ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

1 • 2015

НАУКИ ПРО ЗЕМЛЮ

УДК 539.182+518.5+517.986.69

Член-кореспондент НАН України **В. А. Даниленко, Т. Б. Даневич, С. І. Скуратівський**

Еволюція хвильових полів у блокових релаксуючих середовищах

Досліджено континуальну модель блокових геосередовищ, яка враховує розриви швидкості та напружень між структурними елементами. Використовуючи методи редуктивної теорії збурень, побудовано (1 + 2) амплітудне рівняння другого порядку типу Бюргерса. Знайдено точні кінкоподібні хвильові та автомодельні розв'язки амплітудного рівняння.

Природні геосередовища є ієрархічними системами структурних елементів [1], які, як правило, перебувають в істотно нерівноважних умовах. Рівень нерівноважності відповідає за міру прояву індивідуальних особливостей внутрішньої структури середовищ, спричинює значні відмінності між характеристиками сусідніх структурних елементів [2] та породжує просторово-часову кореляцію між різними частинами континууму [3, 4]. Опис таких явищ вимагає перегляду та доповнення класичних моделей суцільних середовищ.

Один із способів врахування структури геосередовища та опису фізичних полів у його структурних елементах грунтується на уявленні про середовище як про дискретну систему скінченної кількості деформівних комірок-блоків. Окремий k-й блок характеризується радіусом-вектором центра мас $\mathbf{r}_k$ (масою m_k) тензором моментів інерції J^k, а також тензором напружень σ^k і швидкістю $\mathbf{u}_k$, які можуть зазнавати розриви на межі двох блоків [2–5]. У результаті отримаємо сукупність співвідношень, що виражають закони збереження маси, імпульсу, моменту імпульсу та рівнянь стану для кожного блока. Вивчення такої моделі, навіть числовими методами, є занадто складним. Тому в публікаціях [2, 5] було розроблено процедуру переходу від системи рівнянь для k блоків до наближеної континуальної гідродинамічної моделі блокового середовища. Одновимірну модель такого блокового середовища було розглянуто в статті [6], де, зокрема, досліджувалась структура хвильових розв'язків. Однак вивчення явищ, пов'язаних із обертанням структурних елементів, здійснити не вдається в рамках одновимірних моделей, а вимагає залучення принаймні двовимірних моделей, що є предметом нашого дослідження.

© В. А. Даниленко, Т. Б. Даневич, С. І. Скуратівський, 2015

Таким чином, у даному повідомленні вивчаються хвильові розв'язки релаксуючого блокового середовища, двовимірна модель якого у довгохвильовому наближенні має такий вигляд:

$$\begin{aligned}
&\rho_t + \rho(1+3\beta)\operatorname{div}\mathbf{u} + (\mathbf{u}\nabla)\rho = 0,\\
&v_t + (1+\beta)vv_x + \beta v\operatorname{div}\mathbf{u} + (1+\beta)wv_y - A\mu w + \rho^{-1}p_x = 0,\\
&w_t + (1+\beta)vw_x + \beta w\operatorname{div}\mathbf{u} + (1+\beta)ww_y + A\mu w + \rho^{-1}p_y = 0,\\
&\rho^{-2}\tau_{TP}^{-1}\rho_t + \omega_0^2\rho_0^{(1-\Gamma_{V_0})}\rho^{\Gamma_{V_0}} - \omega_0^2\rho_0 = b(p-p_0) + b\tau_{TV}p_t,\\
&\omega_0^2 = \frac{bc_{S_0}^2\alpha_0 T_0}{\gamma_0}, \qquad b = \frac{\upsilon_0\chi_{T_\infty}}{\tau_{TV}\tau_{TP}}, \qquad \tau_{TP} = \tau_{TV}\left(\frac{\chi_{T_0}}{\chi_{T_\infty}}\right) = \tau_{PV}\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_\infty}\right),
\end{aligned} \tag{1}$$

де ρ — густина; $\mathbf{u} = (v, w)$ — вектор швидкості; p — тиск; β — параметр, пропорційний відношенню розмірів сусідніх елементів; μ — параметр, пов'язаний з коефіцієнтом зчеплення блоків; величина $A = w_x - v_y$ є z-компонентою вектора $\operatorname{rot}\mathbf{u}$; τ_{TP}, τ_{TV} — часи релаксації; Γ_{V_0} — коефіцієнт Грюнайзена; c_{S_0} — рівноважна адіабатична швидкість звуку; α_0, α_∞ — коефіцієнти теплового розширення (рівноважний і заморожений); T_0 — температура; γ_0 — показник політропи; χ_{T_0}, χ_{T_∞} — ізотермічні коефіцієнти стиснення.

Модель (1) у лагранжевих координатах X, Y відносно змінних $\upsilon = \rho^{-1}$, p, V, W запишемо таким чином:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\upsilon}{\partial t} - (1+3\beta)\upsilon_0\left(\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial W}{\partial Y}\right) = 0,\\
&\upsilon\frac{\partial V}{\partial t} + 2\beta\upsilon_0 V\frac{\partial V}{\partial X} + \beta\upsilon_0 V\frac{\partial W}{\partial Y} + \beta\upsilon_0 W\frac{\partial V}{\partial Y} - \mu\upsilon_0 W\left(\frac{\partial W}{\partial X} - \frac{\partial V}{\partial Y}\right) + \upsilon_0\upsilon\frac{\partial p}{\partial X} = 0,\\
&\upsilon\frac{\partial W}{\partial t} + 2\beta\upsilon_0 W\frac{\partial W}{\partial Y} + \beta\upsilon_0 V\frac{\partial W}{\partial X} + \beta\upsilon_0 W\frac{\partial V}{\partial X} + \mu\upsilon_0 W\left(\frac{\partial W}{\partial X} - \frac{\partial V}{\partial Y}\right) + \upsilon_0\upsilon\frac{\partial p}{\partial Y} = 0,\\
&-\frac{1}{\tau_{TP}}\frac{\partial\upsilon}{\partial t} + \omega_0^2\upsilon_0^{(\Gamma_{V_0}-1)}\upsilon^{-\Gamma_{V_0}} - \omega_0^2\upsilon_0^{-1} = b(p-p_0) + b\tau_{TV}\frac{\partial p}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Виділимо із системи (2) еволюційне рівняння, що описує довгу хвилю, яка біжить та повільно змінюється, використовуючи метод редуктивної теорії збурень [7, 8], згідно якого всі залежні змінні можна шукати у вигляді розкладів за малим параметром:

$$\begin{aligned}
&\upsilon = \upsilon_0 + \varepsilon\upsilon_1 + \varepsilon^2\upsilon_2, \qquad p = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2,\\
&V = \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2, \qquad W = \varepsilon W_1 + \varepsilon^2 W_2,
\end{aligned} \tag{3}$$

де ε — малий параметр, тоді як масштабне перетворення для незалежних змінних запишемо так:

$$\xi = \varepsilon^\delta(X - c_\xi t), \qquad \zeta = \varepsilon^\delta(Y - c_\zeta t), \qquad \theta = a\varepsilon^{(\delta+1)}t \tag{4}$$

(тут параметри c_ξ, c_ζ (компоненти швидкості поширення малого збурення в середовищі) та a визначаються під час досліджень).

Підстановки виразів (3) й (4) у систему (2) дають змогу в першому порядку малості в методі редуктивної теорії збурень отримати співвідношення для збурених величин:

$$\upsilon_1 = -\frac{(1+3\beta)\upsilon_0}{c_\xi}V_1, \qquad W_1 = \frac{c_\zeta}{c_\xi}V_1, \qquad p_1 = \frac{c^2}{c_\xi \upsilon_0}V_1,$$

$$c^2 = c_\xi^2 + c_\zeta^2 = (1+3\beta)c_{S_0}^2\frac{(\gamma_0-1)}{\gamma_0},$$

а також визначити швидкості:

$$c_\xi = c_{S_0}\sqrt{\frac{\gamma_0-1}{\gamma_0}}, \qquad c_\zeta = \sqrt{3\beta}c_\xi;$$

у другому порядку, — використовуючи попередні співвідношення, отримаємо рівняння еволюції для збуреної масової швидкості V_1:

$$2a\frac{\partial V_1}{\partial\theta} + [(\Gamma_{V_0}+1)(1+3\beta)+2\beta]V_1\left[\frac{\partial V_1}{\partial\xi} + \sqrt{3\beta}\frac{\partial V_1}{\partial\zeta}\right] +$$
$$+\frac{\varepsilon^{\delta-1}}{b(1+3\beta)\tau_{TP}}(b\tau_{TV}\tau_{TP}c^2 - (1+3\beta)\upsilon_0^2)\left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial\xi^2} + 2\sqrt{3\beta}\frac{\partial^2 V_1}{\partial\xi\partial\zeta} + 3\beta\frac{\partial^2 V_1}{\partial\zeta^2}\right) +$$
$$+\frac{(3\beta-\sqrt{3\beta})}{(1+3\beta)}\mu V_1\left(\sqrt{3\beta}\frac{\partial V_1}{\partial\xi} - \frac{\partial V_1}{\partial\zeta}\right) = 0.$$

Якщо прийняти, що

$$a \equiv \frac{[(\Gamma_{V_0}+1)(1+3\beta)+2\beta]}{2},$$

то остаточно рівняння еволюції для V_1 набуватиме вигляду

$$\frac{\partial V_1}{\partial\theta} + V_1\left[\frac{\partial V_1}{\partial\xi} + \sqrt{3\beta}\frac{\partial V_1}{\partial\zeta}\right] + \overline{\overline{\mu}}V_1\left(\sqrt{3\beta}\frac{\partial V_1}{\partial\xi} - \frac{\partial V_1}{\partial\zeta}\right) +$$
$$+\overline{\overline{\alpha}}\left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial\xi^2} + 2\sqrt{3\beta}\frac{\partial^2 V_1}{\partial\xi\partial\zeta} + 3\beta\frac{\partial^2 V_1}{\partial\zeta^2}\right) = 0, \tag{5}$$

де

$$\overline{\overline{\alpha}} \equiv \frac{\varepsilon^{\delta-1}}{2ab(1+3\beta)\tau_{TP}}(b\tau_{TV}\tau_{TP}c^2 - (1+3\beta)\upsilon_0^2), \qquad \overline{\overline{\mu}} \equiv \frac{(3\beta-\sqrt{3\beta})}{2a(1+3\beta)}\mu.$$

Зазначимо також, що при $\beta \to 0$, тобто коли блочністю середовища можна знехтувати, рівняння (5) переходить у рівняння еволюції:

$$\frac{\partial V_1}{\partial\theta} + V_1\frac{\partial V_1}{\partial\xi} + \overline{\alpha}\frac{\partial^2 V_1}{\partial\xi^2} = 0 \tag{6}$$

(тут $\overline{\alpha} \equiv (\varepsilon^{\delta-1}/(2ab\tau_{TP}))(b\tau_{TV}\tau_{TP}c^2 - \upsilon_0^2)$; $a = (\Gamma_{V_0}+1)/2$), що раніше було отримане [8] для суцільного одновимірного середовища та відоме як рівняння Бюргерса. Ця обставина дозволяє розглядати рівняння (5) як певне двовимірне узагальнення рівняння Бюргерса (6).

Розглянемо точні розв'язки еволюційного рівняння (5): спочатку шляхом лінійної заміни просторових змінних

$$s = \zeta - \sqrt{3\beta}\xi, \qquad h = \xi$$

зведемо рівняння (5) до спрощеного вигляду

$$V_{1\theta} + V_1 V_{1h} + \overline{\overline{\mu}} V_1(\sqrt{3\beta}V_{1h} - (3\beta+1)V_{1s}) + \overline{\overline{\alpha}} V_{1hh} = 0. \tag{7}$$

Виконаємо масштабне перетворення

$$V_1 = \frac{\sqrt{\overline{\overline{\alpha}}}}{1+\overline{\overline{\mu}}\sqrt{3\beta}}Y, \qquad h = \sqrt{\overline{\overline{\alpha}}}\overline{h}, \qquad s = \lambda\sqrt{\overline{\overline{\alpha}}}\overline{s}, \qquad \lambda = \overline{\overline{\mu}}\frac{1+3\beta}{1+\overline{\overline{\mu}}\sqrt{3\beta}},$$

тоді, опускаючи риски над змінними, рівняння (7) можна записати так:

$$Y_\theta + Y(Y_h - rY_s) + nY_{hh} = 0, \tag{8}$$

де $r = \operatorname{sign}\lambda$; $n = \operatorname{sign}\overline{\overline{\alpha}}$.

Для рівняння (8) легко вказати інваріантні частинні розв'язки, а саме:

хвильовий

$$Y = Y(\omega), \qquad \omega = Rs + h - D\theta, \qquad R, D = \text{const}, \tag{9}$$

та автомодельний

$$Y = \frac{\Phi(\omega)}{s}, \qquad \omega = \frac{h}{s}. \tag{10}$$

Розглянемо хвильові розв'язки. Підставляючи вираз (9) у рівняння (8), отримаємо таке:

$$Y = \frac{Y_0 + (2D + Y_0(rR-1))\exp q\omega}{1 + (1-rR)\exp q\omega},$$

де $q = (D + Y_0(rR-1))/n$. При $rR < 1$ розв'язок є гетероклінічною траєкторією, яка з'єднує два стаціонарні стани: Y_0 й $(2D + Y_0(rR-1))/(1-rR)$. Легко перевірити, що параметр n визначає монотонність профілю хвилі.

Очевидно, що при $R \to 1$ розв'язок вироджується в експоненційну функцію. Звідси, зокрема, бачимо, що параметр R впливає на висоту хвилі. Також зазначимо, що при $D = 0$ розв'язок (9) вироджується у стаціонарний розв'язок: $Y = Y(s, h)$.

Розглянемо автомодельні розв'язки. Підставляючи вираз (10) у рівняння (8) при $r = n = 1$, отримаємо неавтономне диференціальне рівняння:

$$\Phi'' = -p\Phi\Phi' - \Phi^2, \tag{11}$$

де $(\cdot)' = d(\cdot)/dp$, $p = 1 + \omega$. Загальний розв'язок рівняння (11) наведений у довіднику [9] (номер рівняння 2.6.3.17, *с. 319*). З огляду на складний аналітичний вираз параметричного розв'язку, можна також навести частинні розв'язки простішого вигляду: $\Phi = 6p^{-2}$ та $\Phi = \sum\limits_{i=0} a_i p^i$, де коефіцієнти a_i задовольняють рекурентне співвідношення

$$\sum_{r+k=i} a_r a_k(k+1) + a_{i+1}(i+2)(i+1) = 0,$$

$a_0 = \Phi(0)$, $a_1 = \Phi'(0)$ є довільними і визначають початкові умови в задачі Коші для рівняння (11).

Таким чином, згідно з результатами застосування редуктивної теорії збурень, довгохвильовий розв'язок моделі блокового середовища в першому наближенні задовольняє нелінійне амплітудне рівняння другого порядку, що належить до рівнянь типу Бюргерса. Серед точних розв'язків амплітудного рівняння знайдено хвильові розв'язки у вигляді хвиль перемикання та автомодельні. З аналізу хвильових розв'язків випливає, що врахування в моделі геосередовища його дискретності (параметр β) та обертальної динаміки (параметр μ) структурних елементів дозволяє не тільки уточнити характеристики профілю хвилі, а й передбачати зміну типу хвильового режиму, наприклад з хвилі стиску на хвилю розрідження.

1. *Садовский М. А.* Автомодельность геодинамических процессов // Вест. АН СССР. – 1986. – № 8. – С. 3–11.
2. *Вахненко В. А., Даниленко В. А., Кулич В. В.* Элементы теории самоорганизации и нелинейных волновых процессов в природных средах со структурой. – Київ, 1991. – 44 с. – (Препр. / НАН Украины. Ин-т геофизики им. С. И. Субботина).
3. *Danylenko V. A., Danevych T. B., Makarenko O. S., Skurativskyi S. I., Vladimirov V. A.* Self-organization in nonlocal non-equilibrium media. – Kyiv: Subbotin Inst. of Geophysics of the NAS of Ukraine, 2011. – 333 p.
4. *Филиппов Б. В., Хантулева Т. А.* Граничные задачи нелокальной гидродинамики. – Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та, 1984. – 86 с.
5. *Даниленко В. А.* До теорії руху блочно-ієрархічних геофізичних середовищ // Доп. АН України, 1992. – № 2. – С. 86–89.
6. *Даниленко В. А. Скуратівський С. І.* Хвильові розв'язки нелокальної моделі блокового середовища // Доп. НАН України. – 2011. – № 9. – С. 90–97.
7. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж. и др.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Пер. с англ. – Москва: Мир, 1988. – 694 с.
8. *Даниленко В. А., Даневич Т. Б.* Точні аналітичні розв'язки нелінійних рівнянь динаміки релаксуючих середовищ з просторовою та часовою нелокальністю // Доп. НАН України. – 2004. – № 3. – С. 110–114.
9. *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Москва: Физматлит., 2001. – 576 с.

Відділення геодинаміки вибуху Інституту геофізики
ім. С. І. Субботіна НАН України, Київ

Надійшло до редакції 18.07.2014

Член-корреспондент НАН Украины **В. А. Даниленко, Т. Б. Даневич, С. И. Скуратовский**

Эволюция волновых полей в блоковых релаксирующих средах

Исследована континуальная модель блоковых сред, которая учитывает разрывы скорости и напряжений между структурными элементами. Используя методы редуктивной теории возмущений, построено $(1+2)$ амплитудное уравнение второго порядка типа Бюргерса. Найдены точные кинкоподобные волновые и автомодельные решения амплитудного уравнения.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **V. A. Danylenko, T. B. Danevych, S. I. Skurativskyi**

Evolution of wave fields in block relaxing media

A continual model for block media is studied. It takes the discontinuities of velocities and stresses between structural elements of media into account. Using the methods of the reductive theory of perturbations, the $(1+2)$ *second order amplitude equation of the Burgers type is constructed. Kink-like wave and self-similar solutions of the amplitude equation are derived.*