



УДК 517.94

З. Н. Гладкая

О решениях уравнения Кортевега–де Фриза с начальными данными типа ступеньки

(Представлено академиком НАН Украины Е. Я. Хрусловым)

Установлена разрешимость задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза с начальными данными типа ступеньки, а также скорость убывания решений в зависимости от гладкости потенциала.

Как известно, метод обратной задачи рассеяния (МОЗР), который был впервые применен для решения задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ)

$$q_t = -q_{xxx} + 6qq_x, \quad (1)$$

с убывающими начальными данными $q(x, 0) = q(x)$, не позволяет решить данную задачу в том же классе, каковыми являются начальные данные. Происходят “потери” в гладкости и скорости убывания решения [1]. В частности, если мы хотим иметь классическое решение $q(x, t)$ уравнения (1), убывающее в смысле $L_1(\mathbb{R})$, то максимально широкий класс начальных данных, обеспечивающих такое решение методом МОЗР — это функции, имеющие шесть производных, суммируемых со вторым моментом. Методы, используемые в теории уравнений в частных производных (PDE), позволяют существенно расширить классы начальных данных, например до $L_2(\mathbb{R})$, но при этом решение понимается в слабом смысле [2]. Оба указанных подхода позволяют также доказать разрешимость уравнения КдФ в классе Шварца.

Задача Коши для уравнения (1) с начальными данными типа ступеньки

$$q(x) \rightarrow c_{\pm}, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad c_- \neq c_+, \quad c_{\pm} \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

исследована меньше, и методы PDE оказываются здесь не эффективными. Для уравнения КдФ методом МОЗР в работе [3] доказано, что у задачи (1), (2) с начальными данными

$$\int_0^{+\infty} ((1 + |x|^N)|q(x)| + (1 + |x|)|q(-x) + c^2|) dx < \infty \quad (3)$$

при достаточно большом N есть слабое решение из $L_2(\mathbb{R})$ при каждом t . Кроме того, для начальных данных $q(x)$, асимптотически близких к двум разным конечнозонным потенциалам $p_+(x)$ и $p_-(x)$ на разных полуосях, получен следующий результат:

Теорема [4]. Пусть $p_{\pm}(x, t)$ — это два конечнозонных решения уравнения (1), соответствующих конечнозонным начальным данным $p_{\pm}(x)$. Пусть $m \geq 8$ и $n \geq m + 5$ — заданные натуральные числа и пусть

$$\int_{\mathbb{R}_{\pm}} \left| \frac{\partial^s}{\partial x^s} (q(x) - p_{\pm}(x)) \right| (1 + |x|^m) dx < \infty, \quad 0 \leq s \leq n. \quad (4)$$

Тогда при всех $t \in [-T, T]$ существует единственное решение $q(x, t)$ задачи (1), (4) такое, что при $0 \leq s \leq n - m - 2$

$$\int_{\mathbb{R}_{\pm}} \left(\left| \frac{\partial^s}{\partial x^s} (q(x, t) - p_{\pm}(x, t)) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial t} (q(x, t) - p_{\pm}(x, t)) \right| \right) (1 + |x|^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 2}) dx < \infty. \quad (5)$$

Нашей целью является уточнение этих результатов на случай начальных данных класса $\mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$.

Определение 1. Пусть $c_+, c_- \in \mathbb{R}$, $m \geq 1$, $n \geq 1$, $m, n \in \mathbb{N}$ — это заданные числа. Функция $q(x)$ принадлежит классу $\mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$, если $q^{(n)} \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R})$ и

$$\int_0^{+\infty} (|q(x) - c_+| + |q(-x) - c_-| + |q^{(i)}(x)| + |q^{(i)}(-x)|) (1 + |x|^m) dx < \infty, \quad i = 1, \dots, n.$$

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $m \geq 3$ и $n \geq m + 3$ — заданные целые числа. Тогда задача Коши (1), (2) с начальными данными $q(x) \in \mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$ при всех $t \in [-T, T]$ имеет единственное решение $q(x, t)$ такое, что $q(\cdot, t) \in \mathcal{L}_{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor - 2}^{n-m}(c_+, c_-)$, $\frac{\partial}{\partial t} q(\cdot, t) \in \mathcal{L}_{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor - 2}^{n-m}(0, 0)$.

