

## Оценка прочности композитных и металлокомпозитных цилиндров при импульсном нагружении. Сообщение 1. Правила выбора и сравнительный анализ различных критериев прочности анизотропного материала

**В. А. Ромащенко**

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

*Сформулированы правила, которые необходимо соблюдать при выборе критериев прочности композита. Выполнен сравнительный анализ критериев прочности Ашкенази и Цая–Ву для конкретного ортотропного материала и установлено их плохое согласование между собой. Предложено уточнение критерия Цая–Ву для композитов, равнопрочных при растяжении и сжатии.*

**Ключевые слова:** ортотропия, критерии прочности, предельная поверхность, условия устойчивости и инвариантности, сравнительный анализ.

При разработке взрывозащитных камер (ВЗК) важное значение имеет выбор конструкционных материалов для несущих оболочек. При этом наряду с металлами (сталь, титановые сплавы и др.) рекомендуется применять ориентированные волокнистые композиты [1–5], зачастую обладающие ярко выраженной анизотропией. Такие материалы, как правило, являются ортотропными либо в случаях однонаправленного армирования или равномерного армирования в плоскости – трансотропными [4]. В качестве несущих элементов ВЗК широко используются одно- и многослойные композитные или металлокомпозитные цилиндрические оболочки. При этом под понятием “слой” здесь и далее будем подразумевать ту часть конструктивного элемента (пусть даже и технологически изготовленную путем многослойной намотки), в пределах которой упругие характеристики и направления главных осей анизотропии можно полагать постоянными.

Композитные слои, обычно изготавливаемые путем намотки, представляют собой спирально ортотропные (часто спирально трансотропные) тела [2–5]. Внутренний изотропный металлический слой является вспомогательным: он задает форму оболочки при ее изготовлении, частично изолирует слой композита от термоперегрузок, блокирует его динамическую неустойчивость (путем отбора упругой энергии) и поглощает часть энергии взрыва на пластическую деформацию. Вследствие этого повышается надежность конструкции – такая многослойная металлокомпозитная оболочка по сравнению с чисто металлической более энергоемкая при меньшей массе. Наибольшую опасность с точки зрения прочности при этом представляет первый полупериод колебаний [2]. Поэтому численное прогнозирование прочности таких конструктивных элементов при динамическом нагружении в настоящее время является весьма актуальной задачей.

В [5] представлены численные методы и результаты исследований осесимметричного напряженно-деформированного состояния (НДС) и прочности

одно- и двухслойных композитных цилиндров с различными схемами спирального армирования при внутреннем импульсном нагружении. В качестве критерия прочности ортотропного тела использовался критерий Ашкенази [4]. Однако в настоящее время данный критерий применяется весьма редко и только исследователями стран СНГ. В большинстве случаев современные исследователи предпочтение отдают критерию разрушения Цая–Ву [6–9]. В связи с этим представляется важным провести сравнительный анализ критериев разрушения анизотропного материала Ашкенази и Цая–Ву, доработать численный метод и пакет прикладных программ (ППП) [5] для использования критерия Цая–Ву, что позволит оценить НДС и прочность композитных и металлокомпозитных цилиндров при внутреннем импульсном нагружении. Решению этих задач и посвящена данная работа.

Объектом исследования служили многослойные цилиндры конечной длины со свободными торцами, нагружаемые изнутри осесимметричным импульсом давления. Будем использовать цилиндрические координаты  $x$ ,  $\varphi$ ,  $r$ . Начало координат располагаем в центре симметрии оболочки. В случае спирально ортотропного слоя одна из главных осей анизотропии всегда совпадает с направлением радиальной координаты  $r$ , две другие ( $x'$  и  $\varphi'$ ) могут быть повернуты относительно глобальных координатных осей  $x$  и  $\varphi$  на угол армирования  $\alpha$ , постоянный в пределах исследуемого слоя. Предельные случаи  $\alpha = 0$  и  $\alpha = \pm 90^\circ$  – соответственно осевое и окружное армирование, при этом спиральная ортотропия вырождается в цилиндрическую. Изотропные слои рассматриваются как частный случай спирально ортотропных при соблюдении соответствующих тождественных равенств для ряда упругих, пластических и прочностных характеристик материала, угол армирования  $\alpha$  при этом может быть произвольным.

Геометрические размеры исследуемых толстостенных цилиндрических оболочек следующие: внутренний радиус  $R_1 = 0,1$  м; наружный радиус  $R_2 = 0,12$  м; длина цилиндра  $L = 0,4$  м. Нагружение оболочек проводилось сферическим зарядом тротилгексогенового взрывчатого вещества (ВВ), который расположен на оси их симметрии. Согласно данным работ [5, 10, 11] давление на внутренней поверхности цилиндра задавалось так:

$$P(x, t) = P_0(R_1/l)^3 H(l/a_0 - t); \quad (1)$$

$$P_0 = 0,35 q M_3 / R_1^3; \quad a_0 = \sqrt{q} / 0,35,$$

где  $t$  – время;  $a_0$  – характеристическая скорость,  $a_0 = 6310$  м/с;  $P_0$  – номинальное давление на расстоянии  $R_1$  от центра заряда;  $l$  – расстояние от центра заряда до рассматриваемой точки,  $l = \sqrt{R_1^2 + (x - x_0)^2}$ ;  $x_0$  – осевая координата центра заряда ВВ;  $H(t)$  – функция Хевисайда. Величина  $a_0 = 6310$  м/с соответствует теплотворной способности ВВ, равной  $q = 4,877$  МДж/кг. Номинальное давление  $P_0$  прямо пропорционально массе заряда  $M_3$ , для  $M_3 = 0,1$  кг оно составляет 170,7 МПа [5, 10, 11].

Математическая постановка краевой задачи по определению нестационарного осесимметричного НДС и численный конечноразностный метод ее

решения подробно изложены в [5], поэтому остановимся на прочностных аспектах. Заметим, что динамическое НДС в рассматриваемых задачах будет весьма разнообразным – в зависимости от времени и пространственных координат оно может быть и одно-, и двух-, и трехосным (когда все шесть компонент тензора напряжений  $\sigma_{x'}$ ,  $\sigma_{\varphi'}$ ,  $\sigma_r$ ,  $\tau_{x'\varphi'}$ ,  $\tau_{\varphi'r}$ ,  $\tau_{rx'}$  одновременно ненулевые и одного порядка). Поэтому при выборе критериев прочности используем те, которые предназначены для описания самого общего вида НДС – трехосного.

