



УДК 534.3

А. О. Борисюк

Функція Гріна конвективного хвильового рівняння для нескінченної прямої жорсткостінної труби прямокутного поперечного перерізу

(Представлено академіком НАН України В. Т. Грінченком)

Побудовано функцію Гріна хвильового рівняння для нескінченної прямої жорсткої труби прямокутного поперечного перерізу з рівномірною осередненою течією. У цій функції в явному вигляді відображені ефекти зазначеної течії. Вони стають вагомішими зі збільшенням числа Маха, спричиняючи, зокрема, появу і подальше збільшення асиметрії функції відносно поперечного перерізу, в якому знаходиться одичне точкове імпульсне акустичне джерело. І навпаки, зі зменшенням числа Маха вагомість впливу течії на функцію Гріна зменшується, зумовлюючи, окрім іншого, зменшення її асиметрії.

Дослідження генерації та поширення звуку в трубах різних геометрій та розмірів становить значний інтерес для літако- та автомобілебудування, архітектури, медицини, нафтогазової промисловості, комунального господарства тощо [1–3]. Незалежно від типу механічної конструкції і акустичних джерел в ній, такі дослідження в принципі можуть бути проведені на основі методу функцій Гріна. Проте його застосування є доцільним лише у разі існування принципової можливості побудови відповідної функції Гріна.

Така можливість, окрім мистецтва та професійної кваліфікації дослідника, залежить від багатьох факторів — форми поперечного перерізу та геометрії вибраної труби, умов її закріплення, акустичних умов на її кінцях та фізичних властивостей її стінок, типу навколишнього середовища, наявності або відсутності течії в трубі тощо. Як засвідчує аналіз відповідних літературних джерел, з-поміж ситуацій, які визначаються різними комбінаціями зазначених факторів, найбільш дослідженими є випадки нескінченної прямої жорсткостінної труби кругового та прямокутного поперечного перерізів (див., наприклад, [1, 5–8]). Для таких труб побудовано відповідні функції Гріна хвильового рівняння і рівняння Гельмгольца, а також, з їх допомогою, одержано вирази для різних характеристик акустичних полів, згенерованих відповідними джерелами звуку. Проте зазвичай ці результати обмежуються випадком відсутності течії в трубі. Якщо ж наявність течії і береться до уваги, то її ефекти

© А. О. Борисюк, 2015

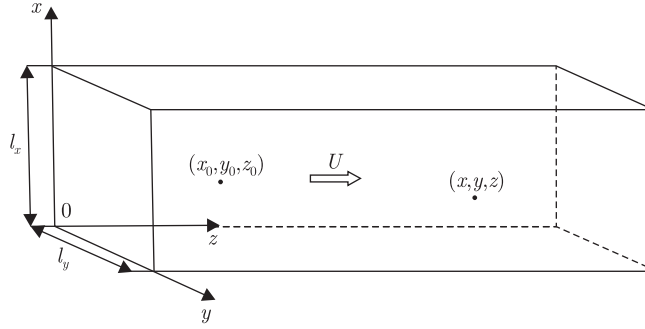


Рис. 1. Геометрія задачі

у відповідних функціях Гріна та/або кінцевих результатах проявляються лише у неявному вигляді [1, 3, 6].

У даній роботі робиться спроба певною мірою виправити цей недолік. Тут будується функція Гріна хвильового рівняння для нескінченної прямої жорсткої труби прямокутного поперечного перерізу з рівномірною осередненою течією. Ця функція має явну залежність від параметрів течії, а у разі відсутності останньої — збігається з відповідною функцією Гріна для зазначеної труби, яка наведена в науковій літературі [1, 3–6, 8].

Постановка задачі. На рис. 1 зображено нескінченну пряму жорстку трубу прямокутного поперечного перерізу розмірів l_x та l_y , в якій з осередненою осьовою швидкістю U рівномірно тече рідина ($\partial U/\partial t = 0$). У цій трубі задані довільним чином розташовані акустичні джерела різної природи, які генерують в ній акустичне поле. Це поле описується тривимірним *конвективним* хвильовим рівнянням [6, 8]:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{d^2 p_a}{dt^2} - \nabla^2 p_a = \gamma, \quad (1)$$

$$0 \leq x \leq l_x, \quad 0 \leq y \leq l_y, \quad |z| < \infty,$$

в якому p_a — акустичний тиск; c_0 — швидкість звуку в незбуреній рідині; γ задає розподіл зазначених джерел, а друга повна похідна за часом і оператор Лапласа у прямокутній декартовій системі координат (x, y, z) записуються таким чином:

$$\frac{d^2}{dt^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} + U^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Необхідно побудувати функцію Гріна рівняння (1) для досліджуваної труби.

