$, $1 < p < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$. Дійсно, для них, як неважко одержати з (12), справедливі порядкові оцінки

$$e_n^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty} \asymp e_n^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,1})_{p'} \asymp \psi(n) n^{1/p} \ln^{1/p'} n, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \qquad \beta \in \mathbb{R}.$$

Теорема 2. *Нехай $\beta \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$, а функція $g(t) = \psi(t) t$ така, що $g \in \mathfrak{M}_0$, $\underline{\alpha}_1(g) = \inf\limits_{t \geqslant 1} \alpha(g; t) > 1$. Тоді якщо $\cos(\beta\pi/2) \neq 0$, то для довільного $n \in \mathbb{N}$*

$$\frac{1}{12\pi}\left|\cos\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(1 - \frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)}\right) \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \leqslant e_{2n}^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \leqslant e_{2n-1}^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \leqslant \frac{1}{\pi} \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k), \tag{14}$$

а якщо $\cos(\beta\pi/2) = 0$, то для довільного $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{60\pi}\left(1 - \frac{1}{\underline{\alpha}_1(g)}\right)\psi(n) n \leqslant e_{2n}^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \leqslant e_{2n-1}^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \leqslant \left(1 + \frac{2}{\pi}\right)\psi(n) n. \tag{15}$$

Теорема 3. *Нехай $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді якщо функція $g(t) = \psi(t) t$ така, що $g \in \mathfrak{M}_0$, то*

$$e_n^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \asymp \begin{cases} \sum\limits_{k=n}^{\infty} \psi(k), & \cos\dfrac{\beta\pi}{2} \neq 0, \\ \psi(n) n, & \cos\dfrac{\beta\pi}{2} = 0, \end{cases} \tag{16}$$

якщо ж $g \in \mathfrak{M}_C$, то

$$e_n^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,1})_{\infty} \asymp \psi(n) n. \tag{17}$$

Поклавши в теоремі 3 $\psi(t) = t^{-r}$, $r > 1$, отримаємо таке твердження.

Наслідок 2. *Нехай $r > 1$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді*

$$e_n^{\perp}(W^{r}_{\beta,1})_{\infty} \asymp n^{-r+1}.$$

Зауважимо, що коли $g \in \mathfrak{M}_0$, $g(t) = \psi(t)t$ і

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(g;t) = \infty, \tag{18}$$

то в цьому випадку виконується оцінка

$$\psi(n)n = o\left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k)\right), \qquad n \to \infty.$$

Прикладом функцій $\psi(t)$, які задовольняють умови теореми 3 і для яких виконується умова (18), є функції виду $\psi(t) = t^{-1}\ln^{-\gamma}(t+K)$, $\gamma > 1$, $K > 0$. Для них, згідно з (18), при $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ справедливі порядкові оцінки

$$e_n^{\perp}(L_{\beta,1}^{\psi})_\infty \asymp \begin{cases} \psi(n)n\ln n, & \cos\dfrac{\beta\pi}{2} \neq 0, \\ \psi(n)n, & \cos\dfrac{\beta\pi}{2} = 0. \end{cases}$$

Зауважимо, що для знаходження оцінок зверху найкращих ортогональних тригонометричних наближень вигляду (6) в теоремах 1–3 були використані нерівності

$$e_{2n-1}^{\perp}(L_{\beta,p}^{\psi})_s \leqslant \mathcal{E}_n(L_{\beta,p}^{\psi})_s, \qquad 1 \leqslant p,s \leqslant \infty,$$

де

$$\mathcal{E}_n(L_{\beta,p}^{\psi})_s := \sup_{f \in L_{\beta,p}^{\psi}} \left\| f(\cdot) - \sum_{k=-n+1}^{n-1} \widehat{f}(k)e^{ikx} \right\|_s, \qquad 1 \leqslant p,s \leqslant \infty. \tag{19}$$

Точні порядки величин $\mathcal{E}_n(L_{\beta,p}^{\psi})_\infty$ і $\mathcal{E}_n(L_{\beta,1}^{\psi})_{p'}$ при $1 \leqslant p < \infty$ було знайдено в роботах [12–14].

Цитована література

1. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч., Ч. I. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – 427 с. – (Праці Інституту математики НАН України; Т. 40).
2. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – Москва: Мир, 1965. – Т. 2. – 538 с.
3. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – Москва: Наука, 1987. – 424 с.
4. *Белинский Э. С.* Приближение “плавающей” системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. – Ярославль: Ярослав. ун-т, 1988. – С. 16–33.
5. *Романюк А. С.* Приближение классов периодических функций многих переменных // Мат. заметки. – 2002. – **71**, № 1. – P. 109–121.
6. *Романюк А. С.* Наилучшие тригонометрические приближения классов периодических функций многих переменных в равномерной метрике // Мат. заметки. – 2007. – **81**, № 2. – С. 247–261.
7. *Романюк А. С.* Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2012. – 352 с. – (Праці Інституту математики НАН України; Т. 93).
8. *Шкапа В. В.* Найкращі ортогональні тригонометричні наближення функцій із класів $L_{\beta,1}^{\psi}$ // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, № 3. – С. 315–329.