Прочность толстостенного цилиндра в процессе изменения его динамического трехосного НДС оценивали с помощью критериев разрушения Ашкенази либо Цая–Ву. Критерий Ашкенази справедлив только для равнопрочных при растяжении и сжатии композитов, и в главных осях анизотропии  $x'$ ,  $\varphi'$ ,  $r$  для общего случая трехосного НДС имеет вид [4, 5]

$$\Phi \leq 1; \tag{2}$$

$$\Phi = \frac{a\sigma_{x'}^2 + b\sigma_{\varphi'}^2 + c\sigma_r^2 + d\tau_{x'\varphi'}^2 + e\tau_{\varphi'r}^2 + f\tau_{rx'}^2 + g\sigma_{x'}\sigma_{\varphi'} + h\sigma_{\varphi'}\sigma_r + m\sigma_r\sigma_{x'}}{\sqrt{\sigma_{x'}^2 + \sigma_{\varphi'}^2 + \sigma_r^2 + \tau_{x'\varphi'}^2 + \tau_{\varphi'r}^2 + \tau_{rx'}^2 + \sigma_{x'}\sigma_{\varphi'} + \sigma_{\varphi'}\sigma_r + \sigma_r\sigma_{x'}}},$$

где

$$a = \frac{1}{\sigma_{\text{ВХ}'}}; \quad b = \frac{1}{\sigma_{\text{В}\varphi}'}}; \quad c = \frac{1}{\sigma_{\text{Вr}}}; \quad d = \frac{1}{\tau_{\text{ВХ}'\varphi'}}; \quad e = \frac{1}{\tau_{\text{В}\varphi'r}}; \quad f = \frac{1}{\tau_{\text{ВrХ}'}};$$

$$g = \frac{4}{\sigma_{\text{ВХ}'\varphi'}^{(45)}} - a - b - d; \quad h = \frac{4}{\sigma_{\text{В}\varphi'r}^{(45)}} - b - c - e; \quad m = \frac{4}{\sigma_{\text{ВrХ}'}^{(45)}} - c - a - f;$$

$\sigma_{\text{ВХ}'}$ ,  $\sigma_{\text{В}\varphi}'$ ,  $\sigma_{\text{Вr}}$  – пределы прочности при растяжении или сжатии в соответствующих главных направлениях анизотропии;  $\tau_{\text{ВХ}'\varphi}'$ ,  $\tau_{\text{В}\varphi'r}$ ,  $\tau_{\text{ВrХ}'}$  – пределы прочности при чистом сдвиге в соответствующих главных плоскостях анизотропии;  $\sigma_{\text{ВХ}'\varphi'}^{(45)}$ ,  $\sigma_{\text{В}\varphi'r}^{(45)}$ ,  $\sigma_{\text{ВrХ}'}^{(45)}$  – пределы прочности в диагональном направлении под углом 45° к осям симметрии в главной плоскости анизотропии, которая соответствует нижним индексам.

Таким образом предельная поверхность критерия Ашкенази (2) строится на основании данных девяти независимых экспериментов: шесть на одноосное растяжение (или сжатие) и три на чистый сдвиг. При этом она тождественно удовлетворяет этим экспериментальным (реперным) точкам: функция  $\Phi$  в них тождественно равна единице.

Поскольку согласно критерию Ашкенази предполагается равнопрочность композиционного материала (КМ) при растяжении и сжатии, что для реальных материалов выполняется достаточно редко, в последнее время при прочностных расчетах чаще используется критерий Цая–Ву. Данный критерий лишен этого недостатка и в главных осях анизотропии материала имеет вид [6–9]

$$\Psi \leq 1; \tag{3}$$

$$\Psi = \sigma_{x'} \left( \frac{1}{\sigma_{\text{ВХ}'}^+} - \frac{1}{\sigma_{\text{ВХ}'}^-} \right) + \sigma_{\varphi'} \left( \frac{1}{\sigma_{\text{В}\varphi'}^+} - \frac{1}{\sigma_{\text{В}\varphi'}^-} \right) + \sigma_r \left( \frac{1}{\sigma_{\text{В}r}^+} - \frac{1}{\sigma_{\text{В}r}^-} \right) +$$

$$+ \frac{\sigma_{x'}^2}{\sigma_{\text{ВХ}'}^+ \sigma_{\text{ВХ}'}^-} + \frac{\sigma_{\varphi'}^2}{\sigma_{\text{В}\varphi'}^+ \sigma_{\text{В}\varphi'}^-} + \frac{\sigma_r^2}{\sigma_{\text{В}r}^+ \sigma_{\text{В}r}^-} + \frac{\tau_{x'\varphi'}^2}{\tau_{\text{ВХ}'\varphi'}^2} + \frac{\tau_{\varphi'r}^2}{\tau_{\text{В}\varphi'r}^2} + \frac{\tau_{rx'}^2}{\tau_{\text{В}rx'}^2} -$$

$$- F_{x'\varphi'} \sigma_{x'} \sigma_{\varphi'} - F_{\varphi'r} \sigma_{\varphi'} \sigma_r - F_{rx'} \sigma_r \sigma_{x'},$$

где индексы “+” и “-” обозначают пределы прочности при растяжении и сжатии соответственно;

$$F_{ij} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{\text{В}i}^+ \sigma_{\text{В}i}^- \sigma_{\text{В}j}^+ \sigma_{\text{В}j}^-}}, \quad i, j = x', \varphi', r; \quad i \neq j. \quad (4)$$

Предельная поверхность (3) строится также по данным девяти экспериментов, которые несколько отличаются от вышеописанных для критерия Ашкенаси, а именно: три на чистый сдвиг и три на одноосное растяжение в главных плоскостях и направлениях анизотропии соответственно, как и в случае критерия (2). Кроме того, проводится три эксперимента на одноосное сжатие в главных направлениях анизотропии. Поверхность (3), как и (2), тождественно удовлетворяет экспериментальным точкам: функция  $\Psi$  в них становится равной единице, причем для любых трех произвольных значений констант  $F_{ij}$ . В зависимости от способа доопределения этих констант можно строить различные критерии прочности. В частности, если эти постоянные определять по формулам (4), получим критерий прочности, который в литературных источниках [8, 9] традиционно называется критерием Цая–Ву.

