Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

7 • 2015

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9:519.46

Т. А. Баранник

Класифікація галілеєво-інваріантних систем нелінійних рівнянь реакції-дифузії

(Представлено членом-кореспондентом НАН України А. Г. Нікітіним)

Наведено повний опис галілеєво-інваріантних систем нелінійних рівнянь реакції-дифузії у випадку, коли корені характеристичного рівняння матриці дифузії є дійсними числами.

Ключові слова: рівняння реакції-дифузії, перетворення Галілея, симетрія.

1. Принцип відносності Галілея є одним із фундаментальних постулатів, який повинні задовольняти фізичні, хімічні, біологічні та інші системи. Математичною мовою це означає, що математичні моделі цих систем повинні бути інваріантними відносно груп Галілея. У даній роботі пропонується опис систем нелінійних рівнянь реакції-дифузії, інваріантних відносно груп Галілея, які мають вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(u), \tag{1}$$

де u = стовпець$(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ є вектор-функцією від t, $x_1, \ldots, x_m$, $f(u)$ = стовпець $(f^1, f^2, \ldots, f^n)$ є вектор-функцією від u, A — невироджена квадратна матриця порядку n. Такі системи знаходять широке застосування в теорії тепломасоперенесення, а також в математичній біології та хімії. Тому симетрійний аналіз системи рівнянь (1) має прикладне значення і може бути використаний, наприклад, для побудови точних розв'язків широкого класу фізичних і біологічних систем. Перша спроба класифікувати систему (1) у випадку $n = 2$ належить Ю. А. Данілову [1], який обмежився випадком діагональної матриці A. Дослідження ліївських симетрій системи (1) для $n = 2$ з діагональною матрицею A було проведено в роботах [2–4], а з матрицею дифузії A загального вигляду — у роботах [5, 6]. Завершеного вигляду ця класифікація досягла в роботі [7]. А. Г. Нікітін і Р. Вільтшире [5, 6] запропонували ефективний підхід до дослідження класичної і умовної симетрій, який може бути застосований до рівняння (1) з довільними n і m.

2. За допомогою методу С. Лі неважко переконатися, що система рівнянь (1) інваріантна відносно операторів Галілея

$$G_a = t\frac{\partial}{\partial x_a} + x_a \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} u^j \frac{\partial}{\partial u^i} \tag{2}$$

тоді і тільки тоді, коли $B = (b_{ij}) = -1/2\, A^{-1}$, а функція $f(u)$ задовольняє систему рівнянь

$$(A^{-1})^{kb} f^b = (A^{-1})^{ab} u^b \frac{\partial f^k}{\partial u_a}. \tag{3}$$

Отже, класифікація систем (1), інваріантних відносно перетворень Галілея, зводиться до знаходження розв'язків системи рівнянь (3). Характер розв'язків системи (3) суттєво залежить від типу матриці A^{-1}. З точністю до перетворень подібності матриця A^{-1} може бути зведена до однієї з трьох канонічних форм залежно від значень коренів характеристичного рівняння [8, с. 171–178].

a) Корені характеристичного рівняння матриці A^{-1} дійсні. Матриця A^{-1} в цьому випадку подібна до матриці

$$J_{m_1,\lambda_1} \dot{+} \cdots \dot{+} J_{m_s,\lambda_s} = \begin{pmatrix} J_{m_1,\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_s,\lambda_s} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

де J_{m_i,λ_i} є кліткою Жордана порядку m_i для $i = 1, 2, \ldots, s$:

$$J_{m_i,\lambda_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \ldots & \ldots \\ 1 & \lambda_i & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

b) Корені характеристичного рівняння матриці A^{-1} комплексні. Матриця A^{-1} в цьому випадку подібна до матриці

$$J^{m_1}_{b_1,d_1} \dot{+} \cdots \dot{+} J^{m_k}_{b_k,d_k}, \qquad d_i \neq 0 \qquad \text{для} \qquad i = 1, 2, \ldots, k,$$

