

В. П. Голуб, Я. В. Павлюк, П. В. Фернати

**К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ ДРОБНО-ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ
ЯДЕР НАСЛЕДСТВЕННОСТИ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОУПРУГИХ
МАТЕРИАЛОВ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины
ул. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина; e-mail: creep@intech.kiev.ua*

Abstract. A problem is solved on determination of parameters of the fractional-exponential hereditary kernels of nonlinearly viscoelastic materials. The methods of determination of parameters, which are using in the cubically nonlinear theory of viscoelasticity and in the nonlinear theories and which are based on conditions of similarity of the initial creep curves and the isochronous creep diagrams, are analyzed. The mentioned parameters are determined and experimentally approved for different materials: the oriented polypropylene, nylon fibers FM 3001 and 10001, microplastic, glass-reinforced plastics TC-8/3-250, СВAM and the contact moulding one.

Key words: nonlinear theories of viscoelasticity, fractional-exponential hereditary kernel, parameters of kernel, creep curve, isochronous creep diagram.

Введение.

Одной из основных задач наследственной теории ползучести является выбор ядер интегральных уравнений, определение их резольвент и достоверное определение параметров ядер [4, 5, 9, 12, 13]. Вязкоупругое поведение некоторых армированных полимеров, стеклопластиков и металлов, а также горных пород достаточно хорошо описывается с помощью резольвентных операторов с ядром наследственности в виде дробно-экспоненциальной функции Работнова [9]. Задача определения параметров дробно-экспоненциальных ядер наследственности нелинейных вязкоупругих материалов усложнена тем обстоятельством, что существует несколько вариантов определяющих уравнений и соответственно несколько методов нахождения параметров ядер наследственности.

В настоящей работе решена задача идентификации дробно-экспоненциальных ядер наследственности нелинейно-вязкоупругих материалов в рамках упрощенных вариантов нелинейной теории, включающих кубичную теорию [4, 5, 6, 9], теорию [11, 14], отражающую подобие первичных кривых ползучести, и теорию [5, 9], отражающую подобие изохронных диаграмм ползучести, и полученные решения апробируются на задачах расчета деформаций ползучести при постоянных напряжениях.

§1. Постановка задачи. Объект исследования.

В одномерном случае связь между деформацией $\varepsilon(t)$ и напряжением $\sigma(t)$ в соответствии с кратно-интегральным представлением Вольтерра – Фреше задаем соотношением [9]

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & \frac{\sigma(t)}{E} + \frac{1}{E_1} \int_0^t K_1(t-\tau_1)\sigma(\tau_1)d\tau_1 + \frac{1}{E_2} \int_0^t \int_0^t K_2(t-\tau_1, t-\tau_2)\sigma(\tau_1)\sigma(\tau_2)d\tau_1d\tau_2 + \\ & + \frac{1}{E_3} \int_0^t \int_0^t \int_0^t K_3(t-\tau_1, t-\tau_2, t-\tau_3)\sigma(\tau_1)\sigma(\tau_2)\sigma(\tau_3)d\tau_1d\tau_2d\tau_3 + \dots, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где E – модуль упругости материала; $K_1(\cdot)$, $K_2(\cdot)$, $K_3(\cdot)$ – функции интегрирования, которые являются характеристиками материала и интерпретируются как ядра ползучести; E_1 , E_2 , E_3 – постоянные.

Ограничивая уравнение (1.1) тремя интегральными членами и принимая далее, что вязкоупругие свойства материала при растяжении и сжатии одинаковы, и исключая, соответственно, из (1.1) двойной интеграл, получаем нелинейное определяющее уравнение кубичной теории [4, 5]

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left[\sigma(t) + \int_0^t K_1(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \right] + \frac{1}{E_3} \int_0^t K_3(t-\tau) \sigma^3(\tau) d\tau, \quad (1.2)$$

которое используется для описания ползучести вязкоупругих материалов, когда в зависимости от уровня напряжений можно выделить линейную и нелинейную области вязкоупругих свойств. Здесь $K_1(t-\tau)$ и $K_3(t-\tau)$ – ядра наследственности в линейной и нелинейной областях, соответственно, а $E_1 = E$.

В качестве частных случаев общего нелинейного уравнения (1.1) рассматриваем также нелинейное интегральное соотношение [11, 14]

$$\varepsilon(t) = \psi(\sigma(t)) + \lambda \int_0^t K(t-\tau) f(\sigma(\tau)) d\tau, \quad (1.3)$$

отражающие подобие первичных кривых ползучести « $\varepsilon-t$ », и нелинейное интегральное соотношение [9]

$$\varphi(\varepsilon(t)) = \sigma(t) + \lambda \int_0^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau, \quad (1.4)$$

отражающее подобие изохронных диаграмм ползучести « $\varphi-\varepsilon(t)$ ». Здесь $K(t-\tau)$ – ядро ползучести; $\psi(\sigma(t))$, $f(\sigma(t))$, $\varphi(\sigma(t))$ – функции, характеризующие механические свойства материала и определяемые экспериментально; λ – реологический параметр.

В качестве ядер ползучести $K(t-\tau)$ в нелинейных интегральных уравнениях (1.2) – (1.4) используем дробно-экспоненциальное ядро [9]

$$K(t-\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{\alpha+(1+\alpha)n}}{\Gamma[(1+\alpha)(1+n)]}, \quad (1.5)$$

где α , β – параметры ядра, подлежащие определению из экспериментов на ползучесть или релаксацию ($1 > \alpha > 0$; $\beta > 0$); $\Gamma[\cdot]$ – гамма-функция.