Функция  $\Phi$  из (2) или  $\Psi$  из (3) в зависимости от используемого критерия прочности определяет область, на границе которой НДС критическое: если условие  $\Phi < 1$  (или  $\Psi < 1$ ) выполняется, то разрушения не происходит, если нарушается, разрушение происходит, и прочность не соблюдается. Поскольку критерии (2) и (3) записываются в системе координат, совпадающей с главными осями анизотропии, а НДС вычисляется в глобальной цилиндрической системе координат, то при определении напряжений, входящих в (2) или (3), необходимо совершить поворот тензора напряжений на соответствующий угол армирования  $\alpha$  по известным соотношениям [5, 12]. Процедуру проверки прочности следует проводить в каждой конечноразностной ячейке расчетной области на каждом временном шаге. Таким образом, если условие  $\Phi < 1$  (или  $\Psi < 1$ ) выполняется во всей области и на всем рассматриваемом временном интервале, конструкция прочная. Если нарушается хотя бы в одной точке и в какой-то один момент времени, прочность не соблюдается.

Предельная поверхность Цая–Ву (3), (4) является классической поверхностью второго порядка и выпуклой в шестимерном пространстве напряжений. Из-за различной прочности КМ при растяжении и сжатии, учитываемой как квадратичными, так и линейными членами в (3), происходит, в частности,

смещение центра поверхности относительно начала координат. Предельная поверхность Ашкенази (2) всегда центрально симметрична, при этом она является частным случаем поверхности четвертого порядка без линейных и кубических членов, может иметь знакопеременную кривизну и состоять из выпуклых, вогнутых и седлообразных участков, абсолютно гладко сопрягающихся друг с другом [4].

Отсутствие напряжений является оптимумом (иногда не единственным) функции прочности  $\Phi$  из (2) по Ашкенази: при нулевом тензоре напряжений функция  $\Phi$  достигает своего глобального минимума ( $\Phi_{\min} = 0$ ). В то же время минимум функции  $\Psi$  из (3) по Цая–Ву почти никогда не реализуется при нулевом тензоре напряжений, за исключением вырожденного случая равнопрочности композита во всех главных направлениях анизотропии, когда  $\Psi_{\min} = 0$ , и этот оптимум не единственный. Как видно из (3), наличие линейных членов (хотя бы одного) приводит к тому, что при некоторых ненулевых напряжениях функция  $\Psi$  будет отрицательной, ее минимум также отрицательный и достигается не в начале координат шестимерного пространства напряжений. Таким образом, с позиций строгой математики полное отсутствие напряжений почти никогда не будет представлять собой оптимальное с точки зрения прочности НДС согласно критерию Цая–Ву (3) и всегда будет оптимумом (не всегда единственным) по критерию Ашкенази (2).

Если в (3) принять

$$F_{ij} = \frac{1}{\sigma_{Vi}^+ \sigma_{Vi}^-} + \frac{1}{\sigma_{Vj}^+ \sigma_{Vj}^-} - \frac{\sigma_{Vi}^+ \sigma_{Vi}^- \sigma_{Vj}^+ \sigma_{Vj}^-}{\sigma_{Vx}^+ \sigma_{Vx}^- \sigma_{V\varphi}^+ \sigma_{V\varphi}^- \sigma_{Vr}^+ \sigma_{Vr}^-}, \quad i, j = x', \varphi', r; i \neq j, \quad (5)$$

то придем к известному критерию разрушения Хоффмана [7, 8]. Этот критерий обладает рядом недостатков и используется гораздо реже, чем критерий Цая–Ву. В частности, для целого достаточно большого класса существенно анизотропных материалов критерий Хоффмана (5) не удовлетворяет необходимым условиям устойчивости [7]:

$$|F_{ij}| < \frac{2}{\sqrt{\sigma_{Vi}^+ \sigma_{Vi}^- \sigma_{Vj}^+ \sigma_{Vj}^-}}, \quad i, j = x', \varphi', r; i \neq j, \quad (6)$$

которым критерий Цая–Ву в силу (4) удовлетворяет автоматически. Тем не менее, несмотря на тождественное выполнение необходимых условий устойчивости, предельная поверхность Цая–Ву (3), (4) в шестимерном пространстве напряжений незамкнута – она представляет собой эллиптический параболоид либо в вырожденных случаях цилиндр [7].

Для критерия Ашкенази (2) соответствующие необходимые условия устойчивости имеют вид

$$\left| \frac{4}{\sigma_{Vij}^{(45)}} - \frac{1}{\sigma_{Vi}} - \frac{1}{\sigma_{Vj}} - \frac{1}{\tau_{Vij}} \right| < \frac{2}{\sqrt{\sigma_{Vi} \sigma_{Vj}}}, \quad i, j = x', \varphi', r; i \neq j. \quad (7)$$

Как и для критерия Цая–Ву, выполнение условий (7) гарантирует только односвязность предельной поверхности Ашкенази (2), но не ее замкнутость. Ввиду того что поверхность (2) центрально-симметрична, она может быть либо замкнутой, либо двухсторонне открытой. В случае невыполнения необходимых условий устойчивости (6) или (7) использовать соответствующий критерий прочности для рассматриваемого анизотропного материала нельзя.

Кроме того, для линейно-квадратичных критериев типа (3) в случае транслопного КМ в плоскости изотропии  $ij$  должно выполняться условие инвариантности критерия относительно поворота осей координат, поскольку любые два взаимно ортогональных направления в этой плоскости можно рассматривать как главные оси анизотропии [6]:

$$F_{ij} = \frac{1}{\tau_{vij}^2} - \frac{2}{\sigma_{vi}^+ \sigma_{vi}^-}, \quad (8)$$

при этом, естественно, обязательно должны выполняться условия  $\sigma_{vi}^+ \equiv \sigma_{vj}^+$ ;  $\sigma_{vi}^- \equiv \sigma_{vj}^-$ .

Таким образом, несмотря на то что константы  $F_{ij}$  в (3) формально используются в качестве свободных параметров, фактически таковыми не являются, поскольку, во-первых, должны удовлетворять условиям устойчивости (6), во-вторых, для транслопных материалов соответствующая постоянная  $F_{ij}$  представляет собой не свободный параметр, а вполне однозначно определенную величину (8). Очевидно, что корректное математическое (формульное) определение констант  $F_{ij}$  при предельном переходе ортотропии в транслопию или изотропию должно тождественно удовлетворять условию (8). К сожалению, определения Цая–Ву (4) и Хоффмана (5) этим свойством не обладают (в отличие от критерия Ашкенази).