де $J^m_{b,d}$ — узагальнена клітка Жордана, тобто матриця порядку $2m$ такого вигляду:

$$J^m_{b,d} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} b & -d \\ d & b \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & & & O \\ & \boxed{\begin{matrix} b & -d \\ d & b \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & & \\ & & & \ddots & \\ & O & & & \boxed{\begin{matrix} b & -d \\ d & b \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

У випадку $m_i = 1$ для $i = 1, 2, \ldots, k$ матриця A^{-1} подібна до матриці

$$J^1_{b_1,d_1} \dot{+} \cdots \dot{+} J^1_{b_k,d_k}. \tag{5}$$

c) Характеристичне рівняння матриці A^{-1} має s дійсних коренів і t комплексних коренів з врахуванням їх кратності. Матриця A^{-1} в даному випадку подібна до матриці

$$J_{m_1,\lambda_1} \dotplus \cdots \dotplus J_{m_k,\lambda_k} \dotplus J^{n_1}_{b_1,d_1} \dotplus \cdots \dotplus J^{n_l}_{b_l,d_l},$$

де $m_1 + \cdots + m_k = s$, $2n_1 + \cdots + 2n_l = t$. Зокрема, якщо $n_1 = \cdots = n_l = 1$, то матриця A^{-1} подібна до матриці

$$J_{m_1,\lambda_1} \dotplus \cdots \dotplus J_{m_k,\lambda_k} \dotplus J^{1}_{b_1,d_1} \dotplus \cdots \dotplus J^{1}_{b_l,d_l}. \tag{6}$$

3. Опис систем рівнянь (1), які допускають перетворення Галілея, зводиться до інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь (3). Далі наведено розв'язки цієї системи для випадків, коли матриця A^{-1} має вигляд (4), (5), (6).

Нехай матриця A^{-1} є кліткою Жордана $J_{n,\lambda}$. Для визначення всіх можливих нелінійних форм компонент вектор-функції $f(u)$ введемо нову змінну τ, яка визначається із співвідношення

$$\frac{\partial u_a}{\partial \tau} = (A^{-1})^{ab} u_b. \tag{7}$$

Лема. *Першими інтегралами системи* (7) *є функції*

$$C_k = \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \frac{1}{\lambda^p p!} \frac{u_{k+1-p}}{u_1} \ln^p u_1, \qquad k = 1, \ldots, n-1. \tag{8}$$

Теорема 1. *Якщо матриця A^{-1} є кліткою Жордана $J_{n,\lambda}$, то загальний розв'язок системи* (3) *утворюють функції*

$$f_k = u_1 \sum_{p=0}^{k-1} \frac{1}{\lambda^p p!} \varphi_{k-p} \ln^p u_1, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ є довільними функціями від перших інтегралів (8) *системи рівнянь* (7).

Доведення. Введемо нову змінну τ, яка визначається системою (7). Використовуючи змінну τ, рівняння (3) запишемо у вигляді

$$\frac{\partial f_a}{\partial \tau} = (A^{-1})^{ab} f_b. \tag{10}$$

Проінтегрувавши ситему (10), знаходимо її загальний розв'язок

$$f_k = e^{\lambda\tau} \sum_{p=0}^{k-1} \widetilde{C}_{k-p} \frac{\tau^p}{p!}, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

де $\widetilde{C}_1, \ldots, \widetilde{C}_n$ — довільні сталі. Враховуючи, що $u_1 = e^{\lambda\tau}$, отримуємо на підставі леми загальний розв'язок системи рівнянь (3), який визначається формулами (9). Теорема доведена.