Параметры α и β дробно-экспоненциального ядра (1.5), а также реологический параметр λ в уравнениях (1.3) и (1.4) определяются по результатам обработки экспериментальных данных на одноосную ползучесть при фиксированной температуре и нескольких уровнях постоянных напряжений. В этом случае величину напряжения $\sigma(t)$ задаем соотношением

$$\sigma(t) = h(t) \sigma_k \quad (k = \overline{1, m}), \quad (1.6)$$

где $h(t)$ – единичная функция Хевисайда ($h(t) = 0$ при $t < 0$ и $h(t) = 1$ при $t \geq 0$); $\sigma_k = \text{const}$.

Методы определения параметров дробно-экспоненциальных ядер наследственности в нелинейных интегральных уравнениях (1.2) – (1.4) апробируются в работе экспериментально на примере микропластика, стеклопластика ТС 8/3-250 и стеклопластика СВМ. Экспериментальные данные заимствованы из работ [7, 8, 10].

Задача заключается в установлении характера нелинейности вязкоупругих свойств исследованных материалов, определении параметров дробно-экспоненциальных ядер наследственности для этих материалов в рамках соответствующих нелинейных теорий и апробации методов определения параметров ядер на задачах расчета деформаций ползучести при постоянных напряжениях.

§2. Кубичная теория.

Область применения кубичной теории ограничена, как известно, вязкоупругими материалами, обнаруживающими малые отклонения от линейного поведения и обладающие одинаковыми вязкоупругими свойствами на растяжение и на сжатие.

2.1. *Методика определения параметров ядер наследственности.* Кубичная теория является частным случаем общей нелинейной теории вязкоупругости Вольтерра – Фреше, определяющие уравнения которой включают только линейный и кубичный члены. Ползучесть материала, как собственно и релаксация напряжений, описывается двумя независимыми ядрами $K_1(t)$ и $K_3(t)$, отражающими, соответственно, линейное и нелинейное вязкоупругое деформирование материала.

Методика определения коэффициентов и параметров ядер ползучести в кубичной теории (1.2) реализуется следующим образом [5].

Пусть имеем семейство кривых ползучести « $\varepsilon - t$ » при разных уровнях постоянных напряжений σ_k , каждое из которых достигнуто ступенчатым нагружением согласно (1.6). Определяющее уравнение ползучести (1.2) с учетом (1.6) записываем в виде

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_k}{E} \left[1 + \lambda_1 \int_0^t K_1(\tau) d\tau \right] + \frac{\sigma_k^3}{E_3} \lambda_3 \int_0^t K_3(\tau) d\tau \quad (h(t) = 1). \quad (2.1)$$

По заданным кривым ползучести (2.1) строим функции ползучести

$$J_k(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_k} = \frac{1}{E} \left[1 + \lambda_1 \int_0^t K_1(\tau) d\tau \right] + \frac{\sigma_k^2}{E_3} \lambda_3 \int_0^t K_3(\tau) d\tau \quad (2.2)$$

и определяем область линейности вязкоупругих свойств материала. Полагаем, что материал обладает линейными вязкоупругими свойствами в некоторой области напряжений $0 < \sigma_k < \sigma_*$, если в этой области функция ползучести (2.2) не зависит от уровня напряжений. Аналитически условие линейности с учетом статистической природы вязкоупругих свойств материала сформулировано в [2].

Параметры ядер ползучести и неизвестные коэффициенты в (2.1) определяем в два этапа. На первом этапе определяем параметры ядра ползучести $K_1(t)$ и параметр λ_1 , описывающие линейное вязкоупругое деформирование материала. В этом случае уравнение (2.2) преобразуем к линейному интегральному уравнению

$$\frac{\bar{\varepsilon}(t)}{\bar{\sigma}_k} = \frac{1}{E} \left(1 + \lambda_1 \int_0^t K_1(\tau) d\tau \right), \quad (2.3)$$

неизвестные параметры которого определяются путем минимизации функционала

$$F(\lambda_1, \bar{p}_i) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\bar{\varepsilon}(t_j, \bar{\sigma}_k)}{\bar{\sigma}_k} - \frac{1}{E} \left[1 + \lambda_1 \int_0^{t_j} K_1(\tau, \bar{p}_i) d\tau \right] \right\}^2. \quad (2.4)$$

Здесь \bar{p}_i – параметры ядра ползучести $K_1(t)$; $\bar{\varepsilon}(\cdot)$ – экспериментальные значения деформаций ползучести в линейной области ($\bar{\sigma}_k < \sigma_*$).

На втором этапе определяем параметры ядра ползучести $K_3(t)$ и коэффициент $b = \lambda_3 E_3^{-1}$, описывающие деформирование материала в нелинейной области. В этом случае уравнение (2.2) можно представить в виде

$$E \frac{\tilde{\varepsilon}(\tilde{\sigma}_k, t_j)}{\tilde{\sigma}_k} - \left(1 + \lambda_1 \int_0^t K_1(\tau, \bar{p}_i) d\tau \right) = b E \tilde{\sigma}_k^2 \int_0^t K_3(\tau) d\tau, \quad (2.5)$$

где величина

$$I(\tilde{\sigma}_k, t_j) \equiv E \frac{\tilde{\varepsilon}(\tilde{\sigma}_k, t_j)}{\tilde{\sigma}_k} - \left(1 + \lambda_1 \int_0^t K_1(\tau, \bar{p}_i) d\tau \right) \quad (2.6)$$

известна, поскольку величины $\tilde{\varepsilon}(\tilde{\sigma}_k, t_j)$ измеряются по экспериментальным кривым ползучести в нелинейной области ($\tilde{\sigma}_k > \sigma_*$), а значения параметров \bar{p}_i определяются согласно (2.4).

