

## **К вопросу приближенного определения вибродиагностического параметра нелинейности упругого тела, обусловленной наличием дышащей трещины, при субгармоническом резонансе**

**В. В. Матвеев, О. Е. Богинич**

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

*Оценивается достоверность одного из наиболее простых методов расчета параметров колебательного процесса в области субгармонического резонанса упругого тела при наличии дышащей трещины, моделируемого системой с одной степенью свободы с билинейной асимметричной характеристикой восстанавливающей силы. Метод базируется на положении, что в нелинейной системе субгармонические колебания существуют наряду с основными вынужденными и представляют свободные колебания, поддерживаемые вынуждающей силой.*

**Ключевые слова:** субгармонический резонанс, вибродиагностика усталостного повреждения, дышащая трещина, нелинейные колебания.

**Введение.** В связи с опасностью появления усталостных трещин в конструкциях, эксплуатируемых в условиях вибрационного нагружения, вопросы колебаний упругих тел при наличии трещин и разработки методов их вибродиагностики представляют интерес для многих исследователей. Состояние с изучением этих вопросов дано, в частности, в обзорах [1–3].

Наибольшее развитие в этом направлении получили работы по исследованию влияния трещин на изменение собственных частот и форм колебаний [3–7]. Однако чувствительность данных параметров к наличию малых и закрывающихся трещин относительно низкая. Это обусловило повышенный интерес к исследованию нелинейных эффектов при вынужденных колебаниях упругих тел с закрывающейся, или дышащей трещиной (breathing crack) в области супер- и субгармонических резонансов [8–17]. При этом как при аналитическом решении [11, 12], так и численном с использованием конечно-элементной модели и метода нормальных форм колебаний, или главных координат [13–15, 18] рассматривается одна резонирующая форма колебаний, и получаемые дифференциальные уравнения колебаний для полуцикла открытой и закрытой трещины, отличающиеся главным образом матрицами жесткости, фактически сводят задачу к исследованию вынужденных колебаний как системы с одной степенью свободы.

При относительно малых размерах трещины нормального отрыва можно пренебречь некоторым изменением формы колебаний при открытии трещины, и для данной резонирующей формы колебаний упругое тело рассматривать как систему с одной степенью свободы с билинейной асимметричной характеристикой восстанавливающей силы [19–26]. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний такой системы в случае вязкого трения удобно представить в виде [22, 26]

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2h \frac{du}{dt} + \omega^2 [1 - 0,5\alpha(1 + \text{sign } u)]u = q \sin vt, \quad (1)$$

где параметр нелинейности системы  $\alpha$  равен относительному изменению ее жесткости  $K$  при открытии трещины,

$$\alpha = (K - K_T)/K \quad (2)$$

( $K_T$  – жесткость системы с открытой трещиной).

Параметр  $\alpha$  во многих случаях удобно определять через энергетическую характеристику поврежденности  $\kappa$  [16]:

$$\alpha = \kappa/(1 + \kappa), \quad \kappa = \Delta\Pi_T/\Pi_0, \quad (3)$$

где  $\Delta\Pi_T$  – приращение потенциальной энергии деформации упругого тела, обусловленное наличием открытой трещины и вычисляемое через коэффициент интенсивности нормальных напряжений на основе анализа номинального напряженного состояния неповрежденного тела ( $\alpha = 0$ ) при его вынужденных колебаниях в исследуемой резонансной области;  $\Pi_0$  – потенциальная энергия деформации также неповрежденного тела, соответствующая составляющей его деформирования по резонирующей форме при указанных колебаниях.

Колебательная система, описываемая уравнением (1), относится к специфическому классу существенно нелинейных систем – так называемой кусочно-линейной системе, усложненной в данном случае несимметричностью упругой характеристики, обуславливающей неизвестность момента изменения знака перемещения.

Как известно [27], аналитическое решение уравнения (1) для случая вынужденных колебаний ( $q \neq 0$ ) ввиду сложности находится для области супер- и субгармонического резонансов с использованием приближенных методов: гармонического баланса, усреднения, Крылова–Боголюбова и др. Относительная громоздкость получаемых зачастую определяющих уравнений либо трудности в определении удобных для анализа зависимостей обуславливают необходимость применения имеющих недостатки численных методов, например усреднения по ускорению или Рунге–Кутта, с последующим выполнением гармонического анализа. Трудности возникали и при получении решений для области основного резонанса, результаты которых в отдельных случаях [24, 28] не соответствовали действительной картине колебательного процесса.

Для свободных колебаний и основного резонанса с помощью асимптотического метода нелинейной механики ранее [22] получено простое приближенное решение, определяющее (при введении нового сдвига фаз  $\psi = -\pi/2 + \gamma$ ) следующие простые соотношения между основными гармониками колебательного процесса:

$$u(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega_0 t + \gamma) + \sum_{n=2,4,\dots} A_n \cos n(\omega_0 t + \gamma), \quad (4)$$

где

$$A_0 = \frac{\alpha}{\pi} A_1; \quad A_n = \frac{2\alpha}{\pi(n^2 - 1)^2} A_1; \quad \omega_0 = \sqrt{1 - 0,5\alpha} \omega. \quad (5)$$

Для супер- и субгармонического резонансов возможно использование простого метода: удовлетворение уравнения (1) на каждой четверть цикла преобладающей гармоники в моменты известного знака перемещения [25, 26]. В частности, для области сильного субгармонического резонанса порядка 1/2, т.е. при частоте возбуждения  $\nu$ , равной удвоенной частоте свободных колебаний ( $\nu \approx 2\omega_0$ ), получена зависимость основного вибродинамического параметра наличия трещины от параметра нелинейности системы  $\alpha$ , а именно: отношения амплитуды основной (первой) резонирующей гармоники  $A_1$  к амплитуде гармоники с частотой возбуждения  $A_2$ :

$$\bar{A}_{1/2} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{\alpha\omega^2}{2h\nu} \cos \Delta\gamma, \quad (6)$$

где

$$\Delta\gamma = \text{arctg} \frac{\left[ (2 - \alpha) - \frac{1}{2} \left( \frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right] - 0,5\alpha^2}{2h\nu/\omega^2}. \quad (7)$$

В настоящем сообщении рассматривается более простой и точный метод нахождения решений уравнения (1) как для субгармонического, так и основного резонансов. При этом полагали, что для данной нелинейной системы периодическое движение при основном резонансе представляет собой свободные колебания системы, поддерживаемые вынуждающей силой. Субгармонические колебания также представляют свободные колебания, поддерживаемые данным возбуждением, но существуют наряду с основными вынужденными колебаниями при частоте возбуждения, равной одной из высших гармоник свободных колебаний. В обоих случаях амплитуды резонансных колебаний следует определять из баланса подводимой и рассеиваемой энергии за период основной гармоники свободных колебаний.

**Свободные колебания.** Для свободных колебаний ( $q = 0$ ) использование метода припасовывания позволяет получить точное решение уравнения (1) [19, 24, 28]. Так, при начальных условиях  $u(0) = 0$  и  $\dot{u}(0) = -\nu_0$ , пренебрегая затуханием колебаний в пределах одного цикла и несущественным влиянием вязкого трения на частоту колебаний, решение можно записать в виде

$$u(t) = \begin{cases} \frac{\nu_0}{\omega} \sin \omega t, & -\frac{\pi}{\omega} \leq t \leq 0; \\ \frac{\nu_0}{\omega_T} \sin \omega_T t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega_T}, \end{cases} \quad (8)$$

где  $\omega_T = \sqrt{1 - \alpha} \omega$ .

Представив нелинейную функцию (8) в виде ряда Фурье

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t), \quad (9)$$

найдем

$$a_k = \frac{\omega_0}{\pi} \nu_0 \left[ \frac{1 + \cos k\pi \frac{\omega_0}{\omega_\tau}}{\omega_\tau^2 - k^2 \omega_0^2} - \frac{1 + \cos k\pi \frac{\omega_0}{\omega}}{\omega^2 - k^2 \omega_0^2} \right]; \quad (10a)$$

$$b_k = \frac{\omega_0}{\pi} \nu_0 \left[ \frac{\sin k\pi \frac{\omega_0}{\omega_\tau}}{\omega_\tau^2 - k^2 \omega_0^2} + \frac{\sin k\pi \frac{\omega_0}{\omega}}{\omega^2 - k^2 \omega_0^2} \right]; \quad (10b)$$

$$\omega_0 = \frac{2\omega\omega_\tau}{\omega + \omega_\tau} = \frac{2\sqrt{1-\alpha}}{1 + \sqrt{1-\alpha}} \omega \approx \sqrt{1-0,5\alpha} \omega. \quad (11)$$

Сравнение результатов расчета параметров точного решения (9) с приближенным (4) позволяет, пренебрегая менее значимыми нечетными гармониками, записать решение в более простом виде (4), уточнив значения  $A_0$  и  $A_n$ :

$$A_0 = \frac{\alpha}{\pi} (1 + 0,6\alpha) A_1; \quad A_n = \frac{2\alpha(1 + 0,6\alpha)}{\pi(n^2 - 1)^2} A_1. \quad (12)$$

**Основной резонанс** ( $\nu \approx \omega_0$ ). Принимая решение уравнения (1) в виде (4) с учетом (12) и возможных значений амплитуд высших гармоник при допустимой вследствие пренебрежения изменением формы колебаний величине параметра  $\alpha \leq 0,3$ , амплитуда первой, основной гармоники определится с достаточной точностью из решения линеаризованного уравнения  $\ddot{u} + 2h\dot{u} + \omega_0^2 u = q \sin \nu t$ :

$$A_1 = \frac{q}{\sqrt{(\omega_0^2 - \nu^2)^2 + 4h^2 \nu^2}}; \quad \text{tg } \gamma = \frac{-2h\nu}{\omega_0^2 - \nu^2}. \quad (13)$$

Сравнение результатов расчета по формулам (12), (13) с данными численного решения уравнения (1) с использованием метода Рунге-Кутты с последующим гармоническим анализом показывает их хорошее согласование в диапазоне изменения частоты возбуждения  $\nu = (1 \pm 0,01\%) \omega_0$ .

В табл. 1 приведены величины расхождения (в %) результатов расчета постоянной составляющей ( $\Delta_0$ ), амплитуды первой ( $\Delta_1$ ) и второй ( $\Delta_2$ ) гармоник колебательного процесса в области основного резонанса для ряда значе-

ний параметра  $\alpha$  и коэффициента вязкого демпфирования  $h$  при различном относительном отклонении ( $\Delta\nu$ ) частоты возбуждения  $\nu$  от собственной частоты системы  $\omega_0$  с указанием соответствующего уровня резонансного пика  $A/A_{\max}$ .

Т а б л и ц а 1

Оценка погрешности расчета по формулам (12), (13) значений параметров колебаний при основном резонансе

| $h$    | $\alpha$ | $\Delta\nu, \%$ | $A/A_{\max}$ | $\Delta_0, \%$ | $\Delta_1, \%$ | $\Delta_2, \%$ |
|--------|----------|-----------------|--------------|----------------|----------------|----------------|
| 0,0016 | 0,200    | 0               | 1,00         | 0,437          | 0,105          | 0,589          |
|        |          | 0               | 1,00         | 0,026          | 0,171          | 0,279          |
|        |          | 0               | 1,00         | 0,676          | 0,216          | 0,030          |
|        | 0,200    | -0,659          | 0,25         | 0,435          | 0,122          | -1,171         |
|        |          | -0,294          | 0,50         | 0,435          | 0,131          | -0,198         |
|        |          | 0,293           | 0,50         | 0,438          | 0,068          | 1,377          |
|        |          | -0,173          | 0,70         | 0,436          | 0,132          | 0,128          |
| 0,0080 | 0,200    | -3,333          | 0,25         | 0,426          | 0,113          | -8,194         |

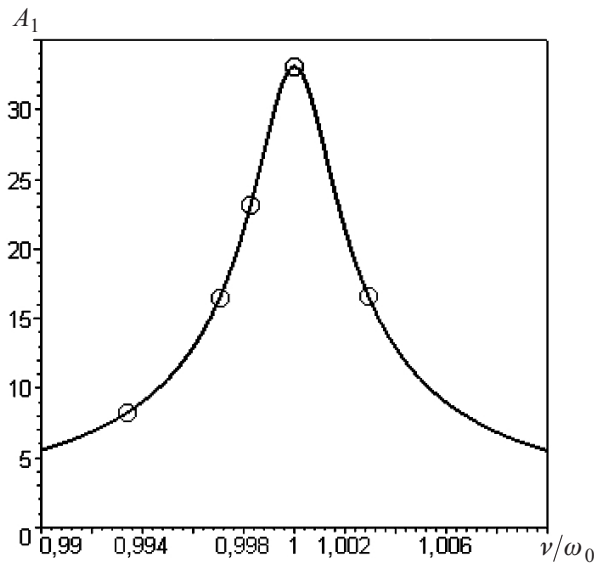


Рис. 1. Расчетная амплитудно-частотная характеристика основной гармоники резонансных колебаний. (Здесь и на рис. 2–4: точки – данные численного решения.)

На рис. 1 в качестве примера приведена расчетная амплитудно-частотная характеристика основной (первой) гармоники резонансных колебаний, рассчитанная с использованием формулы (13) при  $q=0,1$ ;  $\omega=1$ ;  $h=0,0016$  и  $\alpha=0,2$ .

Относительные значения постоянной составляющей  $\bar{A}_0 = A_0/A_1$  и амплитуды второй гармоники  $\bar{A}_2 = A_2/A_1$ , определяемые из формул (12), могут служить вибродиагностическими параметрами степени нелинейности системы,

обусловленной наличием трещины, которые не зависят ни от значений вынуждающей силы ни от демпфирующей способности системы. Преимущество использования этих параметров по сравнению с относительным изменением резонансной частоты, или частоты свободных колебаний  $\bar{\omega}_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - \alpha}}{1 + \sqrt{1 - \alpha}}$  состоит в исключении трудоемкой процедуры паспортизации исходных значений собственных частот и условий закрепления конструктивных элементов. Однако существенный их недостаток – весьма низкая чувствительность, соизмеримая с изменением резонансной частоты (рис. 2).

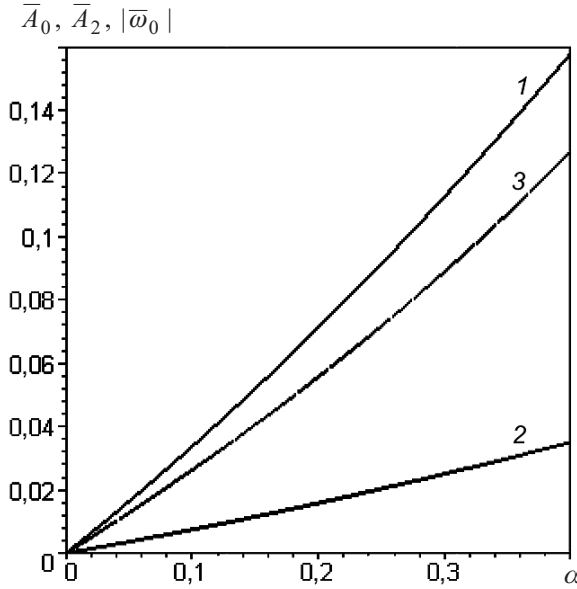


Рис. 2. Расчетные зависимости относительных амплитуд  $\bar{A}_0$  (1),  $\bar{A}_2$  (2) и частоты  $\bar{\omega}_0$  (3) от параметра поврежденности  $\alpha$ .

**Субгармонический резонанс.** При частоте возбуждения, близкой к частоте  $k$ -й гармоники ( $\nu \approx k\omega_0$ ) свободных колебаний (4), возможно возникновение субгармонического резонанса порядка  $1/k$ . Согласно принятому положению о физической природе субгармонического резонанса полагаем, что при рассматриваемом возбуждении наряду с основными вынужденными колебаниями  $A_B \sin(\nu t + \gamma_B)$  возникают колебания со спектром свободных колебаний, или основного резонанса  $A_1 \sin\left(\frac{\nu}{k} t + \gamma\right) + \sum_{n=2,4,\dots} A_n \cos\left(n \frac{\nu}{k} t + \gamma_n\right)$ , и решение уравнения (1) можно представить в виде

$$u(t) = A_0 + A_1 \sin\left(\frac{\nu}{k} t + \gamma\right) + A_B \sin(\nu t + \gamma_B) + A_k \sin(\nu t + \bar{\gamma}_k) + \sum_{n \neq k} A_n \cos\left(n \frac{\nu}{k} t + \gamma_n\right), \quad (14)$$

где  $A_0$  и  $A_n$  определяются через амплитуду низшей, первой гармоники по формулам (12);  $\bar{\gamma}_k = \pi/2 + \gamma_k$ ;  $\gamma_k = k\gamma$ ;  $\gamma_n = n\gamma$ .

В данном случае пренебрегаем нечетными гармониками и исключаем возможность возникновения соответствующего порядка субгармонических резонансов. Для их учета необходимо использовать полученное для свободных колебаний точное решение (9).

Амплитуда  $A_B$  и сдвиг фазы  $\gamma_B$  основных вынужденных колебаний определяются, как и при основном резонансе, из решения линеаризованного уравнения колебаний по формулам (13) при  $\nu \approx k\omega_0$ . Отметим, что в отличие от известного предположения [29], согласно которому при субгармоническом резонансе закон движения соответствует закону свободных колебаний, в данном случае полагаем существование субгармонических колебаний наряду с основными вынужденными.

Подводимая энергия, поддерживающая свободные колебания, определяется работой вынуждающей силы на перемещениях только их  $k$ -й гармоники за период колебаний первой гармоники  $T = 2\pi(k/\nu)$ :

$$\Delta W_q = k\pi q A_k \sin \bar{\gamma}_k = \frac{2k\alpha(1+0,6\alpha)}{\pi(k^2-1)^2} A_1 \sin \bar{\gamma}_k, \quad (15)$$

где

$$\bar{\gamma}_k = \arctg \frac{-2h\nu}{(k\omega_0)^2 - \nu^2}. \quad (16)$$

Работа диссипативных сил, в данном случае вязкого трения, на перемещениях свободных колебаний за период  $T$  будет

$$\begin{aligned} \Delta W_h &= 2\pi h \left( \frac{\nu}{k} A_1^2 + \sum_{n=2,4,\dots} n \frac{\nu}{k} A_n^2 \right) = \\ &= 2\pi \frac{\nu}{k} h \left[ 1 + \sum_{n=2,4,\dots} n \left( \frac{2\alpha(1+0,6\alpha)}{\pi(n^2-1)^2} \right)^2 \right] A_1^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Из условия баланса энергий, учитывая, что для приемлемых в случае рассматриваемого моделирования упругой системы с трещиной значений  $\alpha \leq 0,3$  [30] величиной суммы – второго члена в квадратных скобках можно пренебречь, и, выражая  $\sin \bar{\gamma}_k$  через значение тангенса (16), находим

$$A_1 = \frac{2\alpha(1+0,6\alpha)k^2 q}{\pi(k^2-1)^2 \sqrt{[(k\omega_0)^2 - \nu^2]^2 + 4h^2\nu^2}}. \quad (18)$$

