

ЕЛЕКТРОДИНАМІКА СВЧ

УДК 535.421

РОЗСІЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ ПРЕДФРАКТАЛЬНИМИ СИСТЕМАМИ ЦИЛІНДРИЧНИХ СТРІЧОК

Г. І. Кошовий

*Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
Україна, 61070, м. Харків, вул. Чкалова 17
E-mail: gikosh@d4.khai.edu*

Задача розсіювання E -поляризованої електромагнітної хвилі системою циліндричних стрічок, поперечний перетин якої є предфракталом множини Кантора, приведена до системи сингулярних інтегральних рівнянь першого роду відносно густини поверхневих струмів. Отримані рівняння зручні як для застосування методу механічних квадратур, так і для перетворення їх до рівнянь другого роду за методом регуляризації. Окрім загальної динамічної моделі задачі пропонується квазістатична модель, що допускає простий явний розв'язок на утворювачі фракталу. Проводиться чисельний розрахунок та порівняння результатів. Лл. 4. Бібліогр.: 12 назв.

Ключові слова: фрактали, розсіювання, електромагнетизм, чисельні методи, моделювання.

З часу виникнення поняття фракталу пройшло біля трьох десятиліть, але це поняття, а також фрактальні підходи знайшли широке застосування у різних галузях науки [1,2]. Не оминули вони і розділів фізики, де вивчаються електромагнітні процеси [3,4].

Оскільки фрактальні об'єкти мають досить складну структуру, то дослідження взаємодії електромагнітних хвиль пов'язане з певними труднощами як аналітичного, так і обчислювального характеру. Але позитивним тут є те, що самоподібні фрактали утворюються за допомогою досить простого об'єкта (утворювача), який певним чином зменшується і переміщується теж не складним способом. Процес творення проходить нескінченний ряд стадій - поколінь предфракталів і цей граничний перехід вже викликає труднощі, що можуть долатися як тільки є явний розв'язок відповідної задачі на утворювачі. Тобто природною є схема, за якою спочатку досконало досліджуються предфрактальні об'єкти, і в першу чергу утворювач, а потім при наявності певного аналітичного розв'язку переходити до границі. Краще, щоб цей розв'язок мав явний та достатньо простий вигляд. Цього можна досягти, коли розглянути взаємодію плоскої E -поляризованої електромагнітної хвилі з найпростішим фрактальним розсіювачем, пов'язаним з досконалою множиною Кантора.

1. Фрактальні системи стрічок. Найпростішим фрактальним розсіювачем у просторі можна вважати класичну систему циліндричних стрічок з паралельними краями (абсолютно тонких та ідеально провідних), напрямні яких складають досконалу множину Кантора. Оскільки утворювачем множини Кантора за третинним принципом є два відрізки однакової довжини, що належать одній прямій, та відстанню між ними того ж розміру, то далі будемо називати множину

Кантора скорочено МВК (множина відрізків Кантора) на відміну від того, коли відрізки будуть замінюватися гладкими дугами. В останньому випадку скорочена назва буде МДК(множина дуг Кантора).

Доречно нагадати процес творення МВК з закритого відрізка довжиною $2a$ за третинним принципом. На першому етапі цей відрізок ділиться на три рівні частини і середня $-a/3; a/3$ відкидається. Залишається два відрізки $-a; -a/3$ та $a/3; a$, які складають предфрактал МВК першого покоління і одночасно є його утворювачем. Далі відрізки знову діляться на три частини кожний і середини відкидаються. В результаті отримуємо чотири відрізки $-a; -7a/9$, $-5a/9; -a/3$, $a/3; 5a/9$ і $7a/9; a$, що є предфракталом другого покоління. Предфрактал n -го покоління складають 2^n відрізки, кожний з яких має довжину $2a/3^n$. Якщо перейти до границі, коли $n \rightarrow \infty$, то і утвориться МВК, топологічна розмірність якої є нульовою, а от фрактальна розмірність $\ln 2/\ln 3$ є строго додатною. При зміні процесу творення (п'ятірний принцип) - ділити відрізок на п'ять частин і відкидати другий і четвертий відкриті відрізки та залишати три замкнені відрізки, отримуємо предфрактал n -го покоління складеного з 3^n відрізків, кожний з яких має довжину $2a/5^n$. Граничний перехід тут теж приводить до досконалої множини, але вже з іншою фрактальною розмірністю $\ln 3/\ln 5$, більшою від попередньої. Взагалі процес (спосіб) творення МВК можна змінювати так, що фрактальна розмірність буде набувати довільних значень від 0 до 1 [1].