Параметры ядра ползучести $K_3(t)$ и величина коэффициента b , исходя из (2.5) и (2.6), определяются по результатам аппроксимации дискретных значений величины $I(\tilde{\sigma}_k, t)$ путем минимизации функционала

$$F(b, \tilde{p}_i) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \left\{ I(\tilde{\sigma}_k, t_j) - b E \tilde{\sigma}_k^2 \int_0^t K_3(\tau, \tilde{p}_i) d\tau \right\}^2, \quad (2.7)$$

где \tilde{p}_i – параметры ядра ползучести $K_3(\cdot)$.

2.2. Численная реализация методики. При определении коэффициентов и параметров ядер наследственности в кубичной теории методикой предусмотрено выделение двух областей напряжений, вызывающих линейное и соответственно нелинейное вязкоупругое деформирование материала. Эту задачу решаем на основе анализа экспериментальных функций ползучести. Реализация методики осуществлена в работе на примере ползучести стеклопластика ТС-8/3-250 при $\theta = 23,5^\circ\text{C}$. Исходные экспериментальные данные заимствованы из [10].

На рис. 1 точками представлены экспериментальные значения функций ползучести $J_k(t_j)$ стеклопластика ТС-8/3-250 при $\sigma_k = 19,9$ (○), 39,8 (●), 59,7 (⊙), 79,6 (⊖), 99,5 (⊕), 119,5 (⦿) МПа. Тонкая сплошная линия – выборочные средние значения функции ползучести $\bar{J}(t_j)$ для линейной области, а тонкие штриховые линии – границы интервала, задаваемого величиной $\delta = \pm 5\%$.

Из данных, приведенных на рис. 1, следует, что для данного материала можно выделить область напряжений, в которой функции ползучести $J_k(t_j)$ (с погрешностью $\delta_{\max} = \pm 5\%$ по отношению к величине $\bar{J}(t_j)$) оказываются инвариантными по отношению к уровню напряжений σ_k , а материал, соответственно, обладает линейными вязкоупругими свойствами. Для стеклопластика ТС-8/3-250 эти напряжения имеют диапазон $\bar{\sigma}_k = 10,91 - 39,82$ МПа.

Экспериментальные значения деформаций ползучести $\varepsilon(\sigma_k, t_j)$, замеренные по кривым ползучести в области напряжений $\bar{\sigma}_k$, которые удовлетворяют условиям линейности вязкоупругих свойств, используем для определения параметров дробно-экспоненциальных ядер (1.5).

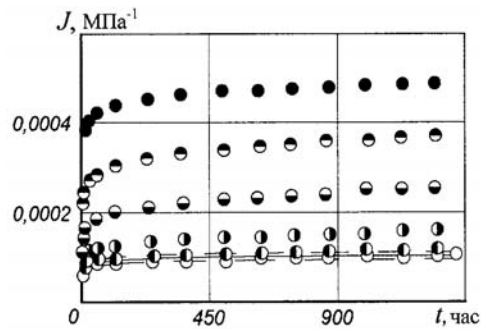


Рис. 1

Минимизируя функционал (2.4) находим значения параметров α_1 , β_1 и λ_1 . Здесь и далее процедуру минимизации функционалов при определении параметров ядер ползучести проводим с использованием итерационного метода Левенберга – Маркардта [15].

Значения параметров α_1 , β_1 и λ_1 , вычисленных согласно (2.4), приведены в табл. 1.

Таблица 1

Материал	E , МПа	α_1	β_1 , час $^{-(1+\alpha)}$	λ_1 , час $^{-(1+\alpha)}$	b , МПа $^{-3}$ ·час $^{-(1+\alpha)}$	λ_3	β_3 , час $^{-(1+\alpha)}$
Стеклопластик ТС8/3-250	15690	-0,406	0,07965	0,0537	$1,780 \cdot 10^{-3}$	-0,844	0,3778

Подставляя далее (1.5) в (2.6), получаем уравнение

$$I(\tilde{\sigma}_k, t_j) = E \frac{\tilde{\varepsilon}(\tilde{\sigma}_k, t_j)}{\tilde{\sigma}_k} \left[1 + \lambda_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_1)^n t^{(1+\alpha_1)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha_1)(1+n)]} \right], \quad (2.8)$$

используемое для вычислений значений $I(\tilde{\sigma}_k, t_j)$, по которым определяем параметры ядра ползучести $K_3(t)$ в нелинейной области.

