УДК 539.3

Член-корреспондент НАН Украины **Л. П. Хорошун**

# Плоская задача об образовании шейки в пластине с трещиной

*Даны постановка и решение нелинейной задачи об образовании шейки при растяжении пластины с трещиной для кусочно-линейной диаграммы деформирования материала. Применением преобразования Фурье и дискретизации уравнений задача сведена к системе нелинейных алгебраических уравнений. Исследовано влияние нелинейности на распределение глубины шейки и раскрытие трещины возле ее вершины.*

***Ключевые слова:*** диаграмма деформирования, трещина, нелинейная задача, шейка, дискретизация, глубина шейки, раскрытие трещины.

**Исходные уравнения.** Будем исходить из физически нелинейного закона деформирования материала, описываемого соответственно линейными и нелинейными зависимостями между объемными и девиаторными частями напряжений и деформаций

$$\sigma_{rr} = 3K\varepsilon_{rr}, \qquad \sigma'_{ij} = 2\mu(J_\varepsilon)\varepsilon'_{ij}, \qquad J_\varepsilon = (\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij})^{1/2} \qquad (i,j,r = 1,2,3), \tag{1}$$

откуда следуют соотношения

$$\sigma_{ij} = 2\mu(J_\varepsilon)\left(\frac{\nu(J_\varepsilon)}{1-2\nu(J_\varepsilon)}\varepsilon_{rr}\delta_{ij} + \varepsilon_{ij}\right), \qquad \nu(J_\varepsilon) = \frac{3K - 2\mu(J_\varepsilon)}{6K + 2\mu(J_\varepsilon)} \qquad (i,j,r = 1,2,3), \tag{2}$$

где $K$, $\mu$, $\nu$ — соответственно модули объемной деформации, сдвига и коэффициент Пуассона.

Примем, что модуль сдвига определяется функцией

$$\mu(J_\varepsilon) = \begin{cases} \mu_0, & J_\varepsilon < \dfrac{k}{2\mu_0}, \\ \mu' + \left(1 - \dfrac{\mu'}{\mu_0}\right)\dfrac{k}{2J_\varepsilon}, & J_\varepsilon \geqslant \dfrac{k}{2\mu_0}, \end{cases} \tag{3}$$

где $\mu_0$, $\mu'$, $k = \sigma_0\sqrt{2/3}$ — постоянные; $\sigma_0$ — предел текучести материала. Для одноосной деформации при $\mu' > 0$, $\mu' = 0$, $\mu' < 0$ имеет место соответственно линейное упрочнение, идеальное упруго-пластическое деформирование, линейный ниспадающий участок диаграммы деформирования.

Если ввести замену

$$\overline{\sigma}_{ij} = \frac{1}{k\overline{\mu}}\sigma_{ij}, \qquad \overline{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}, \tag{4}$$

то соотношения (2) примут вид

$$\overline{\sigma}_{ij} = 2\overline{\mu}_0\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{rr}\delta_{ij} + \varepsilon_{ij}\right), \qquad \overline{\mu}_0 = \frac{\mu_0}{k} \qquad (i,j,r = 1,2,3). \tag{5}$$

Полагая в (5) соответственно $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$ и $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$, находим выражения инварианта $J_\varepsilon$ для плоского деформированного состояния

$$J_\varepsilon = \frac{1}{2\overline{\mu}_0} J_{\overline{\sigma}}, \qquad J_{\overline{\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,[(1-\nu+\nu^2)(\overline{\sigma}_{11}+\overline{\sigma}_{22})^2 - 3(\overline{\sigma}_{11}\overline{\sigma}_{22} - \overline{\sigma}_{12}^2)]^{1/2} \tag{6}$$

и для плоского напряженного состояния

$$J_\varepsilon = \frac{1}{2\overline{\mu}_0} J_{\overline{\sigma}}, \qquad J_{\overline{\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{3}}(\overline{\sigma}_{11}^2 + \overline{\sigma}_{22}^2 - \overline{\sigma}_{11}\overline{\sigma}_{22} + 3\overline{\sigma}_{12}^2)^{1/2}. \tag{7}$$

При этом безразмерный модуль сдвига $\overline{\mu}$, согласно (3), (4), (6), (7), определяется формулой

$$\overline{\mu}(J_{\overline{\sigma}}) = 1 - \gamma(J_{\overline{\sigma}}); \qquad \gamma(J_{\overline{\sigma}}) = \begin{cases} 0, & J_{\overline{\sigma}} < 1; \\ (1-\overline{\mu}')\left(1 - \dfrac{1}{J_{\overline{\sigma}}}\right), & J_{\overline{\sigma}} \geqslant 1; \end{cases} \qquad \left(\overline{\mu}' = \frac{\mu'}{\mu_0}\right). \tag{8}$$

Из соотношений (5) следуют выражения для деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\overline{\mu}_0}(\overline{\sigma}_{ij} - \widehat{\nu}\overline{\sigma}_{rr}\delta_{ij}) \qquad (i,j,r = 1,2), \tag{9}$$

где $\widehat{\nu} = \nu$ для плоского деформированного и $\widehat{\nu} = \nu/(1+\nu)$ — для плоского напряженного состояний. Согласно (2)–(4), (8), коэффициент $\widehat{\nu}$ можно представить в виде суммы $\widehat{\nu} = \widehat{\nu}_0 + \widehat{\nu}_1$, где

$$\widehat{\nu} = \frac{\nu_0}{1+\nu_0}, \qquad \widehat{\nu}_1 = \frac{2}{3}\delta\gamma(J_{\overline{\sigma}}), \qquad \nu_0 = \frac{3K - 2\mu_0}{6K + 2\mu_0}, \qquad \delta = \frac{1-2\nu_0}{2(1+\nu_0)} \tag{10}$$

для плоского напряженного состояния и

$$\widehat{\nu}_0 = \nu_0, \qquad \widehat{\nu}_1 = \frac{3\delta\gamma(J_{\overline{\sigma}})}{2(1+\delta)[1+\delta+\delta\gamma(J_{\overline{\sigma}})]} \tag{11}$$

для плоского деформированного состояния.