У теоремах, що сформульовані нижче, для компактного запису компонент вектор-функції $f =$ стовпець $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ і $u =$ стовпець $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ використано такі позначення:

$$f^{(1)}_k = f_k \qquad \text{для} \qquad k = 1, \ldots, m_1;$$

$$f_k^{(i)} = f_{m_1+\cdots+m_{i-1}+k} \qquad \text{для} \qquad k = 1, \ldots, m_i, \qquad \text{якщо} \qquad i > 1;$$

$$u_k^{(1)} = u_k \qquad \text{для} \qquad k = 1, \ldots, m_1;$$

$$u_k^{(i)} = u_{m_1+\cdots+m_{i-1}+k} \qquad \text{для} \qquad k = 1, \ldots, m_i, \qquad \text{якщо} \qquad i > 1.$$

Теорема 2. *Нехай обернена матриця дифузії* A^{-1} *має вигляд* (4). *Відповідна система рівнянь реакції-дифузії* (1) *інваріантна відносно перетворень Галілея, якщо нелінійності* $f^1,\ f^2, \ldots, f^n$ *мають такий вигляд:*

$$f_k^{(i)} = u_1^{(i)} \sum_{p=0}^{k-1} \frac{1}{\lambda_i^p p!} \varphi_{k-p}^{(i)} \ln^p u_1^{(i)}, \qquad k = 1, \ldots, m_i, \qquad i = 1, \ldots, s, \tag{11}$$

де $\varphi_1^{(i)}, \ldots, \varphi_{m_i}^{(i)}$ *є довільними функціями від*

$$\sum_{p=0}^{k} (-1)^p \frac{1}{\lambda_i^p p!} \frac{u_{k+1-p}^{(i)}}{u_1^{(i)}} \ln^p u_1^{(i)}, \qquad k = 1, \ldots, m_i - 1, \qquad i = 1, \ldots, s;$$

$$[u_1^{(j)}]^{\lambda_1} [u_1^{(1)}]^{-\lambda_j}, \qquad j = 2, \ldots, s.$$

Теорема 3. *Нехай обернена матриця дифузії* A^{-1} *має вигляд* (5). *Відповідна система рівнянь реакції-дифузії* (1) *інваріантна відносно перетворень Галілея, якщо нелінійності* $f^1, f^2, \ldots, f^n$ *мають такий вигляд:*

$$f_1^{(i)} = \varphi_1^{(i)} u_2^{(i)} + \varphi_2^{(i)} u_1^{(i)},$$

$$f_2^{(i)} = -\varphi_1^{(i)} u_1^{(i)} + \varphi_2^{(i)} u_2^{(i)}, \qquad i = 1, \ldots, k,$$

де $\varphi_1^{(i)}$ *і* $\varphi_2^{(i)}$ *є довільними функціями від*

$$R_i \exp\left(-\frac{b_i}{d_i} \arctan \frac{u_2^{(i)}}{u_1^{(i)}}\right), \qquad R_1^{b_j} R_j^{-b_1}, \qquad j = 2, \ldots, k, \qquad \text{де} \qquad R_i^2 = [u_1^{(i)}]^2 + [u_2^{(i)}]^2.$$

Теорема 4. *Нехай обернена матриця дифузії* A^{-1} *має вигляд* (6). *Відповідна система рівнянь реакції-дифузії* (1) *інваріантна відносно перетворень Галілея, якщо нелінійності* $f^1,\ f^2, \ldots, f^n$ *мають такий вигляд:*

$$f_k^{(i)} = u_1^{(i)} \sum_{p=0}^{k-1} \frac{1}{\lambda_i^p p!} \varphi_{k-p}^{(i)} \ln^p u_1^{(i)}, \qquad k = 1, \ldots, m_i; \qquad i = 1, \ldots, r;$$

$$f_1^{(j)} = \varphi_1^{(j)} u_2^{(j)} + \varphi_2^{(j)} u_1^{(j)},$$

$$f_2^{(j)} = -\varphi_1^{(j)} u_1^{(j)} + \varphi_2^{(j)} u_2^{(j)}, \qquad j = r+1, \ldots, r+l,$$