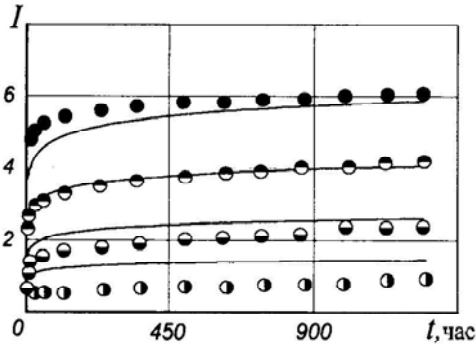


Рис. 2

Значения $I(\tilde{\sigma}_k, t_j)$, рассчитанные по уравнению (2.8), представлены для стеклопластика ТС-8/3-250 на рис. 2 точками. Расчеты выполнены с использованием параметров α_1 , β_1 и λ_1 , приведенных в табл. 1, и значений деформаций ползучести $\tilde{\varepsilon}(\tilde{\sigma}_k, t_j)$, замеренных по кривым ползучести в нелинейной области при напряжениях: $\tilde{\sigma}_k = 59,72$ (○), $79,63$ (●), $99,53$ (◐), $119,45$ (★) МПа.

Минимизируя функционал (2.7) с учетом (1.5) находим значения параметров α_3 , β_3 и λ_3 . Значения параметров α_3 , β_3 и λ_3 для исследованного материала, рассчитанных согласно (2.7), приведены в табл. 1, а на рис. 2 тонкими сплошными линиями показана соответствующая этим значениям параметров аппроксимация дискретных значений величины $I(\tilde{\sigma}_k, t_j)$.

2.3. Экспериментальная апробация теории. Экспериментальная апробация дробно-экспоненциального ядра (1.5) в кубичной наследственной теории и параметров ядра, полученных в предположении существования области линейности и области нелинейности вязкоупругих свойств материала, для решения задач нелинейной теории вязкоупругости может быть осуществлена на примере расчета деформаций ползучести при постоянных напряжениях.

Зависимость деформации ε от времени t при нагружении постоянными напряжениями σ_k записываем, исходя из (1.2) с учетом (1.5) и (1.6), в виде

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_k}{E} \cdot \left[1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_1)^n t^{(1+\alpha_1)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha_1)(1+n)]} \right] + b \sigma_k^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_3)^n t^{(1+\alpha_3)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha_3)(1+n)]}, \quad (2.9)$$

где принято, что $\tau = 0$, $t - \tau = t$, а $h(t) = 1$.

Значения деформаций ползучести $\varepsilon(t)$, рассчитанных по уравнению (2.9) с использованием значений параметров $\alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \alpha_3, \beta_3, \lambda_3$, приведенных в табл. 1, сопоставлены на рис. 3 с экспериментальными данными для стеклопластика ТС-8/3-250. Результаты расчетов нанесены штриховыми линиями, а экспериментальные данные показаны точками. Обозначения уровня приложенных напряжений совпадают с принятыми на рис. 1.

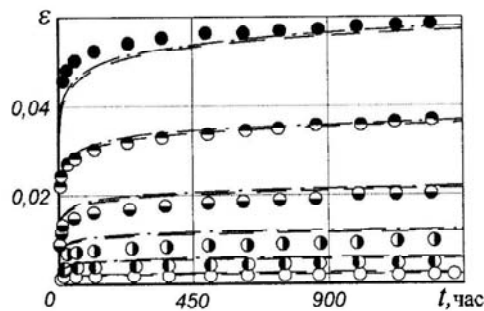


Рис. 3

§3. Теория, основанная на подобии первичных кривых ползучести.

Подобие первичных кривых ползучести предполагает, что при постоянных напряжениях любую кривую ползучести можно совместить с другой кривой, если умножить её ординаты на коэффициент подобия, зависящий от напряжений.

3.1. *Методика определения параметров ядер наследственности.* Определяющее уравнение (1.3) теории является частным случаем общей нелинейной теории вязкоупругости Вольтерра – Фреше и содержит три функции $\psi(\cdot)$, $f(\cdot)$ и $K(\cdot)$, подлежащие определению из эксперимента. Методика идентификации неизвестных функций в (1.3) и определения их параметров реализуется следующим образом [5, 11, 14].

Пусть имеется семейство подобных кривых ползучести « $\varepsilon - t$ » для разных уровней постоянных напряжений σ_k , заданных согласно (1.6). В этом случае определяющее уравнение (1.3) с учетом (1.6) запишем в виде

$$\varepsilon(\sigma_k, t) = \psi(\sigma_k) \left(1 + \lambda \int_0^t K(\tau) d\tau \right), \quad (3.1)$$

где функция $\psi(\sigma_k)$ является функцией подобия и в момент времени $t = 0$ задает величину начальной упругой деформации. Здесь принято, что $h(t) = 1$, $\tau = 0$, $t - \tau = t$, а $f(\sigma_k) = \psi(\sigma_k)$. Функция $\psi(\sigma_k)$ задается одночленной степенной аппроксимацией

$$\psi(\sigma_k) = \frac{q}{H} (\sigma_k)^{1/q}, \quad (3.2)$$

где q , H – экспериментально определяемые коэффициенты.

Условие подобия первичных кривых ползучести задается, как известно, соотношением [5]

$$\varepsilon(\sigma_k, t) = \chi_k(\sigma_k) \varepsilon(\sigma_0, t) \Rightarrow \varepsilon(\sigma_0, t) = \frac{\varepsilon(\sigma_k, t)}{\chi_k(\sigma_k)}, \quad (3.3)$$

которое позволяет, зная коэффициент подобия $\chi_k(\sigma_k)$, вычислить деформации ползучести $\varepsilon(\sigma_k, t)$ при произвольном напряжении σ_k по характеристикам базисной кривой ползучести $\varepsilon(\sigma_0, t)$, полученной при напряжении σ_0 .