9. *Шкапа В. В.* Оцінки найкращих M-членних та ортогональних тригонометричних наближень функцій із класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у рівномірній метриці // Диференціальні рівняння та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, № 2. – С. 305–317.
10. *Федоренко О. С.* Про найкращі m-членні тригонометричні та ортогональні тригонометричні наближення функцій класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 12. – С. 1719–1721.
11. *Федоренко О. С.* Наближення (ψ, β)-диференційовних функцій тригонометричними поліномами: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук / Ін-т математики НАН України. – Київ, 2001. – 16 с.
12. *Грабова У. З., Сердюк А. С.* Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів (ψ, β)-диференційовних функцій // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 9. – С. 1186–1197.
13. *Сердюк А. С., Степанюк Т. А.* Порядкові оцінки найкращих наближень та наближень сумами Фур'є в рівномірній метриці класів згорток періодичних функцій невеликої гладкості // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 12. – С. 1658–1675.
14. *Степанюк Т. А.* Оцінки найкращих наближень та наближень сумами Фур'є класів згорток періодичних функцій невеликої гладкості в інтегральних метриках // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, № 3. – С. 241–269.

References

1. *Stepanets A. I.* Methods of approximation theory. I, Pratsi Instytutu Matematyky NAN Ukrainy. Matematyka ta ii Zastosuvannya, Vol. 40, Kyiv: Instytut Matematyky NAN Ukrainy, 2002 (in Russian).
2. *Zygmund A.* Trigonometric Series, Vol. 2, Moscow: Mir, 1965 (in Russian).
3. *Korneichuk N. P.* Exact constants in approximation theory, Moscow: Nauka, 1987 (in Russian).
4. *Belinsky E. S.* Approximation by a "floating" system of exponents on the classes of periodic functions with bounded mixed derivative, Issled. po teorii func. mnog. vesch. perem., Jaroslavl': Jaroslav. un–t, 1988: 16–33 (in Russian).
5. *Romanyuk A. S.* Math. Notes, 2002, **71**, No 1: 98–109.
6. *Romanyuk A. S.* Math. Notes, 2007, **82**, No 2: 216–228.
7. *Romanyuk A.S.* Approximation characteristics of classes of periodic functions of several variables, Pratsi Instytutu Matematyky NAN Ukrainy. Matematyka ta ii Zastosuvannya, Vol. 93, Kyiv: Instytut Matematyky NAN Ukrainy, 2012 (in Russian).
8. *Shkapa V. V.* Zb. Pr. Instytutu Matematyky NAN Ukrainy, 2014, **11**, No 3: 315–329 (in Ukrainian).
9. *Shkapa V. V.* Zb. Pr. Instytutu Matematyky NAN Ukrainy, 2014, **11**, No 2: 305–317 (in Ukrainian).
10. *Fedorenko A. S.* Ukr. Math. J., 1999, **51**, No 12: 1945–1949.
11. *Fedorenko O. S.* Approximation of (ψ, β)-differentiable functions by trigonometric polynomials: Autoref. diss. ... cand. phys.-math. sciences, Kyiv: Insitute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2001 (in Ukrainian).
12. *Hrabova U. Z., Serdyuk A. S.* Ukr. Mat. J., 2013, **65**, No 9: 1319–1331.
13. *Serdyuk A. S., Stepaniuk T. A.* Ukr. Math. J., 2014, **66**, No 12: 1658–1675 (in Ukrainian).
14. *Stepanyuk T. A.* Zb. Pr. Instytutu Matematyky NAN Ukrainy, 2014, **11**, No 3: 241–269 (in Ukrainian).

Інститут математики НАН України, Київ
Східноєвропейський національний університет
ім. Лесі Українки, Луцьк

Надійшло до редакції 04.03.2015

А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк

Оценки наилучших ортогональных тригонометрических приближений классов сверток периодических функций небольшой гладкости

Институт математики НАН Украины, Киев
Восточноевропейский национальный университет им. Леси Украинки, Луцк

Получены порядковые оценки для наилучших равномерных ортогональных тригонометрических приближений на классах 2π-периодических функций таких, что их (ψ,β)-производные принадлежат единичным шарам пространств L_p, $1 \leqslant p < \infty$, в случае, когда последовательность ψ такая, что произведение $\psi(n)n^{1/p}$ может стремиться к нулю медленнее, чем любая степенная функция, и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2} < \infty$ при $1 < p < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$ или $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k) < \infty$ при $p = 1$. Аналогичные оценки получены для приближений в $L_{p'}$-метриках классов (ψ,β)-дифференцируемых функций таких, что $\|f_\beta^\psi\|_1 \leqslant 1$.

Ключевые слова: наилучшие ортогональные тригонометрические приближения, классы сверток, классы (ψ,β)-дифференцируемых функций.

A. S. Serdyuk, T. A. Stepaniuk

Estimates of the best orthogonal trigonometric approximations of the classes of convolutions of periodic functions of not high smoothness

Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev
Lesya Ukrainka Eastern European National University, Lutsk

We obtain order estimates for the best uniform orthogonal trigonometric approximations of 2π-periodic functions, whose (ψ,β)-derivatives belong to unit balls of spaces L_p, $1 \leqslant p < \infty$, in the case where a consequence $\psi(k)$ is such that the product $\psi(n)n^{1/p}$ can tend to zero slower than any power function, and $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi^{p'}(k)k^{p'-2} < \infty$, when $1 < p < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$ or $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k) < \infty$, when $p = 1$. We establish the analogous estimates in the $L_{p'}$-metric for the classes of summable (ψ,β)-differentiable functions such that $\|f_\beta^\psi\|_1 \leqslant 1$.

Keywords: best orthogonal trigonometric approximations, classes of convolutions, classes of (ψ,β)-differentiable functions.