Н.А.Шульга

О СМЕШАННОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ КИРХГОФОВОЙ ТЕОРИИ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИН

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail:electr@inmex.kiev.ua

Abstract. A general analysis is carried out for the mixed systems of four equations of the Kirchhoff's theory of vibrations of plates in rectangular and polar coordinates. It is shown that these systems can be represented in the operator Hamiltonian (canonical) form by the spatial coordinate, when the «canonical» variables and operator Hamilton's function being chosen in the special way. The functionals for canonical systems are formulated.

Key words: mixed equations of vibrations of plates in rectangular and polar coordinates, Hamiltonian system by the spatial coordinates, functional for canonical system**.**

Введение.

В монографии [3] впервые в научной литературе смешанная система уравнений колебаний плоской задачи теории упругости представлена в операторной гамильтоновой форме по пространственной координате. Во многих последующих работах, проанализированных в обзорных статьях [2, 6 – 8] и других публикациях, гамильтонов формализм в развитой в [3] форме был распространен на уравнения и задачи теории упругости, электроупругости, магнитоупругости. Эти результаты дали возможность выявить свойства характеристических уравнений и общую структуру решений волновых задач для периодических сред. В работе [4] канонические уравнения по пространственной координате получены в задачах о гармонических изгибных колебаниях пластин с периодическими по одной координате параметрами. Подобные исследования проведены [6 и др.] и в теории колебаний балок с периодическими параметрами.

В данной работе гамильтонов формализм развит относительно уравнений кирхгофовой теории изгиба пластин. Показано также как канонические операторные уравнения по одной пространственной координате можно получить из вариационного принципа.

§1. Постановка задачи.

В кирхгофовой (классической) теории поперечных колебаний тонкой пластины в ортогональных криволинейных координатах α_1, α_2 в ее срединной плоскости изгибающие M_{11} и M_{22} и крутящий $M_{12} = M_{21}$ моменты, поперечные силы Q_1, Q_2 и прогиб w связаны уравнениями колебаний

$$\frac{1}{A_1 A_2}\left\{\frac{\partial A_2 M_{11}}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_{22} + \frac{1}{A_1}\frac{\partial A_1^2 M_{12}}{\partial \alpha_2}\right\} - Q_1 = 0\,;$$

$$\frac{1}{A_1 A_2}\left\{\frac{\partial A_1 M_{22}}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_{11} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2^2 M_{21}}{\partial \alpha_1}\right\} - Q_2 = 0\,; \qquad (1.1)$$

$$\frac{1}{A_1A_2}\left\{\frac{\partial A_2Q_1}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial A_1Q_2}{\partial\alpha_2}\right\}=\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

и материальными соотношениями

$$M_{11}=-D\left[\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}\right)+\frac{1}{A_1A_2^2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}+\right.$$

$$\left.+\nu\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}\right)+\frac{1}{A_1^2A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}\right)\right];$$

$$M_{22}=-D\left[\nu\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}\right)+\frac{1}{A_1A_2^2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}\right)+\frac{1}{A_1^2A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}\right];$$

$$M_{12}=M_{21}=-\frac{1-\nu}{2}D\left[\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{1}{A_2^2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}\right)+\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}\right)\right], \qquad (1.2)$$

в которых учтены формулы для деформаций. В зависимостях (1.1), (1.2) принято: ρ, E, ν, – плотность, модуль Юнга, коэффициент Пуассона материала; $D=I_1E/(1-\nu^2)$ – изгибная жесткость; h – толщина пластины; $I_1=h^3/12$ – момент инерции поперечного сечения на единицу длины; A_1 и A_2 – параметры Ламе.

В теории используются также формулы для углов поворота нормали к изогнутой поверхности

$$\varphi_1=\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1};\ \ \varphi_2=\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2} \qquad (1.3)$$

и для обобщенных поперечных сил

$$Q_1^*=Q_1+\frac{1}{A_2}\frac{\partial M_{12}}{\partial\alpha_2};\ \ Q_2^*=Q_2+\frac{1}{A_1}\frac{\partial M_{21}}{\partial\alpha_1}. \qquad (1.4)$$

Совокупность шести уравнений (1.1), (1.2) относительно шести неизвестных функций M_{11}, M_{22}, $M_{12}=M_{21}$, Q_1, Q_2, w от координат α_1, α_2 и времени t, как правило, сводят к одному уравнению относительно прогиба $w(\alpha_1,\alpha_2,t)$.

При применении численных методов также целесообразно использование смешанной системы четырех уравнений в операторной нормальной форме Коши. Общему анализу уравнений такого типа посвящена данная работа, в которой рассмотрены уравнения (1.1) и (1.2) в прямоугольных (x_1,x_2) и полярных (r,θ) системах координат.

§2. Прямоугольные координаты.

В прямоугольных координатах ($x_1=\alpha_1$, $x_2=\alpha_2$) при $A_1=A_2=1$ систему уравнений (1.1) упрощаем к виду

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial M_{21}}{\partial x_2}-Q_1=0;\quad \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2}-Q_2=0;$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1}+\frac{\partial Q_2}{\partial x_2}=\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{2.1}$$

а материальные соотношения (1.2) запишем следующим образом:

$$M_{11}=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right);\quad M_{22}=-D\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right);$$

$$M_{12}=-(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}. \tag{2.2}$$

Соответствующий вид принимают также формулы для углов поворота нормали к срединной плоскости

$$\varphi_1=\frac{\partial w}{\partial x_1};\quad \varphi_2=\frac{\partial w}{\partial x_2} \tag{2.3}$$

и для обобщенных поперечных сил

$$Q_1^*=Q_1+\frac{\partial M_{12}}{\partial x_2};\quad Q_2^*=Q_2+\frac{\partial M_{21}}{\partial x_1}. \tag{2.4}$$

Запишем систему уравнений (2.1) – (2.3) в смешанной форме

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1}=Q_1-\frac{\partial M_{21}}{\partial x_2};\quad \frac{\partial w}{\partial x_1}=\varphi_1;$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}=-\frac{M_{11}}{D}-\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2};\quad \frac{\partial Q_1}{\partial x_1}=\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{\partial Q_2}{\partial x_2}. \tag{2.5}$$

Изгибающий момент M_{11}, прогиб w, угол поворота нормали φ_1, обобщенная поперечная сила Q_1^* при совершенном механическом контакте остаются непрерывными на сечениях $x_1=\mathrm{const}$ разрыва механических характеристик пластины. Эти функции и необходимо использовать в качестве основных разрешающих функций и соответствующим образом преобразовать систему (2.5).

С этой целью в системе (2.5) необходимо заменить поперечную силу Q_1 на обобщенную поперечную силу Q_1^* и исключить из нее моменты M_{12}, M_{22} и поперечную силу Q_2.

Выразим изгибающий M_{22} и крутящий M_{12} моменты, а также поперечную силу Q_2, через основные функции M_{11}, w, φ_1

$$M_{22}=\nu M_{11}-(1-\nu^2)D\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2};\quad M_{12}=-(1-\nu)D\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2};$$

$$Q_2=\frac{\partial M_{11}}{\partial x_2}-\left(1-\nu\right)D\frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3}, \tag{2.6}$$

а поперечную силу Q_1 заменим согласно (2.4) через обобщенную поперечную силу Q_1^*.

Вследствие соответствующих преобразований получаем

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1}=2(1-\nu)D\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_2^2}+Q_1^*;\quad \frac{\partial w}{\partial x_1}=\varphi_1;\quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}=-\frac{M_{11}}{D}-\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2};$$

$$\frac{\partial Q_1^*}{\partial x_1}=-\nu\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_2^2}+(1-\nu^2)D\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4}+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \qquad (2.7)$$

Функции M_{22}, M_{12}, Q_2, отсутствующие в смешанной системе (2.7), определяются через основные разрешающие функции M_{11}, w, φ_1 по формулам (2.6), а

$$Q_1=Q_1^*+(1-\nu)D\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_2^2}.$$

Коэффициенты системы (2.5), а значит и уравнений (2.1), (2.2), могут быть произвольными функциями координаты x_1 с разрывами первого рода.

Система (2.7) является операторной системой в нормальной форме Коши по координате x_1. Покажем, что эта система является операторной гамильтоновой системой [1] по пространственной координате x_1

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_1}=\frac{\partial\hat H}{\partial p_i};\ \ \frac{\partial p_i}{\partial x_1}=-\frac{\partial\hat H}{\partial q_i}\quad (i=1,2). \qquad (2.8)$$

Для этого необходимо соответствующим образом выбрать канонические переменные $\{q_1,q_2\}=\{M_{11},w\}$, $\{p_1,p_2\}=\{\varphi_1,Q_1^*\}$ и операторную функцию Гамильтона

$$\hat H=\frac{1}{2}\hat P_{ij}q_iq_j+\frac{1}{2}\hat Q_{ij}p_ip_j. \qquad (2.9)$$

со следующими значениями операторных элементов $\hat P_{ij}$ и $\hat Q_{ij}$ симметричных операторных матриц $\hat{\boldsymbol P}$ и $\hat{\boldsymbol Q}$:

$$\hat Q_{11}=2(1-\nu)D\frac{\partial^2}{\partial x_2^2};\quad \hat Q_{12}=\hat Q_{21}=1;\quad \hat Q_{22}=0. \qquad (2.10)$$

$$-\hat P_{11}=-\frac{1}{D};\quad -\hat P_{12}=-\hat P_{21}=-\nu\frac{\partial^2}{\partial x_2^2};\quad -\hat P_{22}=(1-\nu^2)D\frac{\partial^4}{\partial x_2^4}+\rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2};$$

В операторном выражении (2.9) для функции Гамильтона и при выполнении дифференцирования в (2.8) операторы $\hat P_{ij}$, $\hat Q_{ij}$ следует принять постоянными величинами. В результате такой процедуры из (2.8) получим систему (2.7).

Операторную гамильтонову систему по пространственной координате x_1 можно получить из «изохронной» вариации функционала

$$I(M_{11},w,\varphi_1,Q_1^*)=\int_a^b\left\{\varphi_1\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1}+Q_1^*\frac{\partial w}{\partial x_1}-\left[\frac{1}{2}D^{-1}M_{11}^2+\nu\partial_2^2M_{11}w+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\left(-(1-\nu^2)D\partial_2^4-\rho h\partial_t^2\right)w^2+(1-\nu)D\partial_2^2\varphi_1^2+\varphi_1Q_1^*\right]\right\}dx_1. \qquad (2.11)$$

При его варьировании следует руководствоваться правилом

$$\delta(P_{ij}, Q_{ij}) a_m b_n = (P_{ij}, Q_{ij})(a_m \delta b_n + b_n \delta a_m) =$$

$$= \delta b_n (P_{ij}, Q_{ij}) a_m + \delta a_m (P_{ij}, Q_{ij}) b_n. \tag{2.12}$$

Аналогичным образом можно получить операторную гамильтонову систему по пространственной координате x_2, если в качестве основных разрешающих функций выбрать M_{22}, w, φ_2, Q_2^*. Запишем систему (2.1) – (2.3) в смешанной форме

$$\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} = Q_1 - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1}; \quad \frac{\partial w}{\partial x_2} = \varphi_2;$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} = -\frac{M_{22}}{D} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}; \quad \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial Q_1}{\partial x_1}. \tag{2.13}$$

Не вошедшие в систему (2.13) изгибающий M_{11} и крутящий M_{12} моменты и поперечная сила Q_1 определяются через основные функции M_{22}, w, φ_2 по формулам

$$M_{11} = \nu M_{22} - (1-\nu^2) D \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}; \quad M_{12} = -(1-\nu) D \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1};$$

$$Q_1 = \frac{\partial M_{22}}{\partial x_1} - \left(1-\nu\right) D \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} \text{ или } \quad Q_2 = Q_2^* + (1-\nu) D \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1^2}. \tag{2.14}$$

Далее систему (2.13) можно записать так:

$$\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} = 2(1-\nu) D \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1^2} + Q_2^*; \quad \frac{\partial w}{\partial x_2} = \varphi_2; \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} = -\frac{M_{22}}{D} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2};$$

$$\frac{\partial Q_2^*}{\partial x_2} = -\nu \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial x_1^2} + (1-\nu^2) D \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{2.15}$$

Если ввести вектор-столбцы $\{q_1, q_2\} = \{M_{22}, w\}$, $\{p_1, p_2\} = \{\varphi_2, Q_2^*\}$ и операторные матрицы $\hat{Q}$, $\hat{P}$ с операторными элементами

$$\hat{Q}_{11} = 2(1-\nu) D \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}; \quad \hat{\hat{Q}}_{12} = \hat{Q}_{21} = 1; \quad \hat{\hat{Q}}_{22} = 0; \tag{2.16}$$

$$-\hat{P}_{11} = -\frac{1}{D}; \quad -\hat{P}_{12} = -\hat{P}_{21} = -\nu \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}; \quad -\hat{P}_{22} = (1-\nu^2) D \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

то система (2.15) примет вид операторной гамильтоновой системы по пространственной координате x_2

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_2} = \hat{Q}_{ij} p_j; \quad \frac{\partial p_i}{\partial x_2} = -\hat{P}_{ij} q_j \qquad (i = 1, 2). \tag{2.17}$$

Системы (2.15) и (2.7) совпадают при взаимной замене индексов $1 \leftrightarrow 2$.

§3. Полярные координаты.

В полярных координатах $r = \alpha_1$, $\theta = \alpha_2$ при $A_1 = 1$, $A_2 = r$ система уравнений (1.1) упрощается к виду

$$\frac{1}{r}\frac{\partial rM_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{M_{\theta\theta}}{r} - Q_r = 0; \quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} - Q_\theta = 0;$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial rQ_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \tag{3.1}$$

для материальных соотношений (1.2) имеем следующие формулы:

$$M_{rr} = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)\right); \quad M_{\theta\theta} = -D\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right);$$

$$M_{r\theta} = -(1-\nu)D\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right). \tag{3.2}$$

Соответствующий вид принимают также формулы для углов поворота нормали к выгнутой поверхности пластины

$$\varphi_r = \frac{\partial w}{\partial r}; \quad \varphi_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} \tag{3.3}$$

и для обобщенных поперечных сил

$$Q_r^* = Q_r + \frac{1}{r}\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta}; \quad Q_\theta^* = Q_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial M_{\theta r}}{\partial r}. \tag{3.4}$$

Запишем систему уравнений (3.1) – (3.4) в форме

$$\frac{\partial rM_{rr}}{\partial r} = M_{\theta\theta} + Q_r - \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r}; \quad \frac{\partial w}{\partial r} = \varphi_r; \quad \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} = -\frac{M_{rr}}{D} - \nu\left(\frac{\varphi_r}{r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right);$$

$$\frac{\partial rQ_r}{\partial r} = r\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta}. \tag{3.5}$$

Система (3.5) записана в операторной нормальной форме Коши по радиальной координате r. Изгибающий момент M_{rr}, прогиб w, угол поворота нормали φ_r и обобщенная поперечная сила Q_r^* при совершенном механическом контакте остаются непрерывными на сечениях $r = \text{const}$ разрыва механических характеристик пластины. Функции rM_{rr}, w, φ_r, rQ_r^* [5] выбираем в качестве основных разрешающих функций и соответствующим образом преобразуем полученную систему.

С этой целью в системе (3.5) поперечную силу Q_r, пользуясь первой из формул (3.4), заменим на обобщенную поперечную силу Q_r^* и исключим из уравнений (3.5) изгибающий $M_{\theta\theta}$ и крутящий $M_{r\theta}$ моменты и поперечную силу Q_θ.

Используя уравнения (3.2) и (3.1), выразим моменты $M_{\theta\theta}$ и $M_{r\theta}$, а также поперечную силу Q_θ через основные функции rM_{rr}, w, φ_r. Тогда получим

$$M_{\theta\theta} = \nu M_{rr} - (1-\nu^2)D\left(\frac{1}{r}\varphi_r + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right); \quad M_{r\theta} = -(1-\nu^2)D\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right);$$

$$Q_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\nu M_{rr} - (1-\nu^2)D\left(\frac{1}{r}\varphi_r + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)\right] - (1-\nu)D\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi_r}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}\right]. \quad (3.6)$$

После соответствующих преобразований уравнений (3.5) получим следующую систему смешанных уравнений кирхгофовой теории поперечных колебаний пластины в полярных координатах в операторной нормальной форме Коши:

$$\frac{\partial rM_{rr}}{\partial r} = \frac{\nu}{r}rM_{rr} - (1-\nu)(3+\nu)D\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} - (1-\nu^2)D\frac{\varphi_r}{r} + 2(1-\nu)D\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi_r}{\partial\theta^2} + rQ_r^*;$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \varphi_r; \quad \frac{\partial\varphi_r}{\partial r} = -\frac{1}{Dr}rM_{rr} - \frac{\nu}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} - \frac{\nu}{r}\varphi_r; \quad \frac{\partial rQ_r^*}{\partial r} = -\frac{\nu}{r^2}\frac{\partial^2 rM_{rr}}{\partial\theta^2} + (1-\nu^2)D\frac{1}{r^3}\frac{\partial^4 w}{\partial\theta^4} -$$

$$-2(1-\nu)D\frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} + r\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (1-\nu)(3+\nu)D\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi_r}{\partial\theta^2}. \quad (3.7)$$

В соответствии с общей идеей [3] и статьей [5] покажем, что система (3.7) является операторной гамильтоновой системой [1] по пространственной координате r

$$\frac{\partial q_i}{\partial r} = \frac{\partial\hat{H}}{\partial p_i}; \quad \frac{\partial p_i}{\partial r} = -\frac{\partial\hat{H}}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2). \quad (3.8)$$

С этой целью «канонические» переменные q_i, p_i и операторную функцию Гамильтона примем в виде

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rM_{rr} \\ w \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_r \\ rQ_r^* \end{bmatrix};$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{P}_{ij}q_i q_j + \hat{R}_{ij}q_i p_j + \frac{1}{2}\hat{Q}_{ij}p_i p_j, \quad (3.9)$$

где элементы операторных симметричных матриц $\hat{P}_{ij}$, $\hat{Q}_{ij}$ и ненулевые элементы операторной матрицы $\hat{R}_{ij}$ имеют следующие значения:

$$-\hat{P}_{11} = -\frac{1}{Dr}; \quad -\hat{P}_{12} = -\hat{P}_{21} = -\frac{\nu}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2};$$

$$-\hat{P}_{22} = (1-\nu^2)D\frac{1}{r^3}\frac{\partial^4}{\partial\theta^4} - 2(1-\nu)D\frac{1}{r^3}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + r\rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2};$$

$$\hat{Q}_{11} = -(1-\nu^2)D\frac{1}{r} + 2(1-\nu)D\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}; \quad \hat{Q}_{12} = \hat{Q}_{21} = 1; \quad \hat{Q}_{22} = 0;$$

$$\hat{R}_{11} = \frac{\nu}{r}; \quad \hat{R}_{12} = -(1-\nu)(3+\nu)D\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}; \quad \hat{R}_{21} = \hat{R}_{22} = 0. \quad (3.10)$$

В операторном выражении (3.9) и при выполнении дифференцирования в (3.8) операторы (3.10) $\hat{P}_{ij}$, $\hat{Q}_{ij}$, $\hat{R}_{ij}$ предполагаются постоянными величинами. В результате такой процедуры из (3.8) получим систему (3.7). Это и доказывает, что система (3.7) является операторной гамильтоновой системой по пространственной координате r.

Коэффициенты системы (3.7), а значит и уравнений (3.1), (3.2), могут быть произвольными функциями координаты r с разрывами первого рода.

Функции $M_{\theta\theta}$, $M_{r\theta}$, Q_r, Q_θ определяются через основные разрешающие функции по формулам (3.6) и (3.4).

Операторную гамильтонову систему (3.7) по пространственной координате r можно получить из «изохронной» вариации следующего функционала:

$$I(rM_{rr}, w, \varphi_r, rQ_r^*) = \int_a^b \left\{ \varphi_r \frac{\partial (rM_{rr})}{\partial r} + (rQ_r^*)\frac{\partial w}{\partial r} - \right.$$

$$-\left\{ \frac{1}{2}\frac{1}{Dr}(rM_{rr})^2 + \frac{\nu}{r^2}\partial_\theta^2(rM_{rr})\,w + \frac{1}{2}\left[2(1-\nu)D\frac{1}{r^3}\partial_\theta^2 - (1-\nu^2)D\frac{1}{r^3}\partial_\theta^4 - r\rho h\partial_t^2 \right] w^2 + \right.$$

$$+\frac{\nu}{r}(rM_{rr})\varphi_r - (1-\nu)(3+\nu)D\frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 w\varphi_r +$$

$$\left.\left. +\frac{1}{2}\left[-(1-\nu^2)D\frac{1}{r} + 2(1-\nu)D\frac{1}{r}\partial_\theta^2 \right]\varphi_r^2 + \varphi_r(Q_r^*) \right\}\right\} dr. \qquad (3.11)$$

При варьировании функционала операторы $\hat{P}_{ij} = \hat{P}_{ji}$, $\hat{Q}_{ij} = \hat{Q}_{ji}$, $\hat{R}_{ij}$ следует принять замороженными (постоянными) и перестановочными с вариациями

$$\delta(\hat{P}_{ij}, \hat{Q}_{ij}, \hat{R}_{ij})a_m b_n = (\hat{P}_{ij}, \hat{Q}_{ij}, \hat{R}_{ij})(a_m\delta b_n + b_n\delta a_m) =$$

$$= \delta b_n(\hat{P}_{ij}, \hat{Q}_{ij}, \hat{R}_{ij})a_m + \delta a_m(\hat{P}_{ij}, \hat{Q}_{ij}, \hat{R}_{ij})b_n. \qquad (3.12)$$

Заключение.

В данной статье выполнен общий анализ смешанных систем четырех уравнений кирхгофовой теории колебаний пластин в прямоугольных и полярных координатах. Показано, что эти системы можно представить в операторной гамильтоновой форме по пространственной координате при соответствующем выборе «канонических» переменных и операторной функции Гамильтона. Сформулированы функционалы для канонических систем.

Р Е З Ю М Е . Виконано загальний аналіз змішаних систем чотирьох рівнянь кірхгофової теорії коливань пластин в прямокутних і полярних координатах. Показано, що ці системи можна представити в операторній гамільтоновій (канонічній) формі по просторовій координаті при відповідному виборі «канонічних» змінних і операторної функції Гамільтона. Сформульовано функціонали для канонічних систем.

1. *Павловський М.А.* Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. *Успехи механики*: В 6-ти т.; Т. 4 / Под ред. А.Н. Гузя. – К.: «Літера ЛТД», 2008. – 720 с.
3. *Шульга Н.А.* Основы механики слоистых сред периодической структуры. – К.: Наук. думка, 1981. – 200 с.
4. *Шульга О.М.* Построение решений уравнений колебаний классической теории пластин с периодическими по одной координате параметрами // Теорет. и прикл. механика. – 1995. – Вып. 25. – С. 109 – 113.
5. *Шульга В.М.* До розв'язку рівнянь теорії пружності в циліндричних координатах // Доп. НАН України. – 1998. – № 6. – С. 80 – 82.
6. *Shulga N.A.* Propagation of Elastic Waves in Periodically Inhomogeneous Media // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, N 7. – P.763 – 796.
7. *Shulga N.A.* Propagation of Coupled waves Interacting with an Electromagnetic Field in Periodically Inhomogeneous Media // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, N 10. – P. 1146 – 1172.
8. *Shulga N.A.* Theory of Dynamic Processes in Mechanical Systems and Materials of Regular Structure Media // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 12. – P. 1301 – 1330.
9. *Shulga N.A.* A Mixed System of Equations of Elasticity // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 3. – P. 264 – 268.

Поступила 06.10.2010 Утверждена в печать 26.06.2012