Функція Гріна. Шукана функція Гріна G описує акустичний тиск у точці поля (x, y, z) в момент часу t , який генерується в момент t_0 одиничним точковим імпульсним джерелом, розташованим в трубі у точці (x_0, y_0, z_0) (див. рис. 1). Вона задовольняє рівняння

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{d^2 G}{dt^2} - \nabla^2 G = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \delta(t - t_0), \quad (2)$$

$$0 \leq x, x_0 \leq l_x; \quad 0 \leq y, y_0 \leq l_y; \quad |z| < \infty; \quad |z_0| < \infty; \quad |t| < \infty; \quad |t_0| < \infty,$$

в якому $\delta(\dots)$ — дельта-функція Дірака, а оператори d^2/dt^2 і ∇^2 даються після (1).

Граничні умови для функції G відображають рівність нулю нормальних компонент акустичної швидкості на нерухомій жорсткій стінці досліджуваної труби:

$$\left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x=0, l_x} = 0, \quad \left. \frac{\partial G}{\partial y} \right|_{y=0, l_y} = 0 \quad (3)$$

і відсутність відбиття звуку на її кінцях (на нескінченності). Крім того, в трубі не повинно бути акустичного поля до початку його генерації зазначеним джерелом [4–8]:

$$G|_{t < t_0} = 0. \quad (4)$$

Побудову розв'язку задачі (2)–(4) почнемо із зображення шуканої функції Гріна у вигляді ряду:

$$G(x, y, z, t; x_0, y_0, z_0, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} G_{nm}(z, t; x_0, y_0, z_0, t_0) \Psi_{nm}(x, y), \quad (5)$$

який задовольняє умову (3) і в якому $\Psi_{nm}(x, y) = \cos(k_{xn}x) \cos(k_{ym}y)$ є акустичними модами труби, $k_{xn} = n\pi/l_x$ та $k_{ym} = m\pi/l_y$ — модальними хвильовими числами у напрямках x та y відповідно, а G_{nm} — невідомими коефіцієнтами. Тоді підстановка ряду (5) у рівняння (2), множення одержаного при цьому співвідношення скалярно на моди Ψ_{nm} і врахування ортогональності останніх

$$\int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \Psi_{nm}(x, y) \Psi_{sq}(x, y) dx dy = \begin{cases} \|\Psi_{nm}\|^2, & (s, q) = (n, m); \\ 0, & (s, q) \neq (n, m); \end{cases}$$

$$\|\Psi_{nm}\|^2 = \begin{cases} l_x l_y, & n = 0, \quad m = 0; \\ \frac{l_x l_y}{2}, & n = 0, \quad m \geq 1; \\ \frac{l_x l_y}{2}, & n \geq 1, \quad m = 0; \\ \frac{l_x l_y}{4}, & n \geq 1, \quad m \geq 1 \end{cases} \quad (6)$$

приводять до одновимірного *конвективного* рівняння Кляйна–Гордона для коефіцієнтів G_{nm} [4, 5]:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 G_{nm}}{\partial t^2} + 2 \frac{M}{c_0} \frac{\partial^2 G_{nm}}{\partial t \partial z} - (1 - M^2) \frac{\partial^2 G_{nm}}{\partial z^2} + k_{nm}^2 G_{nm} = \frac{\Psi_{nm}(x_0, y_0)}{\|\Psi_{nm}\|^2} \delta(z - z_0) \delta(t - t_0). \quad (7)$$

У цьому рівнянні $M = U/c_0$ — число Маха течії в трубі, а квадрати норм мод $\|\Psi_{nm}\|^2$ і межі зміни змінних даються відповідно в (6) і (2).