Далее необходимо учитывать, что при спектральном анализе колебательного процесса будет определяться результирующая двух представленных в (14) гармоник с частотой  $\nu \approx k\omega_0$ :

$$A_B \sin(\nu t + \gamma_B) + A_k \sin(\nu t + \bar{\gamma}_k) = A_{k\Sigma} \sin(\nu t + \gamma_{k\Sigma}) \quad (19)$$

при

$$A_{k\Sigma} = \sqrt{A_B^2 + A_k^2 + 2A_B A_k \cos(\gamma_B - \gamma_k)}; \quad (20)$$

$$\gamma_{k\Sigma} = \arctg \frac{A_B \sin \gamma_B + A_k \sin \bar{\gamma}_k}{A_B \cos \gamma_B + A_k \cos \bar{\gamma}_k}, \quad (21)$$

где  $A_B$  и  $\gamma_B$  вычисляются по формулам (13) при  $A_1 \equiv A_B$  и  $\gamma \equiv \bar{\gamma}_k$ , а  $A_k$  и  $\bar{\gamma}_k$  – по (12), (16) при учете (18).

Следовательно, основным вибродиагностическим параметром поврежденности системы при субгармоническом резонансе будет не отношение амплитуд  $A_1$  к  $A_k$ , как это следует из [30], а отношение амплитуд  $A_1$  к  $A_{k\Sigma}$ .

Оценим достоверность результатов расчета на примере наиболее значимого в данном случае субгармонического резонанса порядка  $1/2$  ( $\nu \approx 2\omega_0$ ,  $k = 2$ ). Для настроенного резонанса ( $\nu = 2\omega_0$ ,  $\bar{\gamma}_2 = -\pi/2$ ,  $\gamma_2 = -\pi$ ), учитывая что  $\gamma_B \ll |\bar{\gamma}_2|$  и  $\cos(\gamma_B - \bar{\gamma}_2)$  можно принять равным нулю, получаем в явном виде относительно простую зависимость вибродиагностического параметра  $\bar{A}_{1/2} = A_1/A_{2\Sigma}$  от параметра  $\alpha$ :

$$\bar{A}_{1/2} = \frac{2\alpha(1 + 0,6\alpha)\omega_0}{9\pi h \sqrt{\frac{1}{9} + \left[ \left( \frac{2\alpha(1 + 0,6\alpha)}{9\pi} \right)^2 \frac{\omega_0}{h} \right]^2}}. \quad (22)$$

Как видно, отношение амплитуд гармоник колебательного процесса при субгармоническом резонансе, в отличие от основного резонанса, существенно зависит от демпфирующей способности колебательной системы, но, как и при основном резонансе, не зависит от уровня возбуждения.

Сравнение расчетных значений  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\bar{A}_{1/2}$  с данными численного решения уравнения (1) показывает весьма хорошее их согласование. В качестве примера в табл. 2 для параметров системы  $\omega = 1$ ,  $q = 0,1$ ,  $h = 0,0008$  приведены результаты расчета и численного определения параметров  $A_1$  и  $\bar{A}_{1/2}$ .

Отметим, что возможность достоверного определения указанных параметров колебательного процесса в резонансной области, т.е. использование формул (18)–(21), ограничивается некоторой величиной отклонения частоты возбуждения  $\nu$  от частоты соответствующей гармоники свободных колебаний, равной  $2\omega_0$  (табл. 3). Значимость указанной резонансной области зависит от добротности системы, определяемой коэффициентом вязкого демпфирования  $h$ . Так, при относительно высокой добротности системы ( $h = 0,0008$ ) приемлемое изменение частоты возбуждения, как и при основном резонансе (рис. 2), охватывает практически весь резонансный пик (рис. 3). Таким образом, применимость рассматриваемого метода определения параметров колебательного процесса при субгармоническом резонансе определяется не уровнем отличия фиксируемой амплитуды колебаний  $A$  от максимальной резонансной амплитуды  $A_{рез}$ , а расстройкой частот  $\nu$  и  $k\omega_0$  (табл. 2, 3).