Объясним вкратце структуру доказательства, полагая для простоты $c_+ = 0$, $c_- = -c^2$. Известно [5, 6], что спектр оператора Шредингера $L = -d^2/dx^2 + q(x)$ с потенциалом $q(x) \in \mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$ из абсолютно непрерывного спектра на множестве $[-c^2, +\infty)$, однократного на $[-c^2, 0]$ и двукратного на \mathbb{R}_+ , и конечного числа собственных значений $\lambda_1 < \dots < \lambda_p < -c^2$. Введем два новых спектральных параметра k_{\pm} по формуле $\lambda = k_{\pm}^2 = k_{\pm}^2 - c^2$, являющихся взаимно однозначными отображениями на множествах $\lambda \in \text{clos}(\mathbb{C} \setminus [-c^2, \infty))$, $k_+ \in \text{clos}(\mathbb{C}^+ \setminus (0, ic))$, $k_- \in \text{clos} \mathbb{C}^+$, где $\text{clos} A$ означает замыкание множества A . Решения Йоста уравнения $Ly = \lambda y$ можно представить в виде [7]

$$\phi_{\pm}(\lambda, x) = e^{\pm ik_{\pm} x} \pm \int_x^{\pm \infty} K_{\pm}(x, y) e^{\pm ik_{\pm} y} dy, \quad (6)$$

где $K_{\pm}(x, y)$ — ядра операторов преобразования, причем $K_+(x, x) = \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} q(y) dy$, $K_-(x, x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x (q(y) + c^2) dy$. Для каждого собственного значения λ_s определим нормировочные

константы $\gamma_s^\pm = \left(\int_{\mathbb{R}} \phi_\pm^2(\lambda_s, x) dx \right)^{-1}$ и введем матрицу рассеяния $S(\lambda) = \begin{pmatrix} T_-(\lambda) & R_+(\lambda) \\ R_-(\lambda) & T_+(\lambda) \end{pmatrix}$, где R_\pm и T_\pm — правые и левые коэффициенты отражения и прохождения. Известно, что при $q \in \mathcal{L}_m^n(0, -c^2)$ данные рассеяния

$$S = \{R_+(\lambda), T_+(\lambda), k_+ \in \mathbb{R}; R_-(\lambda), T_-(\lambda), k_- \in \mathbb{R}; \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R} \setminus [-c^2, \infty), \gamma_1^\pm, \dots, \gamma_p^\pm \in \mathbb{R}_+\} \quad (7)$$

имеют следующие свойства:

I. $S(\lambda + i0) = \overline{S(\lambda - i0)}$ при $\lambda \in [-c^2, \infty)$; $S(\lambda) = I + O((\lambda)^{-1/2})$, при $\lambda \rightarrow \infty$;

$(\overline{T_-(\lambda)})^{-1} T_-(\lambda) = R_-(\lambda)$ при $k_- \in [-c, c]$;

$1 - |R_+(\lambda)|^2 = 1 - |R_-(\lambda)|^2 = \overline{T_+(\lambda)} T_-(\lambda)$,

$\overline{R_+(\lambda)} T_+(\lambda) + R_-(\lambda) \overline{T_+(\lambda)} = 0$, $k_+ \in \mathbb{R}$.

II. Функции $T_+(\lambda)$ и $T_-(\lambda)$ аналитически продолжаются в область $\mathbb{C} \setminus [-c^2, \infty)$ и удовлетворяют там тождеству $k_+ T_+^{-1}(\lambda) = k_- T_-^{-1}(\lambda) =: W(\lambda)$, где функция $W(\lambda)$ голоморфна в области $\mathbb{C} \setminus [-c^2, \infty)$ и непрерывна вплоть до границы. При этом $W(\lambda) \neq 0$ при $\lambda \in \text{clos}(\mathbb{C} \setminus [-c^2, \infty)) \setminus \left(\{-c^2\} \cup_{s=1}^p \{\lambda_s\} \right)$, а в точках λ_k $W(\lambda_k) = (\gamma_k^+ \gamma_k^-)^{-2}$. Если $W(-c^2) = 0$,

то $W(\lambda) = i\alpha \sqrt{\lambda + c^2} (1 + o(1))$, где $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Функция $R(\lambda)$ непрерывна при $k_+ \in \mathbb{R}$ и $R(0) = -1$. Функция $R_-(\lambda)$ непрерывна при $k_- \in \mathbb{R}$. Если $W(-c^2) \neq 0$, то $R_-(-c^2) = -1$.

Операторы преобразования и данные рассеяния связаны между собой уравнениями Гельфанда–Левитана–Марченко (ГЛМ)

$$K_\pm(x, y) + F_\pm(x + y) \pm \int_x^{\pm\infty} K_\pm(x, s) F_\pm(s + y) ds = 0, \quad \pm x \leq \pm y \quad (8)$$

с ядрами $F_\pm(x) = F_{c,\pm}(x) + F_{d,\pm}(x)$, где

$$F_{c,+}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} R_+(\lambda) e^{ik_+ x} dk_+ + \frac{1}{4\pi} \int_{-c^2}^0 \frac{|T_-(\lambda)|^2}{k_-} e^{ik_+ x} d\lambda, \quad (9)$$

$$F_-(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} R_-(\lambda) e^{-ik_- x} dk_-,$$

$$F_{d,\pm} = \sum_{s=1}^p \gamma_s^\pm e^{\pm i\kappa_s^\pm x}, \quad \kappa_+ = \sqrt{\lambda_s}, \quad \kappa_- = \sqrt{\lambda_s + c^2}.$$

Эти ядра обладают следующим свойством:

III. $F_\pm^{(n+1)} \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R})$ и $x^m F_\pm^{(s)}(x) \in L_1(\mathbb{R}_\pm)$, $s = 1, \dots, n + 1$.

Как показано в [8], условия **I–III** являются необходимыми и достаточными, чтобы множество \mathcal{S} было множеством данных рассеяния для оператора Шредингера с потенциалом из класса $\mathcal{L}_m^n(0, -c^2)$, где $n \geq 0$ и $m \geq 1$ — фиксированные числа.

Доказательство достаточности состоит в решении обратной задачи рассеяния. Выберем множество \mathcal{S} , которое удовлетворяет свойствам **I–III**. Тогда уравнения ГЛМ имеют единственные решения $K_\pm(x, y)$ такие, что функции $q_\pm(x) = \mp 2 \frac{d}{dx} K_\pm(x, x)$ убывают в следующем смысле: $q_\pm^{(n)} \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R})$ и $x^m q_\pm^{(i)}(x) \in L_1(\mathbb{R}_\pm)$. Имеет место следующее утверждение [8]:

при условиях **I–III** на множество \mathcal{S} функции $q_-(x) - c^2$ и $q_+(x)$ совпадают. Более того, эта теорема единственности обратной задачи допускает следующее обобщение:

Лемма 1. Пусть множество \mathcal{S} удовлетворяет свойствам **I** и **II**, а функции $F_{\pm}, F'_{\pm} \in L_1(\mathbb{R}_{\pm}) \cup L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R})$, тогда уравнения ГЛМ имеют единственные решения такие, что $q_{\pm} \in L_1(\mathbb{R}_{\pm}) \cup L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R})$, и $q_+ \equiv q_- - c^2$.

Эти результаты являются основой МОЗР для задачи Коши для уравнения (1), формализм которого состоит в следующем. Рассмотрим начальные данные задачи Коши $q(x, 0) \in \mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$ как потенциал ассоциированного оператора Шредингера и решим прямую задачу рассеяния. Мы получим множество данных рассеяния $\mathcal{S}(0)$. Предположим, что решение задачи Коши существует и является функцией класса $\mathcal{L}_{m_1}^{n_1}(c_+, c_-)$ при каждом t и при возможно меньших, чем m и n , величинах m_1 и n_1 . Тогда можно посчитать эволюцию данных рассеяния [9] (например, $R_+(\lambda, t) = R_+(\lambda)e^{8ik_+^3 t}$ при $k_+ \in \mathbb{R}$) и естественным образом возникает множество

$$\mathcal{S}(t) = \{R_+(\lambda, t), T_+(\lambda, t), R_-(\lambda, t), T_-(\lambda, t), \lambda_1, \dots, \lambda_p, \gamma_1^{\pm}, \dots, \gamma_p^{\pm}(t) \in \mathbb{R}_+\},$$

которое трактуется как множество данных рассеяния для некоторого потенциала $q(x, t)$. Как правило, в приложениях, связанных с методом обратной задачи рассеяния, автоматически считается, что решение задачи (1), (2) найдено, как только написана эволюция данных рассеяния. На самом деле множество $\mathcal{S}(t)$ появилось в предположении существования решения класса $\mathcal{L}_{m_1}^{n_1}(c_+, c_-)$, поэтому, чтобы обосновать применение МОЗР, нужно проверить, что полученное множество $\mathcal{S}(t)$ действительно удовлетворяет условиям **I–III** хотя бы при каких-то m_1 и n_1 . Условия **I** и **II** проверяются элементарно. Основную сложность составляет проверка того факта, что ядра $F_{\pm}(x, t) = F_{c,\pm}(x, t) + F_{d,\pm}(x, t)$ зависящего от времени уравнения ГЛМ с

$$F_{c,+}(x, t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} R_+(\lambda) \psi(-ik_+, t) e^{ik_+ x} dk_+ + \frac{1}{4\pi} \int_{-c^2}^0 |T_-(\lambda)|^2 \psi(-ik_+, t) e^{ik_+ x} \frac{d\lambda}{k_-}, \quad (10)$$

$$F_{c,-}(x, t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} R_-(\lambda) e^{-ik_- x} \psi(ik_-, t) dk_-, \quad (11)$$

$$F_{\pm,d}(x, t) = \sum_{s=1}^p \gamma_s^{\pm} e^{\pm i\kappa_{\pm} x} \psi(\pm i\kappa_{\pm}, t),$$

где $\psi(h, t) := e^{8h^3 t}$, удовлетворяют условию **III**.

Прежде всего заметим, что слагаемые $F_{d,\pm}(x, t)$, соответствующие дискретному спектру, являются гладкими функциями по x и t и при $t \in [-T, T]$ и $x \rightarrow \pm\infty$ допускают оценки

$$\left| \frac{\partial^{s+1}}{\partial x^s \partial t} F_{\pm,d}(x, t) \right| \leq C(T) \sqrt{(|\lambda_0| + 1)^{3+s}} e^{8\sqrt{|\lambda_0|^3} T} e^{-\sqrt{\lambda_p + c^2} |x|}, \quad (12)$$

т. е. условие **III** для этих слагаемых выполнено.

При оценке остальных слагаемых мы используем интегрирование по частям, где интегрируется множитель $e^{\pm i\kappa_{\pm} x}$, при этом возникают множители x^{-s} перед интегралами. Для

того чтобы удовлетворить условию **III**, нужно, чтобы внеинтегральные члены взаимно сокращали друг друга. Кроме того, при интегрировании по частям функция $\psi(h, t)$ дифференцируется некоторое число раз и для того, чтобы последующие интегралы существовали, нужно, чтобы функции R_{\pm} и их производные убывали на бесконечности быстрее, чем это обеспечивается условием **I**. Здесь используется следующий результат, полученный в работе [10]: пусть $q \in \mathcal{L}_m^n(0, -c^2)$ $m \geq 2$, $n \geq 1$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$, $s \leq m - 1$

$$\frac{\partial^s R_{\pm}(\lambda)}{\partial k_{\pm}^s} = \frac{Q_{\pm, s}(k_{\pm})}{k_{\pm}^{n+1}}, \quad Q_+(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}), \quad Q_-(\cdot) \in L_2(\mathbb{R} \setminus (\Omega_{\varepsilon, -} \cup \Omega_{\varepsilon, +})),$$

где $\Omega_{\varepsilon, \pm} = \left(\pm\sqrt{c^2 - \varepsilon^2}, \pm\sqrt{c^2 + \varepsilon^2} \right)$. Заметим, что области $\Omega_{\varepsilon, \pm}$ возникли из-за отсутствия производных по параметру k_- у функции R_- в точках $k_- = \pm c$. Поэтому при интегрировании по частям формулы (11) мы используем следующие обрезающие функции: $B_{\varepsilon}^{\pm}(k_-) = B\left(\pm\sqrt{k_-^2 - c^2}, \varepsilon\right)$, где

$$B(\xi, \varepsilon) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right)^2} \left(1 - \left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right)^{2m}\right)^{m+3} & \text{при } |\xi| \leq \varepsilon, \\ 0 & \text{при } |\xi| > \varepsilon, \end{cases} \quad (13)$$

и представляем $F_{c,-}(x, t)$ в виде

$$F_{c,-}(x, t) = \int_{\mathbb{R} \setminus \{\Omega_{\varepsilon,+} \cup \Omega_{\varepsilon,-}\}} \Phi(k_-) e^{-ik_- x} dk_- + I_+(x, t, \varepsilon) + I_-(x, t, \varepsilon), \quad (14)$$

где

$$I_{\pm}(x, t, \varepsilon) = \int_{\Omega_{\varepsilon, \pm}} \Phi(k_-) e^{-ik_- x} (1 - B_{\varepsilon}^{\pm}(k_-)) dk_- + \int_{\Omega_{\varepsilon, \pm}} \Phi(k_-) e^{-ik_- x} B_{\varepsilon}^{\pm}(k_-) dk_- \quad (15)$$

и $\Phi(k_-) := R_-(\lambda(k_-))\psi(ik_-, t)$. Первые слагаемые в формулах (14) и (15) интегрируются обычным образом, причем их внеинтегральные члены взаимно сокращают друг друга. Что касается последнего слагаемого в формуле (15), то для его оценки используется следующая лемма.

Лемма 2. Пусть $q \in \mathcal{L}_m^n(0, -c^2)$, $m \geq 3$, $n \geq 1$. Тогда в области $\Omega_{\varepsilon, \pm}$ функция $\Phi(k_-)$ допускает следующее разложение по параметру $\xi = \pm\sqrt{k_-^2 + c^2}$:

$$\Phi(k_-) = a_0^{\pm} + a_1^{\pm} \xi + \dots + \xi^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} g_{\pm}(\xi),$$

где $g_{\pm}(\xi) \in C^{\lfloor \frac{m+1}{2} - 1 \rfloor}(\Omega_{\varepsilon, \pm})$.

Тем самым функция $\xi^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} g_{\pm}(\xi)$ может быть $\lfloor m + 1/2 \rfloor - 1$ раз продифференцирована по переменной k_- , при этом внеинтегральные члены исчезают за счет функции $B_{\varepsilon}^{\pm}(k_-)$. Оставшаяся степенная функция может быть выражена через функции параболического цилиндра, причем оценки имеют экспоненциальный характер убывания при $x \rightarrow -\infty$.

Нам остается оценить функцию $F_{c,+}(x, t)$. Представим второе слагаемое в формуле (10) в виде

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-c^2}^0 |T_-(\lambda)|^2 \psi(i\sqrt{\lambda}) e^{i\sqrt{\lambda}x} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda+c^2}} = \frac{1}{\pi} \int_c^0 P(h)\psi(h)e^{-hx} dh, \quad (16)$$

где $\sqrt{\lambda} = k_+ = ih$ и

$$P(h) = ihW(\phi_-, \overline{\phi_-}) / (W(\phi_-, \phi_+)W(\overline{\phi_-}, \phi_+)), \quad (17)$$

где $W(f, g)$ — вронскиан двух функций. Очевидно, что при интегрировании по частям правой части (16) внеинтегральные члены, соответствующие точке c , будут экспоненциально малы при $x \rightarrow +\infty$. Поэтому при интегрировании по частям обоих слагаемых в (10) должны взаимно сокращаться внеинтегральные члены, соответствующие точкам 0. Элементарный подсчет показывает, что это достигается, если выполнена следующая лемма.

Лемма 3. Пусть $q \in \mathcal{L}_m^n(0, -c^2)$, $m \geq 3$, $n \geq 0$. Тогда имеет место тождество

$$\lim_{k_+ \rightarrow +0} \operatorname{Re} \left\{ i^{s+1} \frac{\partial^s}{\partial k_+^s} R_+(\lambda) \right\} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\partial^s}{\partial h^s} P(h), \quad s = 0, 1, \dots, m-1. \quad (18)$$

Эта лемма доказывается с помощью тождества Плюккера.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта “Мережа математичних досліджень 2013–2015”.

1. Marchenko V. A. The inverse scattering problem and its applications to NLPDE // Scattering and Inverse Scattering in Pure and Applied Science / Ed. by R. Pike, P. Sabatier. – San Diego: Academic Press, 2002. – P. 1695–1706.
2. Кружков С. Н., Фаминский А. В. Обобщенные решения задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза // Матем. сб. – 1983. – **120(162)**, № 3. – С. 396–425.
3. Kappeler T. Solutions of the Korteweg–de Vries equation with steplike initial data // J. Different. Equat. – 1986. – **63**, No 3. – P. 306–331.
4. Egorova I., Teschl G. On the Cauchy problem for the Korteweg–de Vries equation with steplike finite-gap initial data II. Perturbations with finite moments // J. Anal. Math. – 2011. – **115**. – P. 71–101.
5. Буслаев В. С., Фомин В. Н. К обратной задаче рассеяния для одномерного уравнения Шредингера на всей оси // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1962. – **17**, № 1. – С. 56–64.
6. Cohen A., Kappeler T. Scattering and inverse scattering for steplike potentials in the Schrödinger equation // Indiana Univ. Math. J. – 1985. – **34**, No 1. – P. 127–180.
7. Marchenko V. A. Sturm–Liouville operators and applications. – Basel: Birkhäuser, 1986. – 395 p.
8. Egorova I., Gladka Z., Lange T.-L., Teschl G. On the inverse scattering transform method for the Korteweg–de Vries equation with steplike initial data / University of Vienna. – Prepr. – Wien, 2014.
9. Хруслов Е. Я. Асимптотика решения задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза с начальными данными типа ступеньки // Матем. сб. – 1976. – **99**, № 2. – С. 261–281.
10. Гладкая З. Н. О коэффициенте отражения оператора Шредингера с гладким потенциалом // Доп. НАН України. – 2014. – № 9. – P. 7–9.

Фізико-технічний інститут низьких температур
ім. Б. І. Веркина НАН України, Харків

Поступило в редакцію 22.09.2014

З. М. Гладка

Про розв'язок рівняння Кортевега–де Фріза з початковими даними типу сходинок

Встановлено розв'язність задачі Коші для рівняння Кортевега–де Фріза з початковими даними типу сходинок, а також швидкість спадання розв'язків залежно від гладкості потенціалу.

Z. M. Gladka

About solving the Korteweg–de Vries equation with step-like initial data

The solvability of a Cauchy problem for the Korteweg–de Vries equation is established, and the rate of decrease of solutions as a function of the smoothness of the potential is found.