Розв'язок рівняння (7) було одержано в роботі [9]. Він являє собою суперпозицію прямої та зворотної хвилі, які поширюються, відповідно, вправо та вліво від вищезазначеного джерела, розташованого у поперечному перерізі труби $z = z_0$ (див. рис. 1):

$$G_{nm} = \frac{c_0}{2} \frac{\Psi_{nm}(x_0, y_0)}{\|\Psi_{nm}\|^2} \left[\text{H} \left(\frac{\lambda}{l} (z_0 - z) \right) \text{H} \left(\frac{c_0}{\lambda l} (t - t_0) + (M + 1) \frac{\lambda}{l} (z - z_0) \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \mathrm{H}\left(\frac{\lambda}{l}(z - z_0)\right) \mathrm{H}\left(\frac{c_0}{\lambda l}(t - t_0) + (M - 1)\frac{\lambda}{l}(z - z_0)\right) \Big] \times \\
& \times \mathrm{J}_0\left(k_{nm}l\sqrt{\frac{c_0^2}{\lambda^2 l^2}(t - t_0)^2 + 2\frac{c_0 M}{l^2}(t - t_0)(z - z_0) + (M^2 - 1)\frac{\lambda^2}{l^2}(z - z_0)^2}\right), \quad (8)
\end{aligned}$$

тут $\mathrm{H}(\dots)$ – функція Хевісайда; J_0 – циліндрична функція Бесселя першого роду нульового порядку; l – масштаб довжини, який може бути вибраний довільним чином [10], а також було взято до уваги відсутність відбиття звуку на кінцях труби.

Наявність співвідношень (8) для коефіцієнтів G_{nm} у ряді (5) дозволяє записати остаточний вираз для шуканої функції Гріна G :

$$\begin{aligned}
G(x, y, z, t; x_0, y_0, z_0, t_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} G_{nm}(z, t; x_0, y_0, z_0, t_0) \Psi_{nm}(x, y) = \\
&= \frac{c_0}{2} \left[\mathrm{H}\left(\frac{\lambda}{l}(z_0 - z)\right) \mathrm{H}\left(\frac{c_0}{\lambda l}(t - t_0) + (M + 1)\frac{\lambda}{l}(z - z_0)\right) + \mathrm{H}\left(\frac{\lambda}{l}(z - z_0)\right) \times \right. \\
&\quad \times \left. \mathrm{H}\left(\frac{c_0}{\lambda l}(t - t_0) + (M - 1)\frac{\lambda}{l}(z - z_0)\right) \right] \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Psi_{nm}(x_0, y_0)}{\|\Psi_{nm}\|^2} \Psi_{nm}(x, y) \times \\
&\quad \times \mathrm{J}_0\left(k_{nm}l\sqrt{\frac{c_0^2}{\lambda^2 l^2}(t - t_0)^2 + 2\frac{c_0 M}{l^2}(t - t_0)(z - z_0) + (M^2 - 1)\frac{\lambda^2}{l^2}(z - z_0)^2}\right). \quad (9)
\end{aligned}$$

Його аналіз показує, що побудована функція Гріна зображується рядом за акустичними модами досліджуваної труби Ψ_{nm} . Кожен член цього ряду є сумою прямої та зворотної хвиль, які поширюються, відповідно, вниз та вгору за течією від акустичного джерела, розташованого у перерізі труби $z = z_0$ (див. рис. 1). Крім того, функція G задовольняє умову (4).

Подальший аналіз виразу (9) засвідчує, що в одержаній функції Гріна у явному вигляді відображені ефекти досліджуваної течії (через числа M і $\lambda = \lambda(M)$). Ці ефекти стають вагомішими зі збільшенням числа M , зумовлюючи, крім іншого, появу і подальше збільшення асиметрії функції G відносно площини $z = z_0$. І навпаки, зі зменшенням числа Маха вагомість впливу течії на функцію G зменшується, спричиняючи, зокрема, зменшення вказаної її асиметрії. У випадку ж відсутності течії ($M = 0$, $\lambda = 1$) функція (9) стає симетричною відносно площини $z = z_0$ і збігається з функцією Гріна хвильового рівняння для досліджуваної труби, яка наведена в науковій літературі [4–8]:

$$\begin{aligned}
G|_{M=0} &= \frac{c_0}{2} \left[\mathrm{H}\left(\frac{1}{l}(z_0 - z)\right) \mathrm{H}\left(\frac{c_0}{l}(t - t_0) + \frac{1}{l}(z - z_0)\right) + \mathrm{H}\left(\frac{1}{l}(z - z_0)\right) \mathrm{H}\left(\frac{c_0}{l}(t - t_0) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{l}(z - z_0)\right) \right] \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Psi_{nm}(x_0, y_0)}{\|\Psi_{nm}\|^2} \Psi_{nm}(x, y) \mathrm{J}_0\left(k_{nm}\sqrt{c_0^2(t - t_0)^2 - (z - z_0)^2}\right).
\end{aligned}$$

Таким чином, у даній роботі побудовано функцію Гріна G конвективного хвильового рівняння для нескінченної прямої жорсткостінної труби прямокутного поперечного перерізу (вираз (9)).

У побудованій функції Гріна в явному вигляді відображені ефекти рівномірної осередненої течії у зазначеній трубі. Ці ефекти стають вагомішими зі збільшенням числа Маха,

зумовлюючи, зокрема, появу і подальше збільшення асиметрії функції G відносно перерізу $z = z_0$, в якому розташоване одиничне точкове імпульсне акустичне джерело. І навпаки, зі зменшенням числа Маха вагомість впливу течії на функцію G зменшується, спричиняючи, крім іншого, зменшення зазначеної її асиметрії.

1. Борисюк А. О. Генерація звуку обмеженою областю збуреної течії в жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу. Ч. 1. Загальна теорія // Акуст. вісн. – 2003. – 6, № 3. – С. 3–9.
2. Вовк И. В., Гринченко В. Т., Малого В. С. Особенности движения среды в каналах со стенозами // Прикл. гидромех. – 2009. – 11, № 4. – С. 17–30.
3. Blake W. K. Mechanics of flow-induced sound and vibration: in 2 vols. – New York: Acad. Press, 1986. – 974 p.
4. Morse P. M., Feshbach H. Methods of theoretical physics: Vol. 1. – New York: McGraw-Hill, 1953. – 997 p.
5. Morse P. M., Ingard K. U. Theoretical acoustics. – New York: McGraw-Hill, 1968. – 927 p.
6. Howe M. S. Acoustics of fluid-structure interactions. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. – 560 p.
7. Crighton D. G., Dowling A. P., Ffowcs Williams J. E., Heckl M., Leppington F. G. Modern methods in analytical acoustics. Lecture Notes. – London: Springer, 1992. – 738 p.
8. Гринченко В. Т., Вовк И. В., Мацитура В. Т. Основы акустики. – Київ: Наук. думка, 2007. – 640 с.
9. Борисюк А. О. Функція Гріна хвильового рівняння для нескінченної прямої жорсткостінної труби кругового поперечного перерізу з осередненою течією // Доп. НАН Укр. – 2012. – № 4. – С. 57–63.
10. Borisyuk A. O. Green's function of the convective wave equation for a rigid rectangular pipe // Science-based technologies. – 2014. – No 3. – С. 47–51.

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Надійшло до редакції 15.10.2014

А. А. Борисюк

Функция Грина конвективного волнового уравнения для бесконечной прямой жесткостенной трубы прямоугольного поперечного сечения

Построена функция Грина волнового уравнения для бесконечной прямой жесткой трубы прямоугольного поперечного сечения с равномерным осредненным течением. В этой функции в явном виде отражены эффекты указанного течения. Они становятся более существенными с увеличением числа Маха, вызывая, в частности, появление и дальнейшее увеличение асимметрии функции относительно поперечного сечения, в котором находится единичный точечный импульсный акустический источник. И наоборот, с уменьшением числа Маха весомость влияния течения на функцию Грина уменьшается, обуславливая, кроме прочего, уменьшение ее асимметрии.

A. O. Borisyuk

Green's function of the convective wave equation for an infinite straight rigid-walled pipe of rectangular cross-section

Green's function of the wave equation for an infinite straight rigid pipe of rectangular cross-section with uniform mean flow is found. In this function, the indicated flow effects are reflected in the direct form. The effects become more significant as the flow Mach number increases, by causing, in particular, the appearance and the further growth of a function asymmetry about the cross-section, in which the unit point impulse acoustic source is located. Vice versa, a decrease of the Mach number results in a decrease of the effects and, in particular, in a decrease of the indicated asymmetry.