В случае плоского напряженного состояния, имеющего место в тонкой пластине под воздействием сил в ее плоскости, в зоне больших напряжений растяжения, превышающих предел текучести, могут появляться остаточные деформации $\varepsilon_{33}$, обусловленные эффектом Пуассона, приводящие к образованию шейки. Для описания этого явления необходимо вышеприведенные уравнения состояния дополнить дифференциальными уравнениями равновесия относительно усилий $s_{ij}$, действующих в плоскости $x_1x_2$ на пластину

$$s_{ij,j} = 0; \qquad s_{ij,j} = 2h\sigma_{ij} \qquad (i,j = 1,2), \tag{12}$$

где $2h$ — толщина пластины, зависящая от напряжений, которая, согласно (5), (10), определяется через исходную постоянную толщину $2h_0$ и напряжения соотношениями

$$2h = 2h_0(1+\varepsilon_{33}), \qquad \varepsilon_{33} = -(\widehat{\nu}_0 + \widehat{\nu}_1)\frac{\overline{\sigma}_{11}+\overline{\sigma}_{22}}{2\overline{\mu}_0}. \tag{13}$$

С учетом (4) уравнения равновесия (12) приводятся к виду

$$\overline{\sigma}_{ij,j} + \overline{f}_i = 0, \qquad \overline{f}_i = \frac{1}{h\overline{\mu}}(h\overline{\mu})_{,j}\overline{\sigma}_{ij} \qquad (i,j = 1,2). \tag{14}$$

Подставляя (9) в уравнение совместности деформаций

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12}, \tag{15}$$

приходим к уравнению совместности относительно модифицированных напряжений

$$\begin{aligned} &[(1-\widehat{\nu}_0)\overline{\sigma}_{11} - \widehat{\nu}_0\overline{\sigma}_{22}]_{,22} + [(1-\widehat{\nu}_0)\overline{\sigma}_{22} - \widehat{\nu}_0\overline{\sigma}_{11}]_{,11} - \overline{f}_{3,rr} = 2\overline{\sigma}_{12,12}, \\ &\overline{f}_3 = \widehat{\nu}_1\overline{\sigma}_{rr} \qquad (r = 1, 2). \end{aligned} \tag{16}$$

Решение однородных дифференциальных уравнений (14), (16) определяется через функцию напряжений

$$\overline{\sigma}^0_{11} = \varphi_{,22}; \qquad \overline{\sigma}^0_{22} = \varphi_{,11}; \qquad \overline{\sigma}^0_{12} = -\varphi_{,12}, \tag{17}$$

удовлетворяющую бигармоническому уравнению

$$\varphi_{,iijj} = 0 \qquad (i, j = 1, 2). \tag{18}$$

Частное решение неоднородных уравнений (14), (16), которое можно построить методом преобразований Фурье для бесконечной области [1], представляется через интегралы по области $D$ тела

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}^*_{11} = &-\frac{1}{4\pi(1-\widehat{\nu}_0)}\int\limits_D \frac{(x_i-\xi_j)\overline{f}_j(\xi_r)}{(x_i-\xi_i)(x_i-\xi_i)}\,d\xi_1 d\xi_2 - \\ &- \frac{1}{2\pi}\int\limits_D \frac{(x_1-\xi_1)^2-(x_2-\xi_2)^2}{[(x_i-\xi_i)(x_i-\xi_i)]^2}(x_j-\xi_j)\overline{f}_j(\xi_r)\,d\xi_1 d\xi_2 - \\ &- \frac{1-2\widehat{\nu}_0}{2\pi(1-\widehat{\nu}_0)}\int\limits_D \frac{(x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2)e_{ij}(x_i-\xi_i)\overline{f}_j(\xi_r)}{[(x_i-\xi_i)(x_i-\xi_i)]^2}d\xi_1 d\xi_2 + \\ &+ \frac{1}{2\pi(1-\widehat{\nu}_0)}\int\limits_D \frac{(x_1-\xi_1)^2-(x_2-\xi_2)^2}{[(x_i-\xi_i)(x_i-\xi_i)]^2}\overline{f}_3(\xi_r)\,d\xi_1 d\xi_2; \\ \overline{\sigma}^*_{22} = &-\frac{1}{4\pi(1-\widehat{\nu}_0)}\int\limits_D \frac{(x_j-\xi_j)\overline{f}_j(\xi_r)}{(x_i-\xi_i)(x_i-\xi_i)}d\xi_1 d\xi_2 + \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_D \frac{(x_1-\xi_1)^2-(x_2-\xi_2)^2}{[(x_i-\xi_i)(x_i-\xi_i)]^2}(x_j-\xi_j)\overline{f}_j(\xi_r)\,d\xi_1 d\xi_2 + \\ &+ \frac{1-2\widehat{\nu}_0}{2\pi(1-\widehat{\nu}_0)}\int\limits_D \frac{(x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2)}{[(x_i-\xi_i)(x_i-\xi_i)]^2}e_{ij}(x_i-\xi_i)\overline{f}_j(\xi_r)d\xi_1 d\xi_2 - \\ &- \frac{1}{2\pi(1-\widehat{\nu}_0)}\int\limits_D \frac{(x_1-\xi_1)^2-(x_2-\xi_2)^2}{[(x_i-\xi_i)(x_i-\xi_i)]^2}\overline{f}_3(\xi_r)d\xi_1 d\xi_2; \\ \overline{\sigma}^*_{12} = &-\frac{1-2\widehat{\nu}_0}{4\pi(1-\widehat{\nu}_0)}\int\limits_D \frac{(x_1-\xi_1)^2-(x_2-\xi_2)^2}{[(x_i-\xi_i)(x_i-\xi_i)]^2}e_{ij}(x_i-\xi_i)\overline{f}_j(\xi_r)\,d\xi_1 d\xi_2 - \end{aligned} \tag{19}$$

$$
-\frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{(x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2)(x_j-\xi_j)\overline{f}_j(\xi_r)}{[(x_i-\xi_i)(x_i-\xi_i)]^2}d\xi_1 d\xi_2 +
$$

$$
+\frac{1}{\pi(1-\widehat{\nu}_0)}\int\limits_D \frac{(x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2)\overline{f}_3(\xi_r)}{[(x_i-\xi_i)(x_i-\xi_i)]^2}d\xi_1 d\xi_2 \qquad (i,j,r=1,2),
$$

где $e_{11}=e_{22}=0$, $e_{12}=-e_{21}=1$. Постоянные интегрирования определяются из граничных условий для общего решения $\overline{\sigma}_{ij}=\overline{\sigma}_{ij}^0+\overline{\sigma}_{ij}^*$, состоящего из суммы (17), (19). Таким образом приходим к системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений относительно модифицированных напряжений $\overline{\sigma}_{11}$, $\overline{\sigma}_{22}$, $\overline{\sigma}_{12}$.

**Растяжение пластины с трещиной.** Рассмотрим плоское напряженное состояние пластины с внутренней трещиной ($-c\leqslant x\leqslant c, y=0$) при заданной на бесконечности нормальной равномерно распределенной растягивающей нагрузке $p_0$, действующей вдоль оси $y$. Так как распределение напряжений имеет симметрию относительно осей $x$ и $y$, то достаточно ограничиться рассмотрением первого квадранта $D_1$ области тела $D$. При этом необходимо учесть влияние остальных квадрантов $D_2$, $D_3$, $D_4$ при построении частного решения (19). Тогда приходим к соотношениям

$$
\begin{aligned}
\overline{\sigma}_{11}^*(x,y)&=\int\limits_{D_1}\{[P_i(x,y;\xi,\eta)+Q_i(x,y;\xi,\eta)]\overline{f}_i(\xi,\eta)+P_3(x,y;\xi,\eta)\overline{f}_3(\xi,\eta)\}d\xi d\eta;\\
\overline{\sigma}_{22}^*(x,y)&=\int\limits_{D_1}\{[P_i(x,y;\xi,\eta)-Q_i(x,y;\xi,\eta)]\overline{f}_i(\xi,\eta)-P_3(x,y;\xi,\eta)\overline{f}_3(\xi,\eta)\}d\xi d\eta;\\
\overline{\sigma}_{12}^*(x,y)&=\int\limits_{D_1}[S_i(x,y;\xi,\eta)\overline{f}_i(\xi,\eta)+S_3(x,y;\xi,\eta)\overline{f}_3(\xi,\eta)]d\xi d\eta \qquad (i,j=1,2),
\end{aligned} \tag{20}
$$

где функции влияния определяются формулами

$$
P_1(x,y;\xi,\eta)=-\frac{1}{4\pi(1-\widehat{\nu}_0)}\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}-\frac{\alpha_2}{\beta_2}-\frac{\alpha_2}{\beta_3}+\frac{\alpha_1}{\beta_4}\right);
$$

$$
P_2(x,y;\xi,\eta)=-\frac{1}{4\pi(1-\widehat{\nu}_0)}\left(\frac{\alpha_3}{\beta_1}+\frac{\alpha_3}{\beta_2}-\frac{\alpha_4}{\beta_3}-\frac{\alpha_4}{\beta_4}\right);
$$

$$
P_3(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi(1-\widehat{\nu}_0)}\left(\frac{\gamma_1}{\beta_1^2}+\frac{\gamma_2}{\beta_2^2}+\frac{\gamma_3}{\beta_3^2}+\frac{\gamma_4}{\beta_4^2}\right);
$$

$$
Q_1(x,y;\xi,\eta)=-\frac{1-2\widehat{\nu}_0}{2\pi(1-\widehat{\nu}_0)}\left(\frac{\alpha_1\alpha_3^2}{\beta_1^2}-\frac{\alpha_2\alpha_3^2}{\beta_2^2}-\frac{\alpha_2\alpha_4^2}{\beta_3^2}+\frac{\alpha_1\alpha_4^2}{\beta_4^2}\right)-
$$

$$
-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\alpha_1\gamma_1}{\beta_1^2}-\frac{\alpha_2\gamma_2}{\beta_2^2}-\frac{\alpha_2\gamma_3}{\beta_3^2}+\frac{\alpha_1\gamma_4}{\beta_4^2}\right);
$$

$$
Q_2(x,y;\xi,\eta)=-\frac{1-2\widehat{\nu}_0}{2\pi(1-\widehat{\nu}_0)}\left(-\frac{\alpha_1^2\alpha_3}{\beta_1^2}-\frac{\alpha_2^2\alpha_3}{\beta_2^2}+\frac{\alpha_2^2\alpha_4}{\beta_3^2}+\frac{\alpha_1^2\alpha_4}{\beta_4^2}\right)-
$$

$$
-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\alpha_3\gamma_1}{\beta_1^2}+\frac{\alpha_3\gamma_2}{\beta_2^2}-\frac{\alpha_4\gamma_3}{\beta_3^2}-\frac{\alpha_4\gamma_4}{\beta_4^2}\right);
$$

$$S_1(x,y;\xi,\eta) = -\frac{1-2\widehat{\nu}_0}{4\pi(1-\widehat{\nu}_0)}\left(-\frac{\alpha_3\gamma_1}{\beta_1^2} + \frac{\alpha_3\gamma_2}{\beta_2^2} + \frac{\alpha_4\gamma_3}{\beta_3^2} - \frac{\alpha_4\gamma_4}{\beta_4^2}\right) - \tag{21}$$

$$-\frac{1}{\pi}\left(\frac{\alpha_1^2\alpha_3}{\beta_1^2} - \frac{\alpha_2^2\alpha_3}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_2^2\alpha_4}{\beta_3^2} + \frac{\alpha_1^2\alpha_4}{\beta_4^2}\right);$$

$$S_2(x,y;\xi,\eta) = -\frac{1-2\widehat{\nu}_0}{4\pi(1-\widehat{\nu}_0)}\left(\frac{\alpha_1\gamma_1}{\beta_1^2} + \frac{\alpha_2\gamma_2}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_2\gamma_3}{\beta_3^2} - \frac{\alpha_1\gamma_4}{\beta_4^2}\right) -$$

$$-\frac{1}{\pi}\left(\frac{\alpha_1\alpha_3^2}{\beta_1^2} + \frac{\alpha_2\alpha_3^2}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_2\alpha_4^2}{\beta_3^2} - \frac{\alpha_1\alpha_4^2}{\beta_4^2}\right);$$

$$S_3(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{\pi(1-\widehat{\nu}_0)}\left(\frac{\alpha_1\alpha_3}{\beta_1^2} + \frac{\alpha_2\alpha_3}{\beta_2^2} + \frac{\alpha_2\alpha_4}{\beta_3^2} + \frac{\alpha_1\alpha_4}{\beta_4^2}\right);$$

$$\alpha_1 = x-\xi, \qquad \alpha_2 = x+\xi, \qquad \alpha_3 = y-\eta, \qquad \alpha_4 = y+\eta;$$

$$\beta_1 = \alpha_1^2+\alpha_3^2, \qquad \beta_2 = \alpha_2^2+\alpha_3^2, \qquad \beta_3 = \alpha_2^2+\alpha_4^2, \qquad \beta_4 = \alpha_1^2+\alpha_4^2,$$

$$\gamma_1 = \alpha_1^2-\alpha_3^2, \qquad \gamma_2 = \alpha_2^2-\alpha_3^2, \qquad \gamma_3 = \alpha_2^2-\alpha_4^2, \qquad \gamma_4 = \alpha_1^2-\alpha_4^2.$$