Стосовно МДК у випадку третинного способу творення, зокрема, утворювачем може бути дзеркальна пара дуг (рис. 1), яка сама вже є цікавим об'єктом дослідження, і слід чекати підвищення зацікавленості, коли їх буде два, чотири і більше.

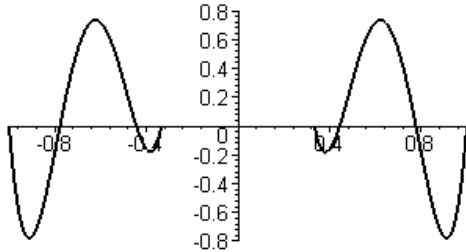


Рис. 1. Пара дуг - предфрактал першого покоління (утворювач) МДК

Коли за основу творення взяти ділення на п'ять частин, тоді у якості утворювача МДК фракталу можна взяти дзеркальну трійку дуг, як показано на рис. 2.

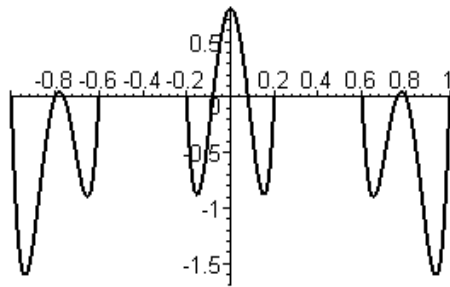


Рис. 2. Зразок утворювача МДК фракталу за п'ятірним способом

Можна брати і інші способи творення двовимірних фракталів, використовуючи більшу кількість дуг даного класу чи змінюючи їх форму.

2. Загальна постановка задачі. На систему ідеально провідних, нескінченно тонких циліндричних стрічок, напрямні яких являють собою предфрактал МДК n -го покоління, під певним кутом набігає знизу плоска E -поляризована електромагнітна хвиля. Задача про її розсіювання на даному об'єкті може бути приведена до крайової задачі Діріхле для однорідного рівняння Гельмгольца

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2\right)u(x, y) = 0$$

на системі гладких дуг $u(x, y)|_{\gamma_k} = u_0(x, y)$. Ця задача має єдиний розв'язок при виконанні певних умов на нескінченності та в граничних точках дуг [5]. Використавши фундаментальний розв'язок рівняння Гельмгольца для двовимірного вільного простору, перейдемо до системи інтегральних рівнянь (ІР) першого роду, яку запишемо у наступному вигляді:

$$\sum_{m=1}^N \int_{\gamma_m} J(\vec{r}') H_0^{(1)}(k|\vec{r} - \vec{r}'|) dl' = u_0(\vec{r}'). \quad (1)$$

Тут $J(\vec{r}')$ деяка комплекснозначна функція, визначена на контурі γ_m , яку потрібно знайти; $H_0^{(1)}(z)$ - функція Ханкеля першого роду з нульовим порядком (індексом). Система дуг γ_m розташована так, що утворюється пред-фрактал МДК n -ї генерації. На рис. 3 зображені половини систем дуг, що відповідають другій та третій стадіям творення фракталу, де використовуються кубічні параболи і третинний спосіб.

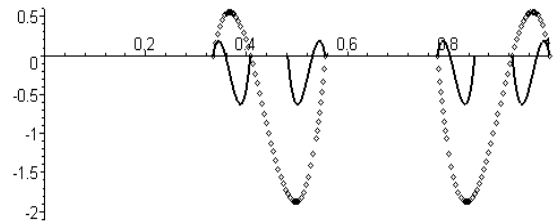


Рис. 3. Половини предфракталів МДК другого (крапками) та третього покоління

В першу чергу перейдемо від криволінійних інтегралів у системі (1) до звичайних. Для цього візьмемо деяку параметризацію дуг $\vec{r}_m = (\bar{x}_m(t), \bar{y}_m(t))$. В результаті отримаємо наступну систему ІР:

$$\sum_{m=1}^N \int_{-1}^1 j_m(t) H_0^{(1)}(k|\vec{r}_\kappa(\tau) - \vec{r}_m(t)|) dt = u_0(\vec{r}_\kappa(\tau)). \quad (2)$$

Тут підлягають визначенню функції $j_m(t) = J(\vec{r}_m(t)) |\vec{r}'_m(t)|$, а індекс κ змінюється від 1 до N . Слід також зазначити, що у найпростішому випадку, коли творення фракталу здійснюється за третинним принципом, то кількість дуг n -ї стадії $N = 2^n$. Коли ж брати інший принцип, то їх кількість буде 3^n , 4^n чи ще більша.

Очевидно ядра системи (2), що не знаходяться на діагоналі ($\kappa \neq m$) є регулярними, а от у діагональних ядрах ($m = \kappa$) виникає логарифмічна особливість при співпаданні змінних τ з t . Виділимо зазначену особливість у найбільш простому вигляді так, як це робиться у випадку з криволінійною стрічкою [6]. Для цього розглядаємо певний клас гладких дуг, який можна описати цілими функціями

$$y_m(t) = \delta_m(t^2 - 1) \prod_{\ell=1}^s (t - \alpha_\ell).$$

При цьому перша координата радіус-вектора змінюється лінійно у відповідності з відрізками

МВК. Звернемось далі до крайнього правого від-
різка предфракталу КДМ n -ї генерації, який мож-
на подати рівнянням $x = \frac{1}{3}(3^n - 1 + t)$, $|t| \leq 1$.

Тоді останнє діагональне ядро у аргумен-
ті буде містити наступний вираз:

$$k(|\bar{r}(\tau) - \bar{r}(t)|) = \frac{ka}{3^n} |\tau - t| \sqrt{1 + \delta_n^2 3^{2n} w^2(\tau, t)},$$

де функція $w(\tau, t) = \frac{y(\tau) - y(t)}{\tau - t}$ є обмеженою фу-
нкцією у квадраті $(\tau, t) | \tau| \leq 1, |t| \leq 1$. У випад-
ку найпростішої дуги квадратичної параболи
 $w = \tau + t$.

Як можна легко пересвідчитись, подібні
аргументи мають і інші діагональні ядра. Далі для
виділення логарифмічної особливості застосову-
ємо відоме розвинення функції Ханкеля в ряд і як
результат отримаємо

$$H_0^{(1)}(k|\bar{r}_m(\tau) - \bar{r}_m(t)|) = \frac{2i}{\pi} [R_{mm}(\tau, t) + \ln|\tau - t|], \quad (3)$$

де $R_{mm}(\tau, t)$ вже є регулярним ядром. В результаті
таких перетворень маємо систему сингулярних ІР

$$\int_{-1}^1 j_k(t) \ln|\tau - t| dt + \sum_{m=1}^{2^n} \int_{-1}^1 j_m(t) R_{km}(\tau, t) dt = v_k(\tau), \quad (4)$$

де $R_{km}(\tau, t) = \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(k|\bar{r}_k(\tau) - \bar{r}_m(t)|)$, $k \neq m$;
права частина $v_k(\tau) = 2\pi \exp(ik\bar{q} \cdot \bar{r}_k(\tau))$;
 $\bar{q}(q_1, q_2)$ - напрямний вектор плоскої хвилі.

Ця система і буде базовою, як для засто-
сування прямих чисельних методів, так і для по-
дальшого перетворення за методом регуляризації
Карлемана-Векуа [7].

3. Методи дослідження та розв'язку. Се-
ред прямих чисельних методів розв'язку інте-
гральних рівнянь найпростішим є метод механічних
квадратур (ММК). Застосування його полягає у ви-
борі деяких квадратурних формул для інтегрування
та системи точок коллокацій, в результаті чого ви-
никає система лінійних алгебраїчних рівнянь
(СЛАР). У випадку з сингулярними інтегральними
рівняннями зазначений вибір повинен бути особли-
во коректним [8,9]. Далі будемо притримуватись
реалізації ММК, наведеної і обґрунтованої у моно-
графії [8]. Її застосування у випадку однієї дуги об-
раного класу приводить до непоганих результатів
[6]. Нагадаємо основні моменти в реалізації ММК і

відміну, пов'язану з системою таких дуг, що утво-
рюють предфрактал. Розв'язок системи (4) розшу-
куємо у вигляді $y_k(t) = \frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}$, який враховує

особливість на кінцях дуг. До звичайних інтегралів
застосовуємо відому квадратурну формулу Мелліна
[10], яка має найвищу алгебраїчну точність, до нев-
ласних інтегралів (з логарифмом) у якості квадрату-
рної використовуємо формулу, яка є точною для
полінома $n-1$ степеня (n - кількість квадратур-
них вузлів) [8]. Квадратурні вузли та точки колло-
кації є коренями поліномів Чебишева першого роду.
В результаті виникає СЛАР із блочною матрицею
коефіцієнтів. Діагональні блоки, що відповідають
окремим дугам, мають майже однакові елементи.
Вони визначаються відповідними квадратурними
коефіцієнтами та виразом $R_{mm}(\tau, t)$, що впливає з
формули (3). Слід зазначити, що він у випадку, коли
 $\tau = t$, визначається формулою

$$R_{mm}(t, t) = \ln \frac{\gamma}{2i} \sqrt{1 + \delta^2 w^2(t, t)}.$$

Недіагональні блоки, обумовлені взаєм-
ним впливом дуг у системі, розраховуються за
більш точними квадратурними формулами з ви-
користанням виразів $R_{mk}(\tau, t)$, $m \neq k$. Шукани-
ми у СЛАР є значення функцій $\varphi_k(t)$ у квадрату-
рних вузлів. Після їх знаходження функції $j_k(t)$
відновлюються за наступними формулами:

$$j_k(t) = \frac{1}{n\sqrt{1-t^2}} \sum_{p=1}^n \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{n-1} T_m(\xi_p) T_m(t) \right] \varphi_k(\xi_p), \quad (5)$$

де $T_n(\tau) = \cos(n \arccos \tau)$ є поліномом Чебишева
першого роду; $\xi_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi$ - квадратурні
вузли. На рис. 4 наведені розрахунки абсолютної
величини густини поверхневих струмів для утво-
рювача МДК (зображення наведено крапками) і
другої стадії генерації того ж самого фракталу
(суцільні лінії).

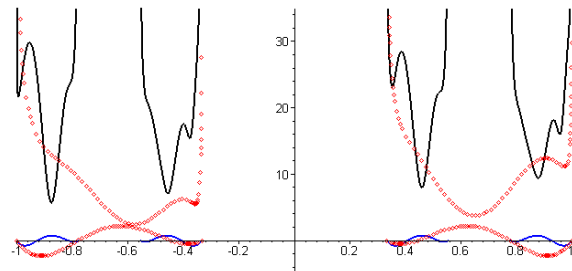


Рис. 4. Розподіл густини поверхневих струмів коли хвиля
набігає під кутом 30° до горизонтальної осі ($q_1 = \sqrt{3}/2$) та
значенні частотного параметра $\chi = \pi/2$

Безперечно цей метод приваблює своєю простотою, але він має певні вади, що не дозволяють далеко просунутись у напрямку творення фракталів. Основною з них є неможливість отримати явний аналітичний розв'язок. Формально формула (5) є і явною і аналітичною, але вона містить значення $\varphi_\kappa(\xi_m)$, які неможливо визначити інакше ніж розрахувати чисельно. Тому звернемося до чисельно-аналітичних методів, а точніше до методу регуляризації Векуа-Карлемана (МРВК). Він успішно застосовується до сингулярних ІР, що виникають у випадку однієї криволінійної стрічки [6] і може бути узагальнений на систему таких стрічок. Дійсно, систему (4) можна переписати як одне рівняння

$$\int_{-1}^1 j_\kappa(t) \ln|\tau - t| dt = f_\kappa(\tau), \kappa = 1, \dots, 2^n,$$

де

$$f_\kappa(\tau) = v_\kappa(\tau) - \sum_{m=1}^{2^n} \int_{-1}^1 j_m(t) R_{\kappa m}(\tau, t) dt.$$

Застосовуючи далі формулу обернення Карлемана [11]

$$j_\kappa(x) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{1-x^2}} \left[\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau-t} f'_\kappa(\tau) d\tau - \frac{1}{\ln 2} \int_{-1}^1 \frac{f_\kappa(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau \right],$$

досить просто отримати систему ІР другого роду, яка має наступний вигляд:

$$j_\kappa(x) + \sum_{m=1}^{2^n} \int_{-1}^1 j_m(t) R_{\kappa m}(x, t) dt = g_\kappa(x).$$

Ядра цієї системи, а також праві частини визначаються через ядра та праві частини попередньої системи за допомогою формул подібних до формули Карлемана. Наведемо тут вираз для правої частини

$$g_\kappa(x) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{1-x^2}} \left[\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau-t} v'_\kappa(\tau) d\tau - \frac{1}{\ln 2} \int_{-1}^1 \frac{v_\kappa(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau \right].$$

Отриманими системами ІР другого роду власне і закінчується метод регуляризації, далі застосовують той чи інший метод розв'язку ІР другого роду. Тут для порівняння з попереднім методом обирається проєкційний метод із застосуванням поліномів Чебишева першого роду у якості координатних функцій: шукані функції подаються у вигляді розвинення

$$\varphi_\kappa(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_\kappa^m T_m(x).$$

Далі їх підставляють до системи, множать на $T_m(x)/\sqrt{1-x^2}$ і інтегрують, враховуючи ортогональність зазначених поліномів на відрізку $[-1, 1]$ з множителем $1/\sqrt{1-x^2}$. В результаті виникає нескінченна СЛАР відносно α_κ^m . Нижче ця схема буде застосована при дослідженні взаємодії електромагнітної хвилі з утворювачем МВК фракталу у випадку квазі-статичної моделі.

4. Квазі-статична модель. Під час творення МВК чи МДК фракталів за третинним принципом частотний параметр $\chi_n = \frac{ka}{3^n} = \frac{2a}{\lambda} \frac{\pi}{3^n}$

зменшується утричі при переході від деякої стадії до наступної. Тому, починаючи з певної стадії творення, його можна вважати настільки малим, наскільки це потрібно. Тут почнемо з квазі-статичної моделі взаємодії хвилі з утворювачем МВК фракталу. Ця модель ґрунтується на припущенні, що частотний параметр є невеликим, завдяки чому можна побудувати процес послідовних наближень. При цьому базовою системою ІР буде за виглядом отримана вище система (4), але із значно простішими ядрами

$$R_{mm} u = \frac{\pi}{2i} H_0^1 \chi_1 |u| - \ln|u|, m = 1, 2;$$

$$R_{m(3-m)} u = \frac{\pi}{2i} H_0^1 \chi_1 |4 + (-1)^m u|.$$

Праві частини при цьому можна записати у вигляді

$$v_\kappa(\tau) = \exp[i\chi((-1)^\kappa 2 + \tau)q_1],$$

де $q_1 = \cos\theta$, θ - кут між напрямним вектором і віссю абсцис.

Припущення малості частотного параметра χ_1 приводить до наступних виразів:

$$R_{mm}^0 = \ln \frac{\chi \chi_1}{2i};$$

$$R_{m(3-m)}^0 = \ln \frac{\chi \chi_1}{2i} [4 + (-1)^m u].$$

На основі цих виразів та формули обернення Карлемана прийдемо до системи ІР другого роду, яку можна при ортогональному падінні хвилі записати у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \varphi_m(x) + (-1)^m \int_{-1}^1 \varphi_{3-m}(t) K_m^0(x, t) dt = \\ = -\frac{2}{\ln 2} + \frac{\alpha_1^0 - \alpha_2^0}{\ln 2} \ln \frac{\chi \chi_1}{2i}, \end{aligned} \quad (6)$$

де $\alpha_k^0 = \int_{-1}^1 \varphi_k(x) dx$,

$$K_m^0(x, t) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-t^2}} \left[\Phi_m(x, t) - \frac{1}{\ln 2} \Psi_m(t) \right].$$

Ядра системи визначаються невласними інтегралами залежними від параметрів:

$$\Psi_\kappa(t) = \int_{-1}^1 \ln(4 + (-1)^\kappa (\tau - t)) \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}};$$

$$\Phi_\kappa(x, t) = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau - x} \frac{d\tau}{4 + (-1)^\kappa (\tau - t)}, \quad \kappa = 1, 2.$$

Для їх дослідження та наближеного обчислення скористаємось з наступних розвинень:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4 - (-1)^\kappa (t - \tau)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m\kappa}}{4^{m+1}} (t - \tau)^m; \\ \ln[4 + (-1)^\kappa (\tau - t)] &= \\ &= \ln 4 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{4^m m} (-1)^{\kappa m} (\tau - t)^m. \end{aligned}$$

Збіжність цих розвинень забезпечується нерівністю $|\tau - t| \leq 2$ і є досить високою. Таким чином, невласні інтеграли можна подати у вигляді наступних рядів:

$$\Psi_\kappa(t) = \pi \ln 4 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{4^m m} (-1)^{\kappa m} I_m(t);$$

$$\Phi_\kappa(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m\kappa}}{4^{m+1}} I_m(x, t),$$

що містять більш прості невласні інтеграли:

$$I_m(t) = \int_{-1}^1 \frac{(\tau - t)^m}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau;$$

$$I_m(x, t) = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau - x} (t - \tau)^m d\tau.$$

Для того, щоб їх знайти, використовуємо біном Ньютона

$$(\tau - t)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k \tau^k (-t)^{m-k}.$$

В результаті приходимо до інтегралів

$$I_k = \int_{-1}^1 \frac{\tau^k d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}, \quad I_k x = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau - x} \tau^k d\tau,$$

які досить просто беруться у квадратурах. Покажемо це на прикладі найскладнішого з них

$$I_0 x = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau - x} d\tau,$$

який є інтегралом типу Коші, і тут розглядається його головне значення.

Функція $\sqrt{1-\tau^2}$ на проміжку $[-1, 1]$ задовольняє умові Гельдера, тому головне значення існує. Знайдемо його

$$\begin{aligned} I_0 x &= 2x \int_0^1 \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2 - x^2} d\tau = 2x \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{\sin^2 \varphi - x^2} = \\ &= 2x \int_0^{\pi/2} \frac{1 - x^2 + x^2 - \sin^2 \varphi}{\sin^2 \varphi - x^2} d\varphi = \\ &= 2x \int_0^{\pi/2} \frac{1 - x^2}{\sin^2 \varphi - x^2} d\varphi - \pi x = -\pi T_1(x). \end{aligned}$$

Інші інтеграли типу Коші $I_\kappa x$ обчислюються за допомогою $I_0 x$.

Так, наприклад,

$$I_1 x = \int_{-1}^1 \sqrt{1-\tau^2} d\tau + x I_0 x = \frac{\pi}{2} T_2(x);$$

$$\begin{aligned} I_2 x &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-\tau^2} \tau + x d\tau + x^2 I_0 x = \\ &= x \frac{\pi}{2} - x^3 \pi. \end{aligned}$$

Таким чином, коли обмежитись тільки трьома доданками для інтегралів, що визначають ядра системи (5), отримаємо наступні розвинення:

$$\Psi_\kappa t = \pi \left[\ln 4 - \frac{1}{32} - \frac{-1^\kappa}{4} T_1(t) - \frac{1}{64} T_2(t) \right];$$

$$\Phi_\kappa x, t = \pi \left\{ -\frac{1}{4} T_1(x) + \frac{-1^\kappa}{16} \left[\frac{1}{2} T_2 x - T_1(t) T_1(x) \right] + \left[T_1(t) T_2(x) - \frac{1}{2} T_1(x) T_2(t) - \frac{3}{4} T_1(x) - \frac{1}{4} T_3(x) \right] \frac{1}{64} \right\}.$$

Для завершення проекційного методу підставимо ці розвинення до системи (5) і проінтегруємо за змінною t , а далі множимо на $T_\kappa x / \sqrt{1-x^2}$ з $\kappa = 3, 2, 1, 0$ і інтегруємо за зовнішньою

змінною x . В результаті виникають співвідношення:

$$\text{з } \kappa = 3: \alpha_1^3 + \frac{\alpha_2^0}{256} = 0, \quad \alpha_2^3 - \frac{\alpha_1^0}{256} = 0;$$

$$\text{з } \kappa = 2: \alpha_1^2 = \frac{-4\alpha_2^0 + \alpha_2^1}{128}, \alpha_2^2 = \frac{-4\alpha_1^0 + \alpha_1^1}{128}.$$

Для $\kappa = 1, 0$ маємо наступні СЛАР:

$$\text{з } \kappa = 1: \alpha_1^1 + \frac{67}{256}\alpha_2^0 - \frac{\alpha_2^1}{32} + \frac{\alpha_2^2}{256} = 0;$$

$$\alpha_2^1 - \frac{67}{256}\alpha_1^0 - \frac{\alpha_1^1}{32} - \frac{\alpha_1^2}{256} = 0;$$

$$\text{з } \kappa = 0: \alpha_1^0 \ln 2 - (\alpha_1^0 + \alpha_2^0) \ln \frac{\gamma\chi}{2i} -$$

$$- \alpha_1^0 \left(\ln 4 - \frac{1}{32} \right) - \frac{\alpha_1^1}{8} + \frac{\alpha_1^2}{128} = -2.$$

Очевидно, що останні доданки у лівих частин цих співвідношень для $\kappa = 0, 1, 2$ слід відкинути і скористатись правилом Крамера для обчислення коефіцієнтів α_m^k . В результаті отримуємо

$$\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = \alpha^0 = 2 / (2 \ln \frac{\gamma\chi}{4i} + \ln 8);$$

$$-\alpha_1^1 = \alpha_2^1 = \frac{67}{256} \alpha_0; \alpha_1^2 = \alpha_2^2 = -\frac{\alpha_0}{32}.$$

Таким чином, маємо наступний вираз для шуканої функції:

$$\varphi_m(x) = \alpha_0 (1 + (-1)^m) \frac{67}{256} T_1(x) - \frac{1}{32} T_2(x).$$

Слід нагадати, що він є асимптотичним по відношенню до частотного параметру $\chi = \frac{\pi 2q}{3 \lambda}$, по-

хибка визначається величиною $O(\chi^2 \ln \chi)$. Чисельні розрахунки виконаних за різними методами - ММК та МРВК - співпадають з графічною точністю до значень частотного параметру, що не перевищують $\chi = \pi / 30$.

Висновки. Розглядаються нові розсіювачі електромагнітних хвиль у вигляді предфрактальних систем циліндричних стрічок з паралельними краями. При цьому поперечний перетин розсіювача може бути як предфракталом звичайної множини Кантора з різною фрактальною розмірністю, так і фрактальною множиною дуг з досить складною формою.

Дослідження задачі проведено на основі досить загального і відомого методу інтегральних рівнянь з використанням чисельного методу механічних квадратур і чисельно-аналітичного методу регуляризації, які досить часто застосовуються до розв'язку подібних задач. Наведені чисельні розрахунки абсолютної величини густини поверхневих струмів на елементах утворювача МДК з використанням поліномів четвертого порядку, а також відповідного предфракталу другої стадії творення.

Запропонована квазістатична модель, що може бути використана, і це доведено у роботі при утворенні фрактальних розсіювачів. Асимптотичний підхід, що запропоновано, може бути узагальнений на системи передфракталів будь-якої фрактальної розмірності. У роботі головна увага приділена тому, щоб знайти густину поверхневих струмів, бо інші характеристики знаходяться без особливих труднощів [12]. Якщо розвинути далі асимптотичний підхід, то його можна буде застосовувати і при дослідженні задач взаємодії між кількома фрактальними об'єктами, зануреними у діелектричний шар. Наявність фракталів може змінити електромагнітні характеристики цього шару, тобто можна буде моделювати метаматеріали.

1. Mandelbrot B. B. The Fractal geometry of Nature. - New York: W. H. Freeman & Co, 1983. - 600 p.
2. Barnsley M. F. Fractals everywhere. - New York: Academic Press Professional, 1993. - 400 p.
3. Jaggard D. L. Fractal Electrodynamics: Wave interactions with discretely self - similar structure // C. Baum and H. Kritikos Electromagnetic Symmetry. - Washington DC: Taylor and Francis Publishers - 1995. - P.231-261.
4. Werner D. H. An overview of Fractal electrodynamics Research // Proceedings of the 11th. Annual review of progress in Applied Comp. Electromagnetics - 1995. - 2 - P.964-969.
5. Шестопалов В. П., Тучкин Ю. А., Поединчук А. Е., Сиренко Ю. К. Новые методы решения прямых и обратных задач теории дифракции. - Харьков: Основа, 1997. - 283с.
6. Кошовий Г. І. Поверхневі струми збуджені E-поляризованою хвилею на криволінійних стрічках // Радиофизика и электроника.-Харьков: Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. - 2004. - 2, №3. - С.509-514.
7. Мухомелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Гос. Изд-во физ-мат лит, 1962. - 600 с.
8. Назарчук З. Т. Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах. - Киев: Наук. думка, 1989. - 256 с.
9. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. - М.: ТОО "Янус", 1995. - 520 с.
10. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. - М.: Наука, 1967. - 500 с.
11. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. - М.: Наука, 1977. - 640 с.
12. Koshovy G. I. Electromagnetic characteristics of the simplest strip system // Радиофизика и радиоастрономия. - 2003. - №1. - С. 45-51.

SCATTERING OF ELECTROMAGNETIC WAVES BY PREFRACTAL STRIPS SYSTEM

G. I. Koshovy

The problem of scattering of the E-polarized electromagnetic wave by systems of cylindrical strips is considered. The cross-section of the system is an pre-fractal of the Cantor set. The problem is reduced to a system of singular integral equations (SIE) of the first kind with respect to surface currents' density. The system of the SIE is convenient both for application of direct numerical method (mechanical quadratures) and for its transformation to a second kind's integral equations by the Vekua-Carleman's method of regularization. Except for common dynamic model of the problem, the quasistatic model (it supposes a simple explicit solution) is presented. The comparison of numerical results of calculations by the indicated methods for the models is carried out.

Key words: fractals, scattering, electromagnetic, numerical methods, modeling.

РАССЕИВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ
ВОЛН ПРЕДФРАКТАЛЬНЫМИ
СИСТЕМАМИ ЛЕНТ

Г. И. Кошевой

Задача рассеивания E -поляризованной электромагнитной волны системой цилиндрических лент, поперечное сечение которой представляет собой предфрактал множества

Кантора, приведена к системе сингулярных интегральных уравнений первого рода относительно плотности поверхностных токов. Полученные уравнения удобны как для применения метода механических квадратур, так и для преобразования их к уравнениям второго рода методом регуляризации. Кроме общей динамической модели предлагается квазистатическая модель, допускающая простое явное решение. Приводятся численные расчеты и сравнение результатов.

Ключевые слова: фракталы, рассеивание, электромагнетизм, численные методы, моделирование.

Рукопис надійшов 10 липня 2006 р.