Т а б л и ц а 2

Данные расчета и численного определения параметров  $A_1$  и  $\bar{A}_{1/2}$  при настроенном резонансе

| $\alpha$ | $A_1$          | $\bar{A}_{1/2}$ |
|----------|----------------|-----------------|
| 0,100    | <u>0,96259</u> | <u>26,81775</u> |
|          | 0,95944        | 26,45444        |
| 0,150    | <u>1,50684</u> | <u>37,49332</u> |
|          | 1,50133        | 37,43809        |
| 0,200    | <u>2,09748</u> | <u>41,93237</u> |
|          | 2,08674        | 41,86130        |
| 0,250    | <u>2,73868</u> | <u>40,38487</u> |
|          | 2,72923        | 40,27370        |
| 0,277    | <u>3,10772</u> | <u>38,25385</u> |
|          | 3,09640        | 38,58801        |
| 0,350    | <u>4,19456</u> | <u>31,67311</u> |
|          | 4,19482        | 31,37885        |

**Примечание.** Здесь и в табл. 3: над чертой приведены данные расчета, под чертой – численное решение.

Т а б л и ц а 3

Данные расчета и численного определения параметров  $A_1$ ,  $A_{2\Sigma}$  и  $\bar{A}_{1/2}$  в резонансной области

| $\frac{\nu - 2\omega_0}{2\omega_0}, \%$ | $h/q$      | $A/A_{рез}$ | $A_1$          | $A_{2\Sigma}$  | $\bar{A}_{1/2}$ |
|---|------------|-------------|----------------|----------------|-----------------|
| -0,0694                                 | 0,0008/0,1 | 0,48684     | <u>1,00321</u> | <u>0,05197</u> | <u>19,3110</u>  |
|   |            |             | 1,00617        | 0,04940        | 20,3641         |
| -0,4033                                 | 0,0080/1,0 | 0,71233     | <u>1,43840</u> | <u>0,39515</u> | <u>3,6410</u>   |
|   |            |             | 1,45621        | 0,36316        | 4,0097          |
| -2,4800                                 | 0,0160/1,0 | 0,45580     | <u>0,31010</u> | <u>0,40791</u> | <u>0,7600</u>   |
|   |            |             | 0,23833        | 0,40305        | 0,5913          |

В заключение сравним результаты расчета зависимости вибродиагностического параметра  $\bar{A}_{1/2}$  по формуле (22) с полученной (6) другим методом. На рис. 4 приведены зависимости  $\bar{A}_{1/2}(\alpha)$  для системы с коэффициентом  $h = 0,0008$  при настроенном резонансе ( $\nu = 2\omega_0$ ).

Как видно, решение (22) полностью согласуется с численным, а (6) приводит к существенному и возрастающему расхождению результатов при значениях параметра нелинейности колебательной системы  $\alpha \geq 0,25$ . В определенной мере это обусловлено недостаточно точным заданием величины постоянной составляющей  $A_0$ . В данном случае используется значение  $A_0 = (\alpha/\pi)A_1$ , полученное для спектра гармоник основного резонанса (5) и не учитывающее возможное влияние основных вынужденных колебаний  $A_B \sin(\gamma t + \gamma_B)$  в области субгармонического резонанса. Установлено, что при

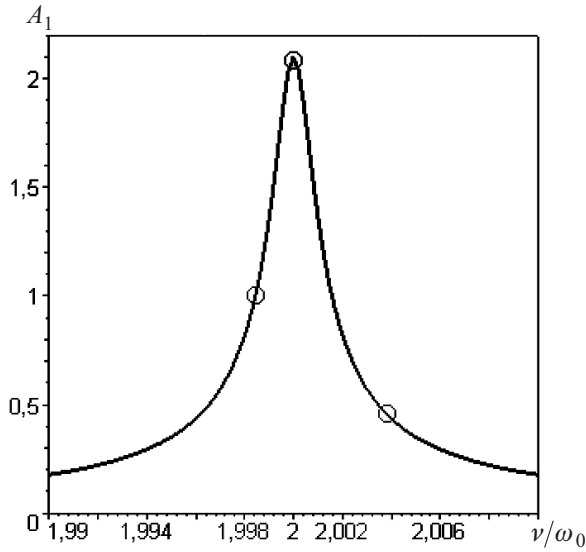


Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика основной резонирующей гармоники в области субгармонического резонанса ( $\nu \approx 2\omega_0$ ), построенная с использованием формулы (18) при  $q = 0,1$ ,  $\alpha = 0,2$ ,  $\omega = 1$  и  $h = 0,0008$ .

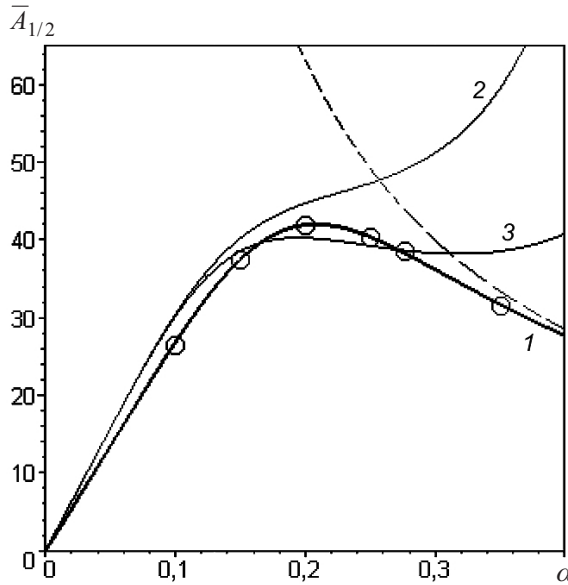


Рис. 4. Расчетные зависимости вибродиагностического параметра  $\bar{A}_{1/2}$  от параметра нелинейности системы  $\alpha$  при  $q = 0,1$ ,  $\omega = 1$  и  $h = 0,0008$ , определенные по формулам (22) – 1 и (6), (7) при значении коэффициента при  $\alpha^2$ , равном  $0,5 - 2$  и  $0,5(1 + 0,08\alpha) - 3$ .

незначительном изменении величины  $A_0$  уже при  $\alpha > 0,2$  отмечается существенное влияние на рассматриваемый вибродиагностический параметр. Так, при увеличении  $A_0$  и соответственно коэффициента при  $\alpha^2$  в формуле (7) в  $(1 + 0,08\alpha)$  раза, что при  $\alpha = 0,3$  составляет всего 2,4%, существенно изменяется расчетная зависимость  $\bar{A}_{1/2}(\alpha)$  в области больших значений параметра  $\alpha$ .

Для оценки значимости учета гармоник вынужденных колебаний  $A_B \sin(\nu t + \gamma_B)$  на рис. 4 штриховой линией показана зависимость  $\bar{A}_{1/2}(\alpha) = \frac{9\pi}{2\alpha(1+0,6\alpha)}$ , которая следует из принятого в [29] предположения, что закон

движения при субгармоническом резонансе не соответствует закону свободных колебаний (4), (12). Как видно, значение  $\bar{A}_{1/2}(\alpha)$  в этом случае существенно отличается от полученного по формуле (22) и численного решения, особенно в области наиболее важных для диагностики малых значений параметра  $\alpha$ , и не зависит от величины коэффициента  $h$ .

**Заключение.** Рассмотрено наиболее простое приближенное решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний существенно нелинейной системы (1) для области субгармонических резонансов. Решение получено исходя из положения, что субгармонические колебания возникают наряду с основными вынужденными и представляют собой спектр свободных колебаний системы, поддерживаемых вынуждающей силой, а их уровень определяется из баланса подводимой и рассеиваемой энергий за период основной, первой гармоники. Результаты расчета параметров колебательного процесса для области субрезонанса порядка  $1/2$  показали их строгое соответствие данным численного решения уравнения (1) методом Рунге-Кутты с последующим гармоническим анализом полученного решения.

Отношение амплитуд основной, первой гармоники субгармонических колебаний и гармоники с частотой возбуждения является весьма высокочувствительным вибродиагностическим параметром степени нелинейности колебательной системы, обусловленной наличием дышащей трещины.

## Резюме

Оцінюється достовірність одного з найбільш простих методів розрахунку параметрів коливального процесу в області субгармонічного резонансу пружного тіла за наявності дихаючої тріщини, що моделюється системою з одним ступенем вільності з білінійною асиметричною характеристикою відновлювальної сили. Метод базується на положенні, що в нелінійній системі субгармонічні коливання є поряд з основними вимушеними і представляють вільні коливання, що підтримуються вимушеною силою.

1. *Krawczuk M. and Ostachowicz W.* Damage indicators for diagnostic of fatigue cracks in structures by vibration measurements – a survey // *Mech. Teoret. Stosow.* – 1996. – **34**, No. 2. – P. 307 – 326.
2. *Dimorogonas A. D.* Vibration of cracked structures: a state of the art review // *Eng. Fract. Mech.* – 1996. – **55**. – P. 831 – 857.
3. *Salawu O. S.* Detection of structural damage through changes in frequency: a review // *Eng. Struct.* – 1997. – **19**. – P. 718 – 723.
4. *Kim T. J. and Stubbs N.* Improved damage identification method based on modal information // *J. Sound Vibr.* – 2002. – **252**. – P. 223 – 238.
5. *Lee J.* Identification of multiple cracks in a beam using natural frequencies // *Ibid.* – 2009. – **320**, No. 3. – P. 482 – 490.

6. Douka E., Loutridis S., and Trochidis A. Crack identification in beams using wavelet analysis // *Int. J. Solids Struct.* – 2003. – **40**. – P. 3557 – 3569.
7. Kim T. J., Ryu Y. S., Cho H. M., and Stubbs N. Damage identification in beam-type structures; frequency-based method vs mode shape-based method // *Eng. Struct.* – 2003. – **25**. – P. 57 – 67.
8. Цыфанский С. Л., Магоне М. А., Ожиганов В. М. Об использовании нелинейных эффектов для обнаружения трещин в стержневых элементах конструкций // *Дефектоскопия.* – 1985. – № 3. – С. 77 – 82.
9. Tsyfansky S. L. and Beresnevich V. I. Detection of fatigue cracks in flexible geometrically non-linear bars by vibration monitoring // *J. Sound Vibr.* – 1998. – **213**, No. 1. – P. 159 – 168.
10. Tsyfansky S. L. and Beresnevich V. I. Non-linear vibration method for detection of fatigue cracks in aircraft wings // *Ibid.* – 2000. – **236**, No. 1. – P. 49 – 60.
11. Плахтиенко Н. П., Ясинский С. А. О резонансе второго порядка при колебаниях балки, содержащей поперечную трещину // *Пробл. прочности.* – 1995. – № 3. – С. 56 – 63.
12. Плахтиенко Н. П. Резонанс второго порядка пластины, содержащей протяженные дефекты целостности // *Там же.* – 2001. – № 1. – С. 105 – 116.
13. Ruotolo R., Surace C., Crespo P., and Storer D. Harmonic analysis of the vibrations of cantilevered beam with closing crack // *Comp. Struct.* – 1996. – **61**, No. 6. – P. 1057 – 1074.
14. Bovsunovskii A. P., Surace C., and Bovsunovskii O. A. The effect of damping and force application point on the non-linear dynamic behavior of a cracked beam at sub- and super-resonance vibrations // *Пробл. прочности.* – 2006. – № 5. – С. 61 – 67.
15. Бовсуновский А. П., Бовсуновский О. А. Использование нелинейных резонансов для диагностики закрывающихся трещин в стержневых элементах // *Там же.* – 2010. – № 3. – С. 125 – 141.
16. Матвеев В. В., Богинич О. Е., Яковлев А. П. Метод приближенного аналитического определения вибродиагностического параметра наличия трещины в упругой системе с распределенными параметрами при супер- и субгармоническом резонансах // *Там же.* – № 5. – С. 62 – 83.
17. Andreaus U. and Baragatti P. Cracked beam identification by numerically analysing the nonlinear behaviour of the harmonically forced response // *J. Sound Vibr.* – 2011. – **330**, No. 4. – P. 721 – 742.
18. Бовсуновский О. А. Конечноэлементная модель для исследования колебаний стержня с закрывающейся трещиной // *Пробл. прочности.* – 2008. – № 5. – С. 114 – 120.
19. Карасев В. А., Ройтман А. Б. Доводка эксплуатируемых машин. Вибродиагностические методы. – М.: Машиностроение, 1986. – 192 с.
20. Плахтиенко Н. П. К диагностике кусочно-постоянной жесткости при нелинейных резонансах // *Прикл. механика.* – 1991. – **27**, № 10. – С. 112 – 120.

21. *Wong C. W., Zhang W. S., and Lau S. L.* Periodic forced vibration of unsymmetrical piecewise-linear systems by incremental harmonic balance method // *J. Sound Vibr.* – 1991. – **149**, No. 1. – P. 91 – 105.
22. *Матвеев В. В.* К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщ. 1. Продольные колебания, аналитическое решение // *Пробл. прочности.* – 1997. – № 6. – С. 5 – 20.
23. *Rivola A. and White P. R.* Bispectral analysis of the bilinear oscillator with application to the detection of fatigue cracks // *J. Sound Vibr.* – 1998. – **216**, No. 5. – P. 889 – 910.
24. *Ройтман А. Б., Пылов А. А., Александрова Н. Б.* Продольные колебания консольного стержня с поперечной трещиной. Сообщ. 1. Малые колебания // *Пробл. прочности.* – 1999. – № 2. – С. 23 – 34.
25. *Матвеев В. В., Богинич О. Е.* Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров наличия трещины в упругом теле при супергармоническом резонансе // Там же. – 2010. – № 4. – С. 5 – 19.
26. *Матвеев В. В., Бовсуновский О. А.* Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров упругого тела с трещиной при субгармоническом резонансе. Сообщ. 2. Сильный резонанс // Там же. – 2008. – № 3. – С. 5 – 16.
27. *Крюков Б. И.* Вынужденные колебания существенно нелинейных систем. – М.: Машиностроение, 1984. – 421 с.
28. *Ройтман А. Б., Александрова Н. Б., Христенко Т. А.* Вибрационная диагностика “дышащих” трещин в изделиях // *Техн. диагностика и неразрушающий контроль.* – 2000. – № 1. – С. 58 – 67.
29. *Бидерман В. Л.* Теория механических колебаний: Учебник для вузов. – М.: Высш. шк., 1985. – 408 с.
30. *Матвеев В. В., Бовсуновский А. П.* К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщ. 3. Аналитическое и численное определение собственных частот продольных и изгибных колебаний стержней с поперечными трещинами // *Пробл. прочности.* – 1999. – № 4. – С. 19 – 31.

Поступила 03. 06. 2011