Для критерия Цая–Ву в силу (4) условие (8) записывается следующим образом:

$$\tau_{vij} = \sqrt{\frac{\sigma_{vi}^+ \sigma_{vi}^-}{3}}, \quad (9)$$

для критерия Хоффмана в силу (5) –

$$\tau_{vij} = \sqrt{\frac{\sigma_{vi}^+ \sigma_{vi}^-}{4 - \frac{(\sigma_{vi}^+ \sigma_{vi}^-)^3}{\sigma_{vx}^+ \sigma_{vx}^- \sigma_{v\varphi}^+ \sigma_{v\varphi}^- \sigma_{vr}^+ \sigma_{vr}^-}}}, \quad (10)$$

а критерий Ашкенази (2) для транслопных КМ тождественно инвариантен относительно выбора координат в плоскости изотропии  $ij$  по определению без каких-либо ограничений типа (9) или (10) для соответствующих пределов прочности.

Следует отметить, что для равнопрочных при растяжении и сжатии композитов предельная поверхность Цая–Ву (3), (4) вырождается в эллиптический цилиндр:

$$\Psi = S_{x'}^2 + S_{\varphi'}^2 + S_r^2 - S_{x'}S_{\varphi'} - S_{\varphi'}S_r - S_rS_{x'} + 3(T_{x'\varphi'}^2 + T_{\varphi'r}^2 + T_{rx'}^2) \leq 1, \quad (11)$$

где соответствующие безразмерные напряжения равны:

$$S_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_{Bi}}; \quad T_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{\tau_{vij}\sqrt{3}}, \quad i, j = x', \varphi', r; \quad i \neq j. \quad (12)$$

Поскольку в левой части критерия (11) имеем квадрат интенсивности безразмерных напряжений (12), для таких материалов (11) более логично представить в виде

$$\sqrt{\Psi} \leq 1. \quad (13)$$

В левой части (13) таким образом записан аналог отношения некоторого обобщенного эквивалентного напряжения к некоторому обобщенному допускаемому, как и в случае критерия Ашкенази, представленного в форме (2). Для изотропных равнопрочных при растяжении и сжатии материалов при условии

$$\tau_B = \frac{\sigma_B}{\sqrt{3}} \quad (14)$$

критерий Цая–Ву в форме (13) автоматически переходит в четвертую теорию прочности – критерий удельной потенциальной энергии формоизменения [13]:

$$\sigma_{и} / \sigma_B \leq 1, \quad (15)$$

где  $\sigma_{и}$  – интенсивность напряжений;  $\sigma_B$  и  $\tau_B$  – пределы прочности при одноосном растяжении и чистом сдвиге соответственно. Условие (14) при этом представляет собой условие инвариантности (8) для изотропного равнопрочного при растяжении и сжатии материала.

Для материалов, имеющих разные пределы прочности при растяжении и сжатии, условие прочности Цая–Ву в форме (13) становится абсурдным, поскольку для них глобальный минимум функции  $\Psi$  всегда будет меньше нуля, т.е. она может принимать как положительные, так и отрицательные значения. В этих случаях критерий Цая–Ву следует использовать в виде (3), (4). При этом возможна только альтернативная оценка прочности: разрушится материал при данном НДС или нет. Провести количественную оценку запаса прочности либо, наоборот, степени превышения предельно допустимых норм достаточно проблематично, поскольку даже полное отсутствие напряжений математически не будет оптимальным для критерия (3).

Из вышеизложенного следует, что проводить сравнительный анализ критериев разрушения Ашкенази (2) и Цая–Ву имеет смысл только для равно-

прочных при растяжении и сжатии КМ, при этом последний использовать в виде (13). Для таких композитов предельная поверхность Ашкенази будет тождественно удовлетворять результатам девяти независимых экспериментов, а поверхность Цая–Ву – только шести. По определению (11), (12) критерий Цая–Ву может не удовлетворять результатам трех экспериментов на одноосное растяжение (сжатие) под углом  $45^\circ$  к главным осям  $i, j$  анизотропии ( $\sigma_{vij}^{(45)}$ ) в плоскости этих осей. Такое нагружение эквивалентно следующему плоскому напряженному состоянию (ПНС) в главных осях анизотропии:  $\sigma_i = \sigma_j = \pm \tau_{ij} = \pm \sigma_{vij}^{(45)} / 2$ . При этом функция  $\Phi$  из (2) тождественно обращается в единицу, а согласно критерию Цая–Ву (11)–(13) получим

$$\sqrt{\Psi} = \lambda_{ij}; \quad (16)$$

$$\lambda_{ij} = \frac{\sigma_{vij}^{(45)}}{2} \sqrt{\frac{1}{\sigma_{vi}^2} + \frac{1}{\sigma_{vj}^2} + \frac{1}{\tau_{vij}^2} - \frac{1}{\sigma_{vi}\sigma_{vj}}}, \quad i, j = x', \varphi', r; i \neq j.$$

Очевидно, что для удовлетворительного соответствия критериев Ашкенази (2) и Цая–Ву (11)–(13) желательно, чтобы одновременно выполнялись следующие шесть условий:

$$\frac{\sigma_{vi}^+}{\sigma_{vi}^-} = 1; \quad \lambda_{ij} = 1, \quad i, j = x', \varphi', r; i \neq j. \quad (17)$$

Чем больше величины в левых частях (17) будут отличаться от единицы, тем хуже будет согласование между критериями даже при точном выполнении условий (17).

Тождественного удовлетворения последним трем требованиям  $\lambda_{ij} = 1$  из (17) можно добиться, если для равнопрочных при растяжении и сжатии композитов вместо использования формул Цая–Ву (4) доопределять константы  $F_{ij}$ :

$$F_{ij} = \frac{1}{\sigma_{vi}^2} + \frac{1}{\sigma_{vj}^2} + \frac{1}{\tau_{vij}^2} - \frac{4}{(\sigma_{vij}^{(45)})^2}, \quad i, j = x', \varphi', r; i \neq j, \quad (18)$$

т.е. для конкретизации критерия (3) в данном случае необходимо то же количество (девять) тех же экспериментов, что и для критерия Ашкенази (2), и совпадение этих двух критериев в экспериментальных (реперных) точках было бы полным. Таким образом, для равнопрочных при растяжении и сжатии композитов вместо критерия Цая–Ву (11)–(13) можно предложить уточненный критерий, который в безразмерных переменных (12) имеет вид:

$$\Omega \leq 1; \quad (19)$$

$$\Omega = [S_{x'}^2 + S_{\varphi'}^2 + S_r^2 + 3(T_{x'\varphi'}^2 + T_{\varphi'r}^2 + T_{rx'}^2)] -$$



$$- \xi_{x'\varphi'} S_{x'} S_{\varphi'} - \xi_{\varphi'r} S_{\varphi'} S_r - \xi_{rx'} S_r S_{x'}]^{1/2},$$

где

$$\xi_{ij} = \frac{\sigma_{Bi}}{\sigma_{Bj}} + \frac{\sigma_{Bj}}{\sigma_{Bi}} + \sigma_{Bi} \sigma_{Bj} \left[ \frac{1}{\tau_{Bij}^2} - \frac{4}{(\sigma_{Bij}^{(45)})^2} \right], \quad |\xi_{ij}| < 2, \quad (20)$$

$$i, j = x', \varphi', r; i \neq j.$$

Последние неравенства в (20) представляют собой необходимые условия устойчивости (6) для критерия (19). Для композитов, у которых хотя бы для одного сочетания  $i$  и  $j$  выполняется условие  $|\xi_{ij}| \geq 2$ , использовать уточненный критерий (19) нельзя. Требованию инвариантности относительно выбора координат в плоскости изотропии в случае трансформного КМ критерий (19), как и критерий Ашкенази (2), удовлетворяет тождественно, без каких-либо ограничений на прочностные характеристики.