де $\varphi_1^{(i)}, \ldots, \varphi_{m_i}^{(i)},\ \varphi_1^{(j)},\ \varphi_2^{(j)}$ *є довільними функціями від*

$$\sum_{p=0}^{k} (-1)^p \frac{1}{\lambda_i^p p!} \frac{u_{k+1-p}^{(i)}}{u_1^{(i)}} \ln^p u_1^{(i)}, \qquad k = 1, \ldots, m_i; \qquad i = 1, \ldots, r;$$

$$R_j \exp\left(-\frac{b_{j-r}}{d_{j-r}} \arctan \frac{u_2^{(j)}}{u_1^{(j)}}\right), \qquad R_{r+1}^{b_1} R_{j'}^{-b_{j'-r}}, \qquad j' = r+2, \ldots, r+l,$$

$$\frac{[u_1^{(r+1)}]^2 + [u_2^{(r+1)}]^2}{[u_1^{(1)}]^{\frac{2b_1}{\lambda_1}}}, \qquad R_j^2 = [u_1^{(j)}]^2 + [u_2^{(j)}]^2.$$

Цитована література

1. *Данилов Ю. А.* Групповой анализ системы Тьюринга и ее аналогов. – Москва, 1980. – 11 с. – (Препр. / АН СССР. Ин-т атомной энергии им. И. В. Курчатова; 3287/1).
2. *Cherniha R., King J. R.* Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems: I // J. Phys. A: Math. Gen. – 2000. – **33**. – P. 267–282.
3. *Cherniha R., King J. R.* Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems: I. Addendum // J. Phys. A: Math. Gen. – 2000. – **33**. – P. 7839–7841.
4. *Cherniha R., King J. R.* Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems: II // J. Phys. A: Math. Gen. – 2002. – **36**. – P. 405–425.
5. *Nikitin A. G., Wiltshire R. J.* Symmetries of systems of nonlinear reaction-diffusion equations // Proc. Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine. – 2000. – **30**, Pt. 1. – P. 47–59.
6. *Nikitin A. G., Wiltshire R. J.* Systems of reaction-diffusion equations and their symmetry properties // J. Math. Phys. – 2001. – **42**, No 4. – P. 1667–1688.
7. *Nikitin A. G.* Group classification of systems of nonlinear reaction-diffusion equations // Укр. мат. вісник. – 2005. – **2**, No 1. – P. 149–200.
8. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. – Москва: Наука, 1970. – 402 с.

References

1. *Danilov Yu. A.* Group analysis of the Turing systems and of its analogues. Preprint, Kurchatov Institute of Atomic Energy, IAE–3287/1, Moscow, 1980 (in Russian).
2. *Cherniha R., King J. R.* J. Phys. A: Math. Gen., 2000, **33**: 267–282.
3. *Cherniha R., King J. R.* J. Phys. A: Math. Gen., 2000, **33**: 7839–7841.
4. *Cherniha R., King J. R.* J. Phys. A: Math. Gen., 2002, **36**: 405–425.
5. *Nikitin A. G., Wiltshire R.* Proceeding of Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, 2000, **30**, Pt. 1: 47–59.
6. *Nikitin A. G., Wiltshire R. J.* J. Math. Phys., 2001, **42**, No 4: 1667–1688.
7. *Nikitin A. G.* Ukr. math. visnyk, 2005, **2**, No 1: 149–200.
8. *Malcev A. I.* Foundations of linear algebra, Moscow: Nauka, 1970 (in Russian).

Полтавський національний педагогічний університет ім. В. Г. Короленка

Надійшло до редакції 23.02.2015

Т. А. Баранник

Классификация галилеево-инвариантных систем нелинейных уравнений реакции-диффузии

Полтавский национальный педагогический университет им. В. Г. Короленко

Приведено полное описание галилеево-инвариантных систем нелинейных уравнений реакции-диффузии в случае, когда корни характеристического уравнения матрицы диффузии являются действительными числами.

Ключевые слова: уравнение реакции-диффузии, преобразование Галилея, симметрия.

T. A. Barannyk

The classification of the Galilei-invariant systems of nonlinear reaction-diffusion equations

V. G. Korolenko Poltava National Pedagogical University

The full description of the Galilei-invariant systems of nonlinear reaction-diffusion equations is presented in the case where the roots of the characteristic equation of the diffusion matrix are real numbers.

Keywords: reaction-diffusion equation, Galilei transformation, symmetry.