В качестве базисного напряжения σ_0 выбирают, как правило, наибольшее напряжение из ряда σ_k , для которого построена экспериментальная кривая ползучести. Для базисной кривой $\varepsilon(\sigma_0, t)$, решая совместно уравнения (3.1) и (3.3), получаем

$$\varepsilon(\sigma_0, t) = \chi_0(\sigma_0) \left(1 + \lambda \int_0^t K(\tau) d\tau \right); \quad (3.4)$$

$$\chi_0(\sigma_0) = \frac{\psi(\sigma_k)}{\chi_k(\sigma_k)} \Rightarrow \psi(\sigma_k) = \chi_0(\sigma_0)\chi_k(\sigma_k). \quad (3.5)$$

Параметры ядра ползучести (1.5) и неизвестные коэффициенты в (3.2) определяем в два этапа. На первом этапе определяем реологические параметры α , β и λ , а также коэффициент подобия $\chi_0(\sigma_0)$. Эти параметры вычисляем по результатам аппроксимации экспериментальной базисной кривой ползучести $\varepsilon(\sigma_0, t_j)$ уравнением (3.4). Задача сводится к минимизации функционала

$$F(\chi_0(\sigma_0), p_i) = \sum_{j=1}^n \left\{ \varepsilon(\sigma_0, t_j) - \varepsilon(\sigma_0, t_j, \chi_0(\sigma_0), p_i) \right\}^2, \quad (3.6)$$

где p_i – неизвестные реологические параметры ($i = 3$).

На втором этапе определяем коэффициенты q и H уравнения (3.2). Эти коэффициенты определим по результатам аппроксимации дискретных значений функции $\psi(\sigma_k)$, которые рассчитываем по соотношению (3.5). Коэффициент подобия $\chi_0(\sigma_0)$ в (3.5) определяем в процессе минимизации функционала (3.6). Коэффициент подобия $\chi_k(\sigma_k)$ определяем из условия наилучшего согласования экспериментальных кривых ползучести, построенных для нескольких значений σ_k , с экспериментальной базисной кривой ползучести $\varepsilon(\sigma_0, t_j)$ согласно условию подобия (3.3). Задача сводится к минимизации функционала

$$F(\chi_k(\sigma_k)) = \sum_{j=1}^n \left\{ \varepsilon(\sigma_0, t_j) - \frac{\varepsilon(\sigma_k, t_j)}{\chi_k(\sigma_k)} \right\}^2 \Rightarrow \chi_k(\sigma_k) = \frac{\sum_{j=1}^n (\varepsilon(\sigma_k, t_j))^2}{\sum_{j=1}^n \varepsilon(\sigma_0, t_j) \varepsilon(\sigma_k, t_j)}, \quad (3.7)$$

откуда для коэффициента подобия $\chi_k(\sigma_k)$ получаем соотношение, которое позволяет рассчитывать дискретные значения величины $\chi_k(\sigma_k)$.

Далее, используя полученные значения коэффициентов подобия $\chi_0(\sigma_0)$ и $\chi_k(\sigma_k)$, по уравнению (3.5) вычислим дискретные значения функции $\psi(\sigma_k)$. Значения коэффициентов q и H определяем по результатам аппроксимации дискретных значений функции $\psi(\sigma_k)$ уравнением (3.2), исходя из минимизации функционала

$$F(\bar{p}_i) = \sum_{k=1}^n \left\{ \psi(\sigma_k) - \psi(\sigma_k, \bar{p}_i) \right\}^2, \quad (3.8)$$

где $i = 2$, причем $p_1 = q$, а $p_2 = H$.

3.2. Численная реализация методики. Методика определения коэффициентов и параметров ядер наследственности в рассматриваемой нелинейной теории (см. п. 3.1.) построена, исходя из условия подобия первичных кривых ползучести в плоскости « ε , t ».

Реализация методики осуществлена в данной работе на примере ползучести стеклопластика СВМ при $\theta = 20$ °С. Экспериментальные данные заимствованы из [8].

На рис. 4 точками представлены приведенные к базисной кривой по уравнению (3.3) первичные кривые ползучести стеклопластика СВМ при напряжениях $\sigma_k = 38,25$ (○), 50,99 (◐), 63,74 (◑), 76,49 (◒), 89,24 (●) МПа. В качестве базисной кривой ползучести выбрана кривая ползучести при напряжении $\sigma_0 = 89,24$ (●) МПа. Тонкими сплошными линиями показана аппроксимация базисных кривых ползучести сглаживающими кубическими сплайнами [3].

Значения коэффициентов подобия $\chi_k(\sigma_k)$, рассчитанные в соответствии с (3.7) и использованные для приведения первичных кривых ползучести к базисной кривой согласно (3.3), приведены для стеклопластика СВАМ в табл. 2. Здесь же приведены дискретные значения функции $\psi(\sigma_k)$, рассчитанные по уравнению (3.5) и использованные при определении коэффициентов q и H .