Недостаток критерия (19) состоит в том, что он приемлем только для равнопрочных при растяжении и сжатии материалов, для которых критерий Ашкенази (2) хорошо себя зарекомендовал. Критерий Цая–Ву используется в первую очередь для учета именно неравнопрочности, иногда весьма существенной, КМ при растяжении и сжатии, которой обладает подавляющее большинство реальных композитов. Определение  $F_{ij}$  по формуле (18) для таких материалов теряет смысл, поскольку, удовлетворяя экспериментальным данным в одном квадранте, для определенности пусть это будет растяжение–растяжение, тем самым будет вноситься большая погрешность в остальные квадранты, в частности сжатие–сжатие. Чтобы одновременно удовлетворить опытным данным во всех квадрантах, константы  $F_{ij}$  должны скачкообразно меняться от квадранта к квадранту, при этом количество дополнительных независимых экспериментов возрастает от трех до двенадцати. О трудностях, связанных с оптимальным определением констант  $F_{ij}$ , неоднократно отмечалось ранее [6, 7]. Если же ограничиться минимальным количеством независимых простейших экспериментов, а именно: девятью, то, возможно, соотношения Цая–Ву (4) для решения такой проблемы будут оптимальными. При этом для равнопрочных при растяжении и сжатии материалов можно рекомендовать уточнение критерия Цая–Ву согласно (19), (20).

Таким образом, сформулируем правила, которые необходимо соблюдать при выборе рассмотренных четырех критериев прочности КМ.

1. Материал ортотропный, неравнопрочный при растяжении и сжатии.
  - 1.1. Критерий Ашкенази (2) использовать нельзя.
  - 1.2. Критерий Цая–Ву (3), (4) использовать можно.
  - 1.3. Критерий Хоффмана (3), (5) использовать можно, если удовлетворяются условия устойчивости (6).
  - 1.4. Уточненный критерий (19) использовать нельзя.
2. Материал ортотропный, равнопрочный при растяжении и сжатии.
  - 2.1. Критерий Ашкенази использовать можно, если удовлетворяются условия устойчивости (7).
  - 2.2. Критерий Цая–Ву (3), (4) использовать можно, но предпочтительно в виде (13).

2.3. Критерий Хоффмана (3), (5) использовать можно, но предпочтительно в виде (13), если удовлетворяются условия устойчивости

$$|F_{ij}| < \frac{2}{\sigma_{Bi} \sigma_{Bj}}, \quad i, j = x', \varphi', r; \quad i \neq j. \quad (21)$$

2.4. Уточненный критерий (19) использовать можно, если удовлетворяются условия устойчивости (20).

3. Материал трансропный, неравнопрочный при растяжении и сжатии.

3.1. См. п. 1.1.

3.2. Критерий Цая–Ву (3), (4) использовать можно, если удовлетворяется условие инвариантности (9).

3.3. Критерий Хоффмана (3), (5) использовать можно, если удовлетворяются условия устойчивости (6) и инвариантности (10).

3.4. См. п. 1.4.

4. Материал трансропный, равнопрочный при растяжении и сжатии.

4.1. См. п. 2.1.

4.2. Критерий Цая–Ву (3), (4) использовать можно, но предпочтительно в виде (13), если удовлетворяется условие инвариантности: в плоскости изотропии  $ij$  имеем

$$\tau_{vij} = \sigma_{Bi} / \sqrt{3}. \quad (22)$$

4.3. Критерий Хоффмана (3), (5) использовать можно, но предпочтительно в виде (13), если удовлетворяются условия устойчивости (21) и инвариантности: в плоскости изотропии  $ij$  имеем

$$\tau_{vij} = \frac{\sigma_{Bi}}{\sqrt{4 - \frac{\sigma_{Bi}^6}{\sigma_{Bx'}^2 \sigma_{B\varphi'}^2 \sigma_{Br'}^2}}}. \quad (23)$$

4.4. См. п. 2.4.

5. Материал изотропный, неравнопрочный при растяжении и сжатии.

5.1. См. п. 1.1.

5.2. Критерий Цая–Ву (3), (4) использовать можно, если удовлетворяется условие инвариантности

$$\tau_B = \sqrt{\frac{\sigma_B^+ \sigma_B^-}{3}}. \quad (24)$$

5.3. Критерий Хоффмана (3), (5) отождествляется с критерием Цая–Ву (3), (4), см. п. 5.2.

5.4. См. п. 1.4.

6. Материал изотропный, равнопрочный при растяжении и сжатии.

6.1. Критерий Ашкенази (2) использовать можно, если удовлетворяется условие устойчивости

$$\tau_B > \sigma_B / 4. \quad (25)$$

6.2. Критерий Цая–Ву (3), (4) использовать можно, но предпочтительно в виде (15), если удовлетворяется условие инвариантности (14).

6.3. Критерий Хоффмана (3), (5) отождествляется с критерием Цая–Ву (3), (4), см. п. 6.2.

6.4. Уточненный критерий (19) использовать можно, если удовлетворяется условие устойчивости

$$\tau_b > \sigma_b/2. \quad (26)$$

Данные правила накладывают довольно серьезные ограничения на возможность применения рассматриваемых критериев прочности, например:

1) изотропный материал, неравнопрочный при растяжении и сжатии, для которого не соблюдается соотношение (24), нельзя проверять на прочность с помощью ни одного из четырех вышеописанных критериев;

2) то же можно сказать и об изотропном материале, равнопрочном при растяжении и сжатии, для которого  $\tau_b \leq \sigma_b/4$ ;

3) также ни один из четырех критериев неприемлем для трансропных материалов, неравнопрочных при растяжении и сжатии, если в плоскости изотропии  $ij$  не выполняется ни одно из условий инвариантности (9) или (10).

Случаями 1) и 2) исчерпываются все возможные ситуации для изотропных материалов, когда ни один из четырех критериев неприемлем (см. п. 5.1–6.4 вышесформулированных правил). Для трансропных материалов помимо п. 3) существуют еще случаи неприменимости всех вышеперечисленных критериев, на которых более подробно останавливаться не будем, поскольку они непосредственно следуют из п. 3.1–4.4. Что же касается ортотропных композитов, то, как следует из п. 1.1–2.4, по крайней мере, критерий Цая–Ву (3), (4) для таких материалов использовать можно всегда, так как он устойчив по своему определению (4), а накладывать дополнительные ограничения на константы  $F_{ij}$  (типа условий инвариантности (8)) нет никаких оснований. Если говорить об устойчивости, то, сравнивая (25) с (26), можно заключить, что критерий Ашкенази, скорее всего, будет обладать лучшей устойчивостью, чем уточненный критерий (19).

Указанные правила получены путем строгих математических рассуждений и представляют собой необходимые условия для принципиальной возможности использования критериев разрушения анизотропного материала Ашкенази, Цая–Ву, Хоффмана и (19). Если для исследуемого КМ возможно применение нескольких критериев, нет никакой гарантии, что результаты прочностных расчетов будут находиться в удовлетворительном согласовании между собой.

Рассмотрим ортотропный КМ (органопластик) [14, 15] с такими физико-механическими характеристиками в главных осях анизотропии  $X, Y, Z$ : плотность  $\rho = 1350 \text{ кг/м}^3$ ;  $E_X, E_Y, E_Z$  – модули Юнга в соответствующих главных направлениях анизотропии,  $E_X = 48600 \text{ МПа}$ ,  $E_Y = 21300 \text{ МПа}$ ,  $E_Z = 7140 \text{ МПа}$ ;  $G_{XY}, G_{YZ}, G_{ZX}$  – модули сдвига в соответствующих главных плоскостях анизотропии,  $G_{XY} = 930 \text{ МПа}$ ,  $G_{YZ} = 900 \text{ МПа}$ ,  $G_{ZX} = 850 \text{ МПа}$ ;  $\sigma_{bX} = 2670 \text{ МПа}$ ;  $\sigma_{bY} = 1180 \text{ МПа}$ ;  $\sigma_{bZ} = 390 \text{ МПа}$ ;  $\tau_{bXY} = 975 \text{ МПа}$ ;  $\tau_{bYZ} = 800 \text{ МПа}$ ;  $\tau_{bZX} = 607 \text{ МПа}$ ;  $\sigma_{bXY}^{(45)} = 1850 \text{ МПа}$ ;  $\sigma_{bYZ}^{(45)} = 1600 \text{ МПа}$ ;  $\sigma_{bZX}^{(45)} = 1215 \text{ МПа}$ ;  $\nu_{XY}, \nu_{YZ}, \nu_{ZX}$  – коэффициенты Пуассона, при этом должна выполняться зависимость [12]

$$E_i \nu_{ji} = E_j \nu_{ij}, \quad i, j = X, Y, Z; \quad i \neq j, \quad (27)$$

$$\nu_{XY} = 0,28; \quad \nu_{YZ} = 0,26; \quad \nu_{ZX} = 0,037.$$

Заметим, что данный органопластик обладает очень малой жесткостью при сдвиге по сравнению с соответствующей жесткостью при растяжении (сжатии). Как видно из экспериментальных данных, этот материал попадает в п. 2. Нетрудно проверить, что при этом требования п. 2.3 и 2.4 не выполняются (не удовлетворяются условия устойчивости ни для критерия Хоффмана, ни для уточненного критерия), т.е. из вышеперечисленных четырех критериев прочности данный композит можно проверять на прочность только по критериям Ашкенази (2) либо Цая–Ву (11)–(13). На рис. 1 построены предельные кривые в безразмерных напряжениях (12) для трех плоских напряженных состояний (ПНС) при отсутствии касательных напряжений в главных осях анизотропии, где сплошная кривая (эллипс) соответствует критерию Цая–Ву и инвариантна к выбору осей, остальные кривые соответствуют критерию Ашкенази и имеют различный вид в зависимости от выбора осей: штриховая –  $u = S_X, v = S_Y$ ; штрихпунктирная –  $u = S_Y, v = S_Z$ ; пунктирная –  $u = S_Z, v = S_X$ . Как видно, различие в данных, полученных по критериям Ашкенази и Цая–Ву, может быть очень большим (до пяти раз). Ввиду центральной симметричности всех кривых они построены только в верхней полуплоскости каждой из трех систем координат.

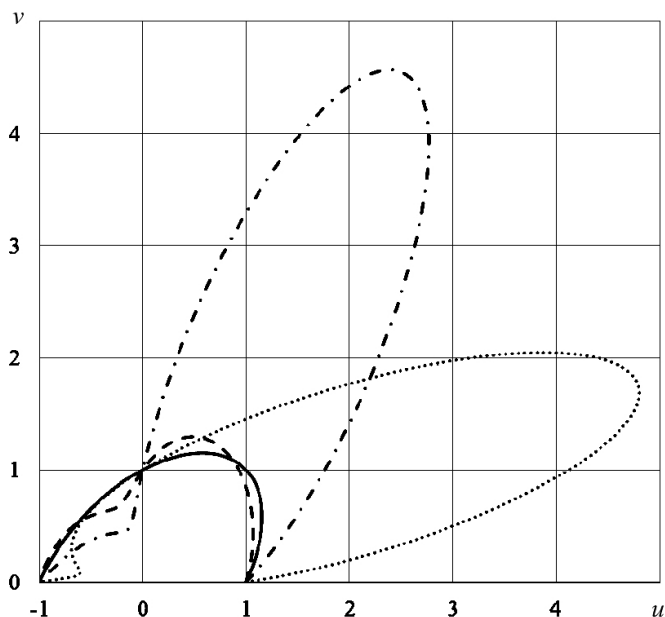


Рис. 1. Сравнительный анализ критериев Ашкенази и Цая–Ву при ПНС в плоскостях  $\tau_{ij} = 0$ .

Для других видов ПНС ситуация будет не менее критичной. Например, рассмотрим ПНС в плоскости  $ZX$  при условии  $\sigma_X / \sigma_Z = 2,5$ , что в безразмерных напряжениях (12) эквивалентно  $S_X / S_Z = 0,365$ . На рис. 2,а построены предельные кривые для данного ПНС только для первого квадранта из-за симметричности всех кривых относительно осей абсцисс и ординат одновре-

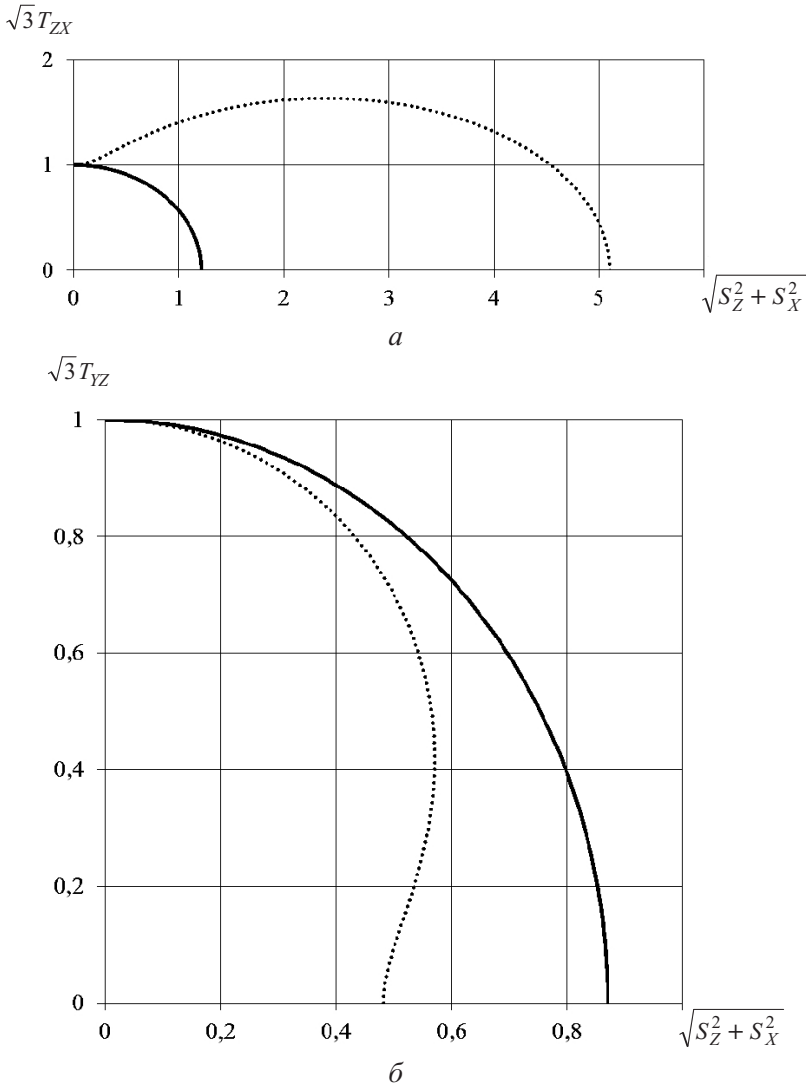


Рис. 2. К сравнительному анализу критериев Ашкенази и Цяя–Ву.

менно: сплошная – по критерию Цяя–Ву, пунктирная – по критерию Ашкенази. Как видно, данные по критериям находятся в очень плохом соответствии между собой: максимальное их расхождение составляет примерно пять раз. При этом более консервативным оказался критерий Цяя–Ву. На рис. 2,б построены аналогичные кривые для ПНС в плоскости  $YZ$  при условии  $\sigma_Y/\sigma_Z = -1,1$ , что эквивалентно  $S_Y/S_Z = -0,365$ . Исходя из этих данных более консервативным оказался критерий Ашкенази, при этом максимальное расхождение результатов составляет примерно два раза. Также видно, что предельная поверхность Ашкенази имеет знакопеременную кривизну и состоит из сопрягающихся между собой выпуклых, вогнутых и седлообразных участков, поверхность Цяя–Ву везде выпуклая. Для трехосных НДС соответствие между критериями может только ухудшаться, поскольку ПНС представляет собой частные случаи трехосных напряженных состояний.

Рассмотрим цилиндр, выполненный из исследуемого материала, под действием нагрузки (1) при  $P_0 = 222$  МПа,  $x_0 = 0$ . Армирование выберем таким:  $x' = X$ ,  $\varphi' = Y$ ,  $r = Z$ ; углом армирования  $\alpha$  будем варьировать, при этом  $\alpha = 0$  соответствует осевому армированию ( $x' = x$ ),  $\alpha = 90^\circ$  – окружному ( $x' = \varphi$ ). Расчеты показывают, что при любом угле армирования наиболее опасной точкой согласно какому-либо из двух критериев прочности оказывается точка, наименее удаленная от заряда ( $x = 0$ ,  $r = R_1$ ). Наиболее опасный момент времени при этом незначительно зависел от  $\alpha$  и выбранного критерия и изменялся в пределах 10,2...16 мкс. Величины максимальных функций прочности  $\Phi$  и  $\sqrt{\Psi}$  также мало зависели от угла армирования и изменялись в пределах 0,86...1,07 и 0,6...0,62 соответственно, т.е. и здесь имеет место большая разница между критериями: в то время как по критерию Ашкенази фиксировалось разрушение, по критерию Цая–Ву получен 40%-ный запас прочности. Интересно отметить, что НДС в опасной точке существенно зависело от  $\alpha$ : максимальные  $\sigma_\varphi$  изменялись в интервале (450...1030) МПа,  $\sigma_x$  – (–380...365) МПа,  $\tau_{x\varphi}$  – (–260...300) МПа. Период радиальных колебаний цилиндра также существенно зависел от угла армирования: при  $\alpha = 0$  он был максимальным,  $2T = 380$  мкс, при  $\alpha = 90^\circ$  – минимальным,  $2T = 260$  мкс. Расчеты во всех случаях проводили до момента времени 200 мкс, чтобы захватить максимальный из возможных полупериодов радиальных колебаний оболочки.

Таким образом, при выбранной схеме армирования между критериями Ашкенази и Цая–Ву отмечалось только качественное удовлетворительное согласование: фиксировалась одна и та же опасная точка и приблизительно один и тот же опасный момент времени, зависимость максимальных величин функций прочности  $\Phi$  и  $\sqrt{\Psi}$  от угла армирования при этом была слабой. Количественно результаты, получаемые по этим критериям, различались почти вдвое.

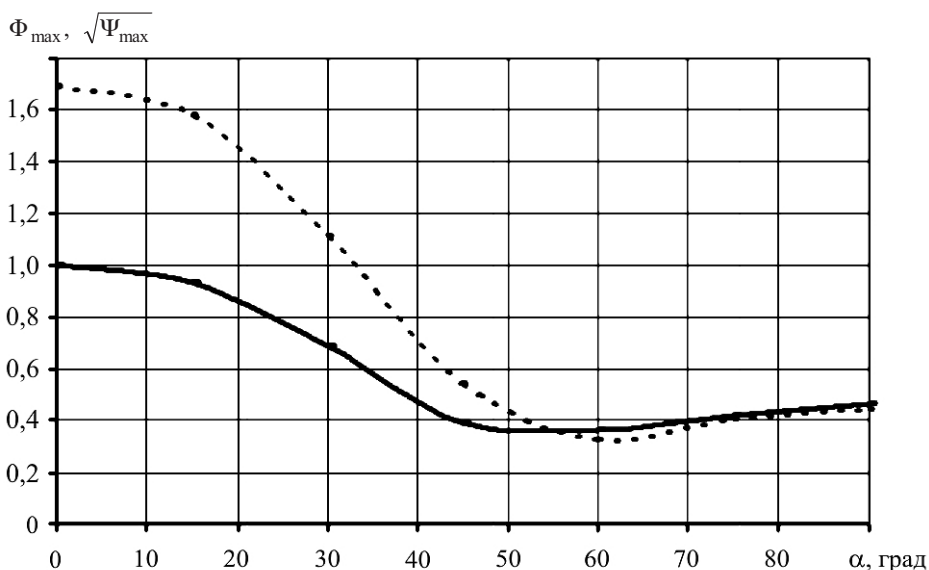


Рис. 3. Сравнительный анализ критериев Ашкенази и Цая–Ву при динамическом нагружении спирально ортотропных цилиндров.

Если изменить схему армирования на такую:  $x' = X$ ,  $\varphi' = Z$ ,  $r = Y$ , то, как показывают расчеты, не удастся добиться даже качественного согласования критериев. Два критерия будут диагностировать различные опасные точки и опасные времена, а представление о зависимости максимальных величин  $\Phi$  и  $\sqrt{\Psi}$  от угла армирования дает рис. 3, где сплошная линия соответствует критерию Цая–Ву, пунктирная – критерию Ашкенази. Совпадение кривых на участке  $55^\circ < \alpha < 90^\circ$  исходя из вышеизложенного является, скорее всего, просто случайным: при  $\alpha < 55^\circ$  гораздо более консервативным (до 70%) был критерий Ашкенази, при  $\alpha > 55^\circ$  результаты по обоим критериям практически совпали, несколько консервативнее оказался критерий Цая–Ву.

## Выводы

1. При оценке прочности конкретного КМ можно использовать только те критерии разрушения, которые удовлетворяют необходимым правилам. Существует целый ряд материалов, по крайней мере экспериментальных данных, к которым неприменим ни один из четырех рассмотренных критериев прочности.

2. Если сформулированным правилам удовлетворяют одновременно несколько критериев, расчетные данные по прочности композита могут существенно различаться (несколько сот процентов). Поэтому для окончательного выбора наиболее адекватного критерия прочности необходимо проводить дополнительный анализ, основанный на тех или иных физических (феноменологических) соображениях.

## Резюме

Сформульовано правила, яких необхідно дотримуватись, обираючи той чи інший критерій міцності композита. Для конкретного ортотропного матеріалу виконано порівняльний аналіз критеріїв міцності Ашкеназі та Цая–Ву і встановлено їх погану узгодженість між собою. Запропоновано уточнення критерію Цая–Ву для композитів, що мають однакову міцність при розтязі і стиску.

1. Федоренко А. Г., Сырунин М. А., Иванов А. Г. Динамическая прочность оболочек из ориентированных волокнистых композитов при взрывном нагружении (обзор) // Прикл. механика и теорет. физика. – 1993. – № 1. – С. 126 – 133.
2. Рыжанский В. А., Русак В. Н., Иванов А. Г. Оценка взрывостойкости цилиндрических композитных оболочек // Физика горения и взрыва. – 1999. – 35, № 1. – С. 115 – 121.
3. Цыпкин В. И., Русак В. Н., Иванов А. Г. и др. Деформация и разрушение двухслойных металлопластиковых оболочек при внутреннем импульсном нагружении // Механика композитных материалов. – 1987. – № 5. – С. 833 – 838.
4. Ашкенази Е. К., Ганов Э. В. Анизотропия конструкционных материалов. Справочник. – Л.: Машиностроение, 1980. – 247 с.

5. *Прочность материалов и конструкций* / Под общ. ред. В. Т. Трощенко. – Т. 3. Прочность толстостенных оболочек вращения при импульсном нагружении / П. П. Лепихин, В. А. Ромашенко. – Киев: Ин-т пробл. прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, 2010. – 320 с.
6. *Tsai S. W. and Wu E. M. A general theory of strength for anisotropic materials* // *J. Comp. Mater.* – 1971. – **5**. – P. 58 – 80.
7. *Композиционные материалы*. В 8 т. / Под ред. Л. Браутмана, Р. Крока. – Т. 2. Механика композиционных материалов / Под ред. Дж. Сендецки. – М.: Мир, 1978. – 568 с.
8. *Onkar A. K., Upadhyay C. S., and Yadav D. Probabilistic failure of laminated composite plates using the stochastic finite element method* // *Comp. Struct.* – 2007. – **77**. – P. 79 – 91.
9. *Zhao G. P. and Cho C. D. Damage initiation and propagation in composite shells subjected to impact* // *Ibid.* – 2007. – **78**. – P. 91 – 100.
10. *Абросимов Н. А., Баженов В. Г., Елесин А. В. Численный анализ динамического деформирования и потери устойчивости композитных оболочек вращения при импульсном нагружении* // *Механика композитных материалов*. – 1995. – **31**, № 1. – С. 65 – 71.
11. *Баум Ф. А., Орленко Л. П., Станюкович К. П. и др. Физика взрыва*. 2 изд. – М.: Наука, 1975. – 704 с.
12. *Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела*. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
13. *Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов*. – Киев: Дельта, 2008. – 816 с.
14. *Кривошеина М. Н., Радченко А. В., Кобенко С. В. Разрушение ортотропного и изотропного сферических тел под действием импульса всестороннего сжатия* // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2001. – **7**, № 1. – С. 95 – 102.
15. *Кривошеина М. Н., Кобенко С. В., Туч Е. В. Усреднение свойств композиционных анизотропных материалов при численном моделировании их разрушения* // *Физ. мезомеханика*. – 2010. – **13**. – С. 55 – 60.

Поступила 10. 02. 2011