Нагрузку $p_0$ принимаем меньшей предела текучести $k$, приводящую к образованию нелинейной зоны лишь в окрестности трещины, так что на бесконечности, согласно (4), (8), выполняются граничные условия $\overline{\sigma}_{22}|_\infty = \overline{p}_0$, $\overline{\sigma}_{11}|_\infty = \overline{\sigma}_{12}|_\infty = 0$, где $\overline{p}_0 = p_0/k$. На оси $y=0$ граничные условия формулируются в виде $\overline{\sigma}_{22}(x,0)=0$ для $|x| \leqslant c$, $u_2(x,0)=0$ для $|x| \geqslant c$, $\overline{\sigma}_{12}(x,0)=0$ для $0 \leqslant |x| < \infty$, где $u_2(x,0)$ — перемещение вдоль оси $y$.

На основе преобразования Фурье [1] решение сформулированной задачи можно представить в виде

$$\overline{\sigma}_{11}(x,y) = \overline{\sigma}_{11}^*(x,y) - \frac{2\mu_0}{\pi(1-\widehat{\nu}_0)k}\int_0^c [R_1(x,y,\eta) - yR_2(x,y,\eta)]u_2(\eta,0)\,d\eta,$$

$$\overline{\sigma}_{22}(x,y) = p_0 + \overline{\sigma}_{22}^*(x,y) - \frac{2\mu_0}{\pi(1-\widehat{\nu}_0)k}\int_0^c [R_1(x,y,\eta) + yR_2(x,y,\eta)]u_2(\eta,0)\,d\eta, \tag{22}$$

$$\overline{\sigma}_{12}(x,y) = \overline{\sigma}_{12}^*(x,y) - \frac{2\mu_0}{\pi(1-\widehat{\nu}_0)k}\int_0^c R_3(x,y,\eta)u_2(\eta,0)\,d\eta,$$

где функция $u_2(\eta,0)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\overline{p}_0 + \overline{\sigma}_{22}^*(x,0) = \frac{2\mu_0}{\pi(1-\widehat{\nu}_0)k}\int_0^c R(x,\eta)u_2(\eta,0)\,d\eta, \qquad 0 \leqslant x \leqslant c, \tag{23}$$

а ядра определяются формулами

$$R(x,\eta) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{x+\eta} - \frac{1}{x-\eta}\right),$$

$$
\begin{aligned}
R_1(x,y,\eta) &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{x+\eta}{(x+\eta)^2+y^2} - \frac{x-\eta}{(x-\eta)^2+y^2}\right],\\
R_2(x,y,\eta) &= \frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\frac{y(x+\eta)}{[(x+\eta)^2+y^2]^2} - \frac{y(x-\eta)}{[(x-\eta)^2+y^2]^2}\right\},\\
R_3(x,y,\eta) &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\frac{(x+\eta)^2-y^2}{[(x+\eta)^2+y^2]^2} - \frac{(x-\eta)^2-y^2}{[(x-\eta)^2+y^2]^2}\right\}
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Если ввести безразмерное перемещение

$$
\overline{u}(\eta,0) = \frac{2\mu_0 u_2(\eta,0)}{\pi(1-\widehat{\nu}_0)kc},
\tag{25}
$$

то соотношения (22) приводятся к виду

$$
\begin{aligned}
\overline{\sigma}_{11}(x,y) &= \overline{\sigma}^*_{11}(x,y) - c\int\limits_0^c [R_1(x,y,\eta) - yR_2(x,y,\eta)]\overline{u}(\eta,0)\,d\eta,\\
\overline{\sigma}_{22}(x,y) &= \overline{p}_0 + \overline{\sigma}^*_{22}(x,y) - c\int\limits_0^c [R_1(x,y,\eta) + yR_2(x,y,\eta)]\overline{u}(\eta,0)\,d\eta,\\
\overline{\sigma}_{12}(x,y) &= \overline{\sigma}^*_{12}(x,y) - cy\int\limits_0^c R_3(x,y,\eta)\overline{u}(\eta,0)\,d\eta,
\end{aligned}
\tag{26}
$$

где функция $\overline{u}(\eta,0)$, как следует из (23), удовлетворяет интегральному уравнению

$$
\overline{p}_o + \overline{\sigma}^*_{22}(x,0) = c\int\limits_0^c R(x,\eta)\overline{u}(\eta,0)\,d\eta, \qquad 0 \leqslant x \leqslant c.
\tag{27}
$$

**Дискретизация задачи.** Решение системы интегро-дифференциальных уравнений (20), (26), (27) можно осуществить только численными методами, для чего необходимо их преобразовать из континуальной в дискретную форму. Для этого разобьем интервал $(0,c)$ на $N$ частей, представив интеграл в (27) суммой

$$
\int\limits_0^c R(x,\eta)\overline{u}(\eta,0)\,d\eta = \sum_{k=1}^N \overline{u}(x_k,0)\int\limits_{x_k-a_k}^{x_k+a_k} R(x,\eta)\,d\eta, \qquad \left(\sum_{k=1}^N 2a_k = c\right).
\tag{28}
$$

Аналогичное разбиение проводим по координате $y$ с шагом $2b_n$. Тогда, вводя безразмерные координаты и величины

$$
\begin{aligned}
&\overline{x}_i = \frac{x_i}{c}; \qquad \overline{y}_j = \frac{y_j}{c}, \qquad \overline{x}_k = \frac{x_k}{c}; \qquad \overline{y}_n = \frac{y_n}{c}; \qquad \overline{a}_k = \frac{a_k}{c}, \qquad \overline{b}_n = \frac{b_n}{c}\\
&(i,j = 0,1,\ldots;\ k,n = 1,2,\ldots)
\end{aligned}
\tag{29}
$$

и принимая равномерное разбиение области $D_1$ с одинаковыми размерами ячеек вдоль обеих осей

$$
\overline{a}_k = \overline{b}_n = a = \frac{1}{2N},
\tag{30}
$$

приведем интегральное уравнение (27) к системе алгебраических уравнений

$$\overline{p}_0+\overline{\sigma}^*_{22}(x_i,0)=\sum_{k=1}^{N} I_{ik}\overline{u}(x_k,0) \qquad (i=1,\ldots,N), \tag{31}$$

а соотношения (24), (26) приводятся к виду

$$\begin{aligned}
&\overline{\sigma}_{11}(x_i,y_j)=\overline{\sigma}^*_{11}(x_i,y_j)-\sum_{k=1}^{N}(I^{(1)}_{ijk}-I^{(2)}_{ijk})\overline{u}(x_k,0);\\
&\overline{\sigma}_{22}(x_i,y_j)=\overline{p}_0+\overline{\sigma}^*_{22}(x_i,y_j)-\sum_{k=1}^{N}(I^{(1)}_{ijk}+I^{(2)}_{ijk})\overline{u}(x_k,0);\\
&\overline{\sigma}_{12}(x_i,y_j)=\overline{\sigma}^*_{12}(x_i,y_j)-\sum_{k=1}^{N}I^{(3)}_{ijk}\overline{u}(x_k,0).
\end{aligned} \tag{32}$$

Здесь матрицы $I_{ik}$, $I^{(1)}_{ijk}$, $I^{(2)}_{ijk}$, $I^{(3)}_{ijk}$ определяются формулами

$$\begin{aligned}
&I_{ik}=-\frac{1}{a}\left[\frac{1}{4(i-k)^2-1}+\frac{1}{4(i+k-1)^2-1}\right],\\
&I^{(1)}_{ijk}=\frac{1}{2a}\left(\frac{s_1}{s_1^2+s_5^2}-\frac{s_2}{s_2^2+s_5^2}+\frac{s_3}{s_3^2+s_5^2}-\frac{s_4}{s_4^2+s_5^2}\right),\\
&I^{(2)}_{ijk}=\frac{s_5^2}{a}\left[\frac{s_1}{(s_1^2+s_5^2)^2}-\frac{s_2}{(s_2^2+s_5^2)^2}+\frac{s_3}{(s_3^2+s_5^2)^2}-\frac{s_4}{(s_4^2+s_5^2}\Big)^2\right],\\
&I^{(3)}_{ijk}=\frac{s_5}{2a}\left[\frac{s_1^2-s_5^2}{(s_1^2+s_5^2)^2}-\frac{s_2^2-s_5^2}{(s_2^2+s_5^2)^2}+\frac{s_3^2-s_5^2}{(s_3^2+s_5^2)^2}-\frac{s_4^2-s_5^2}{(s_4^2+s_5^2)^2}\right];\\
&s_1=2(i+k)-1, \qquad s_2=2(i+k)-3, \qquad s_3=2(i-k)+1,\\
&s_4=2(i-k)-1, \qquad s_5=2j-1 \qquad (i,k=1,\ldots,N).
\end{aligned} \tag{33}$$

Частное решение (20) с учетом (30) принимает вид

$$\begin{aligned}
&\overline{\sigma}^*_{11}(x_i,y_j)=\sum_{k,n=1}^{\infty}\{[\overline{P}_r(i,j;k,n)+\overline{Q}_r(i,j;k,n)]g_r(k,n)+\overline{P}_3(i,j;k,n)g_3(k,n)\};\\
&\overline{\sigma}^*_{22}(x_i,y_j)=\sum_{k,n=1}^{\infty}\{[\overline{P}_r(i,j;k,n)-\overline{Q}_r(i,j;k,n)]g_r(k,n)-\overline{P}_3(i,j;k,n)g_3(k,n)\};\\
&\overline{\sigma}^*_{12}(x_i,y_j)=\sum_{k,n=1}^{\infty}\overline{S}_r(i,j;k,n)g_r(k,n)+\overline{S}_3(i,j;k,n)g_3(k,n) \qquad (r=1,2),
\end{aligned} \tag{34}$$

где приняты обозначения

$$
\begin{aligned}
&\overline{P}_1(i,j;k,n) = -\frac{1}{4\pi(1-\widehat{\nu}_0)}\left(\frac{\overline{\alpha}_1}{\overline{\beta}_1} - \frac{\overline{\alpha}_2}{\overline{\beta}_2} - \frac{\overline{\alpha}_2}{\overline{\beta}_3} + \frac{\overline{\alpha}_1}{\overline{\beta}_4}\right);\\
&\overline{P}_2(i,j;k,n) = -\frac{1}{4\pi(1-\widehat{\nu}_0)}\left(\frac{\overline{\alpha}_3}{\overline{\beta}_1} + \frac{\overline{\alpha}_3}{\overline{\beta}_2} - \frac{\overline{\alpha}_4}{\overline{\beta}_3} - \frac{\overline{\alpha}_4}{\overline{\beta}_4}\right);\\
&\overline{P}_3(i,j;k,n) = \frac{1}{2\pi(1-\widehat{\nu}_0)}\left(\frac{\overline{\gamma}_1}{\overline{\beta}_1^2} + \frac{\overline{\gamma}_2}{\overline{\beta}_2^2} + \frac{\overline{\gamma}_3}{\overline{\beta}_3^2} + \frac{\overline{\gamma}_4}{\overline{\beta}_4^2}\right)\\
&\overline{Q}_1(i,j;k,n) = -\frac{1-2\widehat{\nu}_0}{2\pi(1-\widehat{\nu}_0)}\left(\frac{\overline{\alpha}_1\overline{\alpha}_3^2}{\overline{\beta}_1^2} - \frac{\overline{\alpha}_2\overline{\alpha}_3^2}{\overline{\beta}_2^2} - \frac{\overline{\alpha}_2\overline{\alpha}_4^2}{\overline{\beta}_3^2} + \frac{\overline{\alpha}_1\overline{\alpha}_4^2}{\overline{\beta}_4^2}\right) -\\
&\qquad - \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\overline{\alpha}_1\overline{\gamma}_1}{\overline{\beta}_1^2} - \frac{\overline{\alpha}_2\overline{\gamma}_2}{\overline{\beta}_2^2} - \frac{\overline{\alpha}_2\overline{\gamma}_3}{\overline{\beta}_3^2} + \frac{\overline{\alpha}_1\overline{\gamma}_4}{\overline{\beta}_4^2}\right);\\
&\overline{Q}_2(i,j;k,n) = -\frac{1-2\widehat{\nu}_0}{2\pi(1-\widehat{\nu}_0)}\left(-\frac{\overline{\alpha}_1^2\overline{\alpha}_3}{\overline{\beta}_1^2} - \frac{\overline{\alpha}_2^2\overline{\alpha}_3}{\overline{\beta}_2^2} + \frac{\overline{\alpha}_2^2\overline{\alpha}_4}{\overline{\beta}_3^2} + \frac{\overline{\alpha}_1^2\overline{\alpha}_4}{\overline{\beta}_4^2}\right) -\\
&\qquad - \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\overline{\alpha}_3\overline{\gamma}_1}{\overline{\beta}_1^2} + \frac{\overline{\alpha}_3\overline{\gamma}_2}{\overline{\beta}_2^2} - \frac{\overline{\alpha}_4\overline{\gamma}_3}{\overline{\beta}_3^2} - \frac{\overline{\alpha}_4\overline{\gamma}_4}{\overline{\beta}_4^2}\right);\\
&\overline{S}_1(i,j;k,n) = -\frac{1-2\widehat{\nu}_0}{4\pi(1-\widehat{\nu}_0)}\left(-\frac{\overline{\alpha}_3\overline{\gamma}_1}{\overline{\beta}_1^2} + \frac{\overline{\alpha}_3\overline{\gamma}_2}{\overline{\beta}_2^2} + \frac{\overline{\alpha}_4\overline{\gamma}_3}{\overline{\beta}_3^2} - \frac{\overline{\alpha}_4\overline{\gamma}_4}{\overline{\beta}_4^2}\right) -\\
&\qquad - \frac{1}{\pi}\left(\frac{\overline{\alpha}_1^2\overline{\alpha}_3}{\overline{\beta}_1^2} - \frac{\overline{\alpha}_2^2\overline{\alpha}_3}{\overline{\beta}_2^2} - \frac{\overline{\alpha}_2^2\overline{\alpha}_4}{\overline{\beta}_3^2} + \frac{\overline{\alpha}_1^2\overline{\alpha}_4}{\overline{\beta}_4^2}\right);\\
&\overline{S}_2(i,j;k,n) = -\frac{1-2\widehat{\nu}_0}{4\pi(1-\widehat{\nu}_0)}\left(\frac{\overline{\alpha}_1\overline{\gamma}_1}{\overline{\beta}_1^2} + \frac{\overline{\alpha}_2\overline{\gamma}_2}{\overline{\beta}_2^2} - \frac{\overline{\alpha}_2\overline{\gamma}_3}{\overline{\beta}_3^2} - \frac{\overline{\alpha}_1\overline{\gamma}_4}{\overline{\beta}_4^2}\right) -\\
&\qquad - \frac{1}{\pi}\left(\frac{\overline{\alpha}_1\overline{\alpha}_3^2}{\overline{\beta}_1^2} + \frac{\overline{\alpha}_2\overline{\alpha}_3^2}{\overline{\beta}_2^2} - \frac{\overline{\alpha}_2\overline{\alpha}_4^2}{\overline{\beta}_3^2} - \frac{\overline{\alpha}_1\overline{\alpha}_4^2}{\overline{\beta}_4^2}\right);\\
&\overline{S}_3(i,j;k,n) = \frac{1}{\pi(1-\widehat{\nu}_0)}\left(\frac{\overline{\alpha}_1\overline{\alpha}_3}{\overline{\beta}_1^2} + \frac{\overline{\alpha}_2\overline{\alpha}_3}{\overline{\beta}_2^2} + \frac{\overline{\alpha}_2\overline{\alpha}_4}{\overline{\beta}_3^2} + \frac{\overline{\alpha}_1\overline{\alpha}_4}{\overline{\beta}_4^2}\right);\\
&\overline{\alpha}_1 = i-k, \qquad \overline{\alpha}_2 = i+k-1, \qquad \overline{\alpha}_3 = j-n, \qquad \overline{\alpha}_4 = j+n-1,\\
&\overline{\beta}_1 = \overline{\alpha}_1^2 + \overline{\alpha}_3^2, \qquad \overline{\beta}_2 = \overline{\alpha}_2^2 + \overline{\alpha}_3^2, \qquad \overline{\beta}_3 = \overline{\alpha}_2^2 + \overline{\alpha}_4^2, \qquad \overline{\beta}_4 = \overline{\alpha}_1^2 + \overline{\alpha}_4^2,\\
&\overline{\gamma}_1 = \overline{\alpha}_1^2 - \overline{\alpha}_3^2, \qquad \overline{\gamma}_2 = \overline{\alpha}_2^2 - \overline{\alpha}_3^2, \qquad \overline{\gamma}_3 = \overline{\alpha}_2^2 - \overline{\alpha}_4^2, \qquad \overline{\gamma}_4 = \overline{\alpha}_1^2 - \overline{\alpha}_4^2,\\
&g_r(k,n) = \overline{\sigma}_{r1}(\overline{x}_k,\overline{y}_n)\left[\frac{h(\overline{x}_{k+1},\overline{y}_n)\overline{\mu}(\overline{x}_{k+1},\overline{y}_n)}{h(\overline{x}_k,\overline{y}_n)\overline{\mu}(\overline{x}_k,\overline{y}_n)} - 1\right] +\\
&\qquad + \overline{\sigma}_{r2}(\overline{x}_k,\overline{y}_n)\left[\frac{h(\overline{x}_k,\overline{y}_{n+1})\overline{\mu}(\overline{x}_k,\overline{y}_{n+1})}{h(\overline{x}_k,\overline{y}_n)\overline{\mu}(\overline{x}_k,\overline{y}_n)} - 1\right],\\
&g_3(k,n) = \overline{f}_3(\overline{x}_k,\overline{y}_n) \qquad (r=1,2).
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Таким образом, при равномерном разбиении области $D_1$ на квадратные ячейки задача сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений (31), (32), (34) относительно переменных $\overline{u}(\overline{x}_k,0)$, $\overline{\sigma}_{ij}(\overline{x}_k,\overline{y}_n)$, $\overline{\sigma}^*_{ij}(\overline{x}_k,\overline{y}_n)$, где коэффициенты определяются формулами (33), (35), а безразмерный модуль сдвига $\overline{\mu}$ связан с напряжениями $\overline{\sigma}_{ij}$ зависимостями (7), (8). Полученную систему можно упростить, исключив переменные $\overline{u}(\overline{x}_k,0)$, $\overline{\sigma}^*_{ij}(\overline{x}_k,\overline{y}_n)$. Для этого представим уравнения (31) в виде

$$\overline{u}(\overline{x}_i,0)=\sum_{k=1}^{N} I^{-1}_{ik}[\overline{p}_0+\overline{\sigma}^*_{22}(\overline{x}_k,0)] \qquad (i=1,\ldots,N), \tag{36}$$

где $I^{-1}_{ik}$ — матрица, обратная к $I_{ik}$, и воспользуемся представлением

$$\overline{\sigma}^*_{22}(\overline{x}_i,0)=\sum_{k,n=1}^{\infty}\left\{\left[\overline{P}_r\left(i,\frac{1}{2};k,n\right)-\overline{Q}_r\left(i,\frac{1}{2};k,n\right)\right]\overline{g}_r(k,n)-\overline{P}_3\left(i,\frac{1}{2};k,n\right)\overline{g}_3(k,n)\right\}, \tag{37}$$

вытекающим из (34), (35). Тогда из (32), (34), (36), (37) следует система нелинейных алгебраических уравнений относительно напряжений $\overline{\sigma}_{ij}$

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma}_{11}(\overline{x}_i,\overline{y}_j)&=-\overline{p}_0T_{11}(\overline{x}_i,\overline{y}_j)+\sum_{k,n=1}^{\infty}[\overline{P}_r(i,j;k,n)+\overline{Q}_r(i,j;k,n)-\\
&\quad -E_r(i,j;k,n)]g_r(k,n)+[\overline{P}_3(i,j;k,n)+E_3(i,j;k,n)]g_3(k,n)\};\\
\overline{\sigma}_{22}(\overline{x}_i,\overline{y}_j)&=\overline{p}_0[1-T_{22}(\overline{x}_i,\overline{y}_j)]+\sum_{k,n=1}^{\infty}[\overline{P}_r(i,j;k,n)-\overline{Q}_r(i,j;k,n)-\\
&\quad -L_r(i,j;k,n)]g_r(k,n)+[-\overline{P}_3(i,j;k,n)+L_3(i,j;k,n)]g_3(k,n);\\
\overline{\sigma}_{12}(\overline{x}_i,\overline{y}_j)&=-\overline{p}_0T_{12}(\overline{x}_i,\overline{y}_j)+\sum_{k,n=1}^{\infty}[\overline{S}_r(i,j;k,n)-M_r(i,j;k,n)]g_r(k,n)+\\
&\quad +[\overline{S}_3(i,j;k,n)+M_3(i,j;k,n)]g_3(k,n) \qquad (r=1,2),
\end{aligned} \tag{38}$$

где обозначено

$$\begin{aligned}
&T_{11}(\overline{x}_i,\overline{y}_j)=\sum_{k,n=1}^{N}(I^{(1)}_{ijk}-I^{(2)}_{ijk})I^{-1}_{kn}; \qquad T_{22}(\overline{x}_i,\overline{y}_j)=\sum_{k,n=1}^{N}(I^{(1)}_{ijk}+I^{(2)}_{ijk})I^{-1}_{kn};\\
&T_{12}(\overline{x}_i,\overline{y}_j)=\sum_{k,n=1}^{N}I^{(3)}_{ijk}I^{-1}_{kn};\\
&E_r(i,j;k,n)=\sum_{p,q=1}^{N}(I^{(1)}_{ijp}-I^{(2)}_{ijp})I^{-1}_{pq}\left[\overline{P}_r\left(q,\frac{1}{2};k,n\right)-\overline{Q}_r\left(q,\frac{1}{2};k,n\right)\right];\\
&L_r(i,j;k,n)=\sum_{p,q=1}^{N}(I^{(1)}_{ijp}+I^{(2)}_{ijp})I^{-1}_{pq}\left[\overline{P}_r\left(q,\frac{1}{2};k,n\right)-\overline{Q}_r\left(q,\frac{1}{2};k,n\right)\right];\\
&M_r(i,j;k,n)=\sum_{p,q=1}^{N}I^{(3)}_{ijp}I^{-1}_{pq}\left[\overline{P}_r\left(q,\frac{1}{2};k,n\right)-\overline{Q}_r\left(q,\frac{1}{2};k,n\right)\right];
\end{aligned} \tag{39}$$

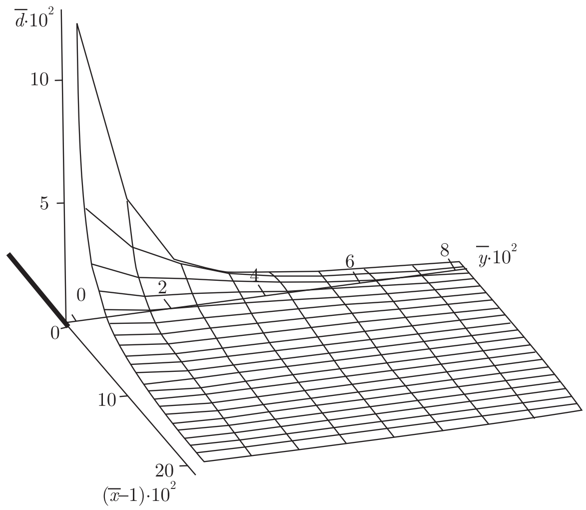


Рис. 1

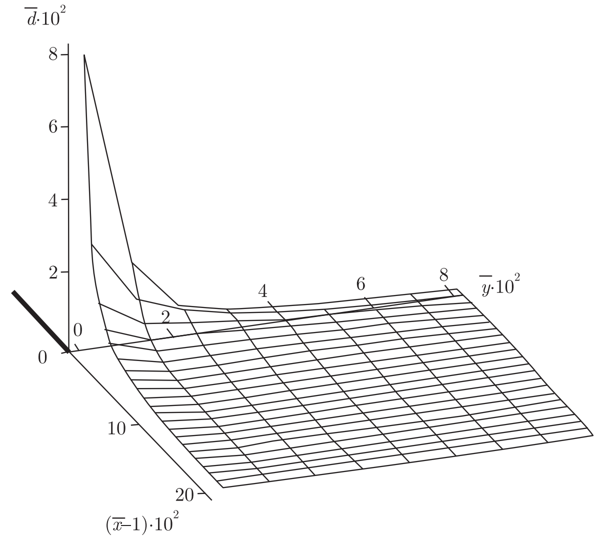


Рис. 2

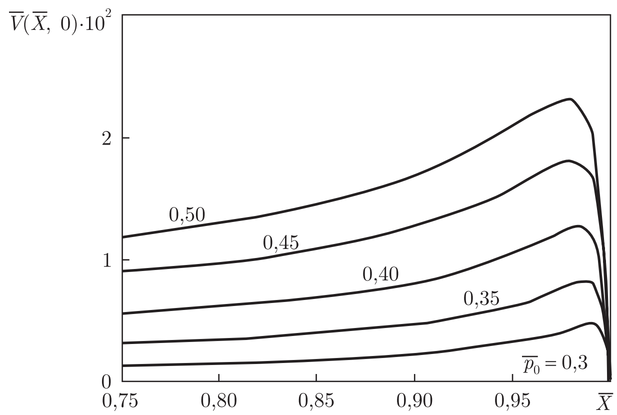


Рис. 3

$$E_3(i,j;k,n) = \sum_{p,q=1}^{N} (I_{ijp}^{(1)} - I_{ijp}^{(2)}) I_{pq}^{-1} \overline{P}_3\left(q, \frac{1}{2}; k, n\right);$$

$$L_3(i,j;k,n) = \sum_{p,q=1}^{N} (I_{ijp}^{(1)} + I_{ijp}^{(2)}) I_{pq}^{-1} \overline{P}_3\left(q, \frac{1}{2}; k, n\right);$$

$$M_3(i,j;k,n) = \sum_{p,q=1}^{N} I_{ijp}^{(3)} I_{pq}^{-1} \overline{P}_3\left(q, \frac{1}{2}; k, n\right).$$

Следует отметить, что в уравнениях (38) суммирование распространяется только на область нелинейного деформирования материала, где $g_r(k,n) \neq 0$, $g_3(k,n) \neq 0$. При этом слагаемые $-\overline{p}_0 T_{11}(\overline{x}_i, \overline{y}_j)$, $\overline{p}_0[1 - T_{22}(\overline{x}_i, \overline{y}_j)]$, $-\overline{p}_0 T_{12}(\overline{x}_i, \overline{y}_j)$, представляют собой решение линейной задачи для случая $\overline{\mu} = 1$.

Численное решение задачи проведено для пластины из дюралюминия [2] с постоянными $K = 61400$ МПа, $\mu_0 = 26720$ МПа, $\sigma_0 = 330$ МПа. Половина длины трещины разбивалась на

$N = 200$ частей. Для покрытия области нелинейного деформирования используется $30 \times 24$ квадратных ячеек, что приводит к решению системы 2160 нелинейных алгебраических уравнений (30) относительно 2160 неизвестных $\overline{\sigma}_{11}$, $\overline{\sigma}_{22}$, $\overline{\sigma}_{12}$. На рис. 1, 2 представлены зависимости глубины шейки $\overline{d} = 1 - h/h_0$ соответственно при приложенной нагрузке $\overline{p}_0 = 0{,}5$ и после ее снятия, т. е. остаточной глубины шейки. Здесь черной линией изображена вершина трещины. На рис. 3 приведены, согласно (25), кривые остаточного раскрытия трещины $\overline{v}(\overline{x}, 0) = \overline{u}(\overline{x}, 0) - \overline{u}_0(\overline{x}, 0)$ для нагрузок $\overline{p}_0 = 0{,}3$; 0,35; 0,4; 0,45; 0,5, где $\overline{u}_0(\overline{x}, 0)$ — линейно-упругое перемещение берега трещины. Как видим, кривые имеют максимум у вершины трещины, который удаляется от вершины с увеличением нагрузки. Следует отметить, что зоны пластических деформаций и кривые зависимостей нормальных напряжений $\overline{\sigma}_{22}(\overline{x}, 0)$ от координаты $\overline{x}$ практически не зависят от образования шейки и имеют вид, приведенный в [3, 4].

### Цитированная литература


1. *Sneddon J. N., Berry D. S.* The classical theory of elasticity. – Berlin: Springer, 1958. – 219 p.
2. *Гуляев А. П.* Металловедение. – Москва: Металлургия, 1986. – 542 с.
3. *Khoroshun L. P.* Discretization of the plane problem for a cracked body with nonlinear stress-strain diagram under tension // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, No 11. – P. 1238–1252.
4. *Khoroshun L. P., Levchuk O. I.* Distribution around cracks in linear hardening materials subject to tension: plane problem // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, No 2. – P. 128–140.


### References


1. *Sneddon J. N., Berry D. S.* The classical theory of elasticity, Berlin: Springer, 1958.
2. *Gulyaev A. P.* Metal science, Moscow: Metallurgy, 1986 (in Russian).
3. *Khoroshun L. P.* Int. Appl. Mech., 2010, **46**, No 11: 1238–1252.
4. *Khoroshun L. P., Levchuk O. I.* Int. Appl. Mech., 2014, **50**, No 2: 128–140.



*Институт механики им. С. П. Тимошенко*
*НАН Украины, Киев*



*Поступило в редакцию 24.12.2014*



Член-кореспондент НАН України **Л. П. Хорошун**


## Плоска задача про утворення шийки в пластині з тріщиною


Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ



*Дано постановку і розв'язок нелінійної задачі про утворення шийки при розтягу пластини з тріщиною для кусково-лінійної діаграми деформування матеріалу. Застосуванням перетворення Фур'є та дискретизації рівнянь задачу зведено до системи нелінійних алгебраїчних рівнянь. Досліджено вплив нелінійності на розподіл глибини шийки і розкриття тріщини біля її вершини.*



***Ключові слова:*** діаграма деформування, тріщина, нелінійна задача, шийка, дискретизація, глибина шийки, розкриття тріщини.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **L. P. Khoroshun**

## The plane problem of formation of a neck in the cracked plate

S. P. Timoshenko Institute of Mechanics NAS of Ukraine, Kiev

*The formulation and the solution of the nonlinear problem of formation of a neck in the cracked plate under tension for the piecewise linear diagram of deformation of a material are considered. With the application of the Fourier transformation and the discretization of equations, the problem is reduced to a system of nonlinear algebraic equations. The influence of a nonlinearity on the crack opening at the top and on the neck depth distribution is investigated.*

***Keywords:*** diagram of deformation, nonlinear problem, neck, discretization, depth of neck, crack opening.