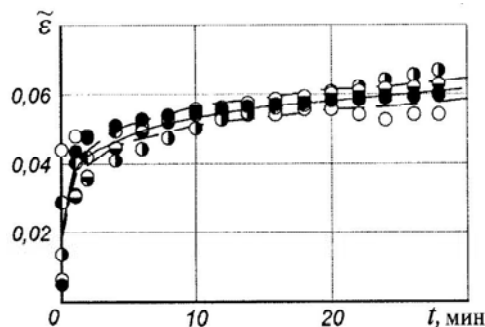


Рис. 4

Таблица 2

σ_k , МПа	38,246	50,995	63,743	76,492	89,241
χ_k	0,0447	0,0992	0,2407	0,6556	1,0000
$\psi(\sigma_k)$	0,0013	0,0028	0,0068	0,0185	0,0282

Как видно из рис. 4, условие подобия первичных кривых ползучести для исследованных материалов, в основном, выполняется. Однако, на начальной и конечной стадиях нагружения наблюдается некоторое отклонение между приведенными и базисной кривыми ползучести, которым в первом приближении можно пренебречь.

Экспериментальные значения деформаций ползучести $\varepsilon(\sigma_0, t_j)$, замеренные по базисной кривой ползучести, относительно которой обосновывается условие подобия (3.3), используется в дальнейшем при определении реологического параметра λ , параметров ядра наследственности α и β , а также коэффициента подобия $\chi_0(\sigma_0)$. В этом случае функционал (3.6) конкретизируется с учетом (1.5) в виде

$$F(\alpha, \beta, \lambda, \chi_0(\sigma_0)) = \sum_{j=1}^n \left\{ \varepsilon(\sigma_0, t_j) - \chi_0(\sigma_0) \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t_j^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma(1+(1+\alpha)(1+n))} \right) \right\}^2, \quad (3.9)$$

минимизируя который определим значения искомых параметров. Значения параметров α , β , λ и $\chi_0(\sigma_0)$, рассчитанных согласно (3.9), приведены для исследованного материала в табл. 3.

Таблица 3

Материал	α	β	λ	$\chi_0(\sigma_0)$	q	H
Стеклопластик СВАМ	-0,03096	0,30764 мин ^(1+α)	0,33007 мин ^(1+α)	0,02820	0,261	2,69·10 ⁸ МПа

Значения коэффициентов подобия $\chi_0(\sigma_0)$ и дискретные значения функции $\psi(\sigma_k)$, приведенные в табл. 2, 3, используются в дальнейшем для определения коэффициентов q и H в уравнении (3.2).

Минимизируя функционал (3.8) с учетом (3.2), находим значения искомых коэффициентов. Значения коэффициентов q и H , вычисленных согласно (3.8), приведены для исследованных материалов в табл. 3.

3.3. Экспериментальная апробация теории. Экспериментальная апробация дробно-экспоненциального ядра наследственности в нелинейной теории, построенной с использованием условия подобия первичных кривых ползучести, также может быть осуществлена на примере расчета деформаций ползучести при постоянных напряжениях.

Зависимость деформации ε от времени t при нагружении постоянными напряжениями σ_k записываем, исходя из (1.3) с учетом (1.5), (1.6) и (3.2), в виде

$$\varepsilon(\sigma_k, t) = \frac{q}{H} (\sigma_k)^{1/q} \left[1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} t^{(1+\alpha)(1+n)} \right], \quad (3.10)$$

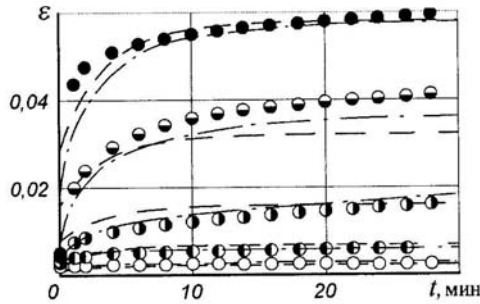


Рис. 5

где принято: $\tau = 0$, $t - \tau = t$ и $h(0) = 1$.

Значения деформаций ползучести $\varepsilon(t)$, полученных согласно уравнению (3.10) с использованием значений параметров α , β , λ , q и H , приведенных в табл. 3, сопоставлены на рис. 5 с экспериментальными данными для стеклопластика СВМ. Результаты расчетов нанесены штриховыми линиями, а экспериментальные данные показаны точками. Обозначения уровней приложенных напряжений соответствуют принятым на рис. 4.

§4. Теория, отражающая подобие изохронных диаграмм ползучести.

Подобие изохронных диаграмм ползучести предполагает, что произвольную изохрону можно совместить с другой изохроной, если умножить её ординаты на коэффициент подобия, зависящий от времени.

4.1. Методика определения параметров ядер наследственности. Определяющее уравнение (1.4) теории является частным случаем общей нелинейной теории вязкоупругости Вольтерра – Фреше и содержит две функции $\varphi(\cdot)$ и $K(\cdot)$, подлежащие определению из эксперимента. Методика идентификации неизвестных функций в (1.4) и определения их параметров реализуется следующим образом [1, 5, 9].

Пусть имеем семейство подобных изохронных диаграмм ползучести « $\sigma - \varepsilon(t)$ », построенных по кривым ползучести « $\varepsilon - t$ » для разных уровней постоянных напряжений σ_k , которые заданы согласно (1.6). Уравнение ползучести (1.4) при $\sigma(t) = \sigma_k = \text{const}$ записываем в виде

$$\varphi(\varepsilon(t)) = \left(1 + \lambda \int_0^t K(\tau) d\tau \right) \sigma_k, \quad (4.1)$$

решение которого относительно величины деформации $\varepsilon(t)$

$$\varepsilon(t) = \varphi^{-1} \left\{ \left(1 + \lambda \int_0^t K(\tau) d\tau \right) \sigma_k \right\} \quad (4.2)$$

устанавливает зависимость между деформацией, напряжением и временем. Здесь принято, что $h(t) = 1$, $\tau = 0$, а $(t - \tau) = t$.

Выражение в правой части (4.1) задает коэффициент подобия при фиксированных значениях t ; функция $\varphi(\varepsilon(t))$ при $t = 0$ описывает мгновенную диаграмму деформирования, а функция $\varphi^{-1}(\cdot)$ – обращение функции $\varphi(\cdot)$. Функцию $\varphi(\varepsilon(0))$ задаем полиномом

$$\varphi(\varepsilon(0)) = a_0 + a_1 \varepsilon + a_2 \varepsilon^2 + \dots + a_n \varepsilon^n, \quad (4.3)$$

а её обращение $\varphi^{-1}(\cdot)$ – соответственно, полиномом

$$\varphi^{-1}((1 + K^*)\sigma_k) = b_0 + b_1 ((1 + K^*)\sigma_k) + b_2 ((1 + K^*)\sigma_k)^2 + \dots + b_n ((1 + K^*)\sigma_k)^n, \quad (4.4)$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ – коэффициенты полиномов; K^* – интегральный оператор Вольтерра.

Параметры a_i в (4.3) и b_i в (4.4) определяются по результатам аппроксимации соответствующими полиномами дискретных значений мгновенной, отвечающей нулевому времени, изохронной диаграммы ползучести $\varphi(\varepsilon_i, t = 0)$ и её обращения $\psi(\sigma_i, t = 0) = \varphi^{-1}(\varepsilon_i, t = 0)$.

Дискретные значения мгновенной изохронной диаграммы ползучести $\varphi(\varepsilon_i, t = 0)$ определяются из соотношения

$$\varphi(\varepsilon_i, t = 0) = \frac{\bar{G}(t_j)}{\bar{G}(t = 0)} \varphi_j(\varepsilon_i, t_j), \quad (4.5)$$

которое получено, исходя из совместного рассмотрения условия подобия изохронных диаграмм ползучести $\varphi_j(\varepsilon_i, t_j)$ относительно мгновенной изохронной диаграммы $\varphi(\varepsilon_i, t = 0)$, т. е.

$$\varphi(\varepsilon_i, t = 0) = G(t_j) \cdot \varphi_j(\varepsilon_i, t_j), \quad (4.6)$$

и условия подобия изохронных диаграмм ползучести $\varphi_j(\varepsilon_i, t_j)$ относительно некоторой базовой изохронной диаграммы $\varphi_k(\varepsilon_i, t_k)$ вида

$$\varphi_k(\varepsilon_i, t_k) = \bar{G}(t_j) \cdot \varphi_j(\varepsilon_i, t_j). \quad (4.7)$$

Здесь $G(t_j)$ и $\bar{G}(t_j)$ – дискретные значения функций подобия; $\bar{G}(t = 0)$ – значение функции подобия $\bar{G}(t_j)$ для момента времени $t_j = 0$.

Функции $\varphi_j(\varepsilon_i, t_j)$ задают семейство изохронных диаграмм ползучести в виде таблиц значений $\{\varepsilon_i, \sigma_i\}$ для нескольких моментов времени t_j , которые строят по экспериментальным кривым ползучести $\varepsilon \sim t$.

Дискретные значения функции подобия $\bar{G}(t_j)$ определяют из условия наилучшего согласования базовой изохронной диаграммы ползучести $\varphi_k(\varepsilon_i, t_k)$ с приведенными на ней согласно (4.7) изохронными диаграммами ползучести $\varphi_j(\varepsilon_i, t_j)$. Задача сводится к минимизации функционала

$$\Phi(\bar{G}(t_j)) = \sum_{i=1}^n \left(\varphi_k(\varepsilon_i, t_k) - \bar{G}(t_j) \varphi_j(\varepsilon_i, t_j) \right)^2, \quad (4.8)$$

где индекс j задает дискретизацию первичных кривых ползучести по t , а индекс i – дискретизацию изохронных диаграмм ползучести по ε .

Значение функции подобия $\bar{G}(t = 0)$ удовлетворяет условию подобия мгновенной изохронной диаграммы ползучести $\varphi(\varepsilon_i, t = 0)$ и базовой изохронной диаграммы ползучести $\varphi_k(\varepsilon_i, t_k)$, т. е.

$$\varphi_k(\varepsilon_i, t_k) = \bar{G}(t = 0) \varphi(\varepsilon_i, t = 0), \quad (4.9)$$

и вычисляется по результатам экстраполяции функции подобия $\bar{G}(t_j)$, определяемой согласно (4.8), на нулевое значение времени t .

Параметры α и β ядра ползучести $K(t)$ в (1.4), задаваемого дробно-экспоненциальной функцией (1.5), определяются по результатам аппроксимации дискретных значений функции подобия $G(t_j)$. Дискретные значения функции $G(t_j)$ рассчитываем, исходя из (4.5) и (4.6), согласно уравнению

$$G(t_j) = \frac{\bar{G}(t_j)}{\bar{G}(t=0)}, \quad (4.10)$$

а аппроксимирующую функцию $G(t)$ задаем, исходя из (1.5) и (4.2), в виде

$$G(t) = 1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t)^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]}, \quad (4.11)$$

позволяющем определить также и реологический параметр λ .

4.2. Численная реализация методики. Методика определения коэффициентов и параметров ядер наследственности в рассматриваемой нелинейной теории вязкоупругости, изложенная в п. 4.1, построена, исходя из условия подобия изохронных диаграмм ползучести в плоскости « σ, ε ».

Реализация методики осуществлена в работе на примере ползучести микропластика при $\theta = 20^\circ\text{C}$. Исходные экспериментальные данные, заимствованные из [7], показывают, что подобие первичных кривых ползучести для этого материала отсутствует. Подобными являются изохронные диаграммы ползучести.

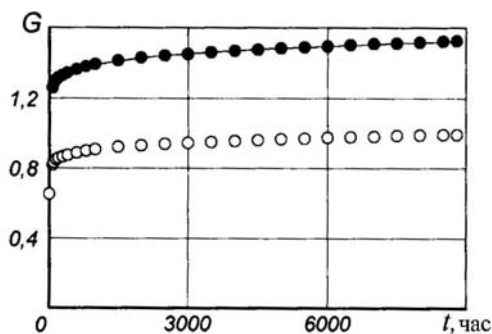


Рис. 6

Дискретные значения функций подобия $\bar{G}(t_j)$ изохронных диаграмм ползучести, рассчитанные исходя из минимизации функционала (4.8), нанесены на рис. 6 светлыми точками для микропластика. В качестве базовой изохронной диаграммы ползучести $\varphi_k(\varepsilon_i, t_k)$ выбрана изохронна при $t^* = 8800$ часов. Тонкими сплошными линиями показана аппроксимация дискретных значений функции подобия $G(t_j)$ сглаживающими кубическими сплайнами [3]. Экстраполяция аппроксимирующих

функций на нулевое время дает для микропластика – $\bar{G}(t=0) = 0,65$.

Базовая изохронная диаграмма ползучести $\varphi_k(\varepsilon_i, t_k)$ и значение функции подобия $\bar{G}(t=0)$ использованы в дальнейшем для построения мгновенной изохронной диаграммы $\varphi(\varepsilon, t=0)$ и функции подобия $G(t_j)$, также определения на этой основе параметров дробно-экспоненциального ядра наследственности (1.5) и коэффициента λ .

Дискретные значения функции $\varphi(\varepsilon_i, t=0)$ вычисляем, исходя из (4.6) с учетом (4.10), согласно уравнению

$$\varphi(\varepsilon_i, t=0) = \frac{1}{\bar{G}(t=0)} \varphi_k(\varepsilon_i, t_k), \quad (4.12)$$

где принято $\bar{G}(t_j) = 1$.

Значения коэффициентов аппроксимирующих полиномов (4.3) и (4.4) приведены в табл. 4.

Таблица 4

Материал	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
Микропластик	0	0	0	$-6,355 \cdot 10^7$	$-6,370 \cdot 10^6$	$5,208 \cdot 10^5$	$9,443 \cdot 10^4$
	0	0	0	$1,924 \cdot 10^{-18}$	$8,429 \cdot 10^{-14}$	$-5,422 \cdot 10^{-10}$	$1,056 \cdot 10^{-5}$

Дискретные значения функции подобия $G(t_j)$, рассчитанные по уравнению (4.10), нанесены на рис. 6 темными точками, а тонкими сплошными линиями – аппроксимация дискретных значений функции $G(t_j)$ уравнением (4.11). Значения параметров α , β и λ аппроксимирующей функции, полученные из условия минимизации функционала

$$\Phi(\alpha, \beta, \lambda) = \sum_{j=1}^n \left\{ G(t_j) - \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t_j^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right) \right\}^2, \quad (4.13)$$

приведены для исследованных материалов в табл. 5.

Таблица 5

Материал	α	β	λ , час ⁻¹
Микропластик	-0,866	3,6284·10 ⁻³	0,1440

4.3. *Экспериментальная апробация теории.* Экспериментальная апробация дробно-экспоненциального ядра наследственности в нелинейной теории вязкоупругости, построенной исходя из условия подобия изохронных диаграмм ползучести, осуществлена на примере расчета деформаций ползучести микропластика при постоянных напряжениях.

Зависимость деформации ε от времени t при нагружении постоянными напряжениями σ_k записана, исходя из (4.2) с учетом (1.5), (1.6) и (4.4), в виде

$$\varepsilon(t) = \sum_{s=0}^H b_s \left\{ \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} t^{(1+\alpha)(1+n)} \right) \sigma_k \right\}^s, \quad (4.14)$$

где принято $\tau = 0$, $t - \tau = t$ и $h(t) = 1$.

Значения деформаций ползучести $\varepsilon(t)$, рассчитанных по уравнению (4.14) с использованием значений коэффициентов b_s , приведенных в табл. 4, и параметров α , β и λ , приведенных в табл. 5, сопоставлены на рис. 7 с экспериментальными данными для микропластика при напряжениях $\sigma_k = 331$ (○), 1000 (⊖), 1660 (⊕), 2330 (●) МПа. Результаты расчетов нанесены штриховыми линиями, а экспериментальные данные показаны точками.

§5. Анализ результатов.

Основные трудности, возникающие при решении задачи определения параметров дробно-экспоненциальных ядер наследственности по результатам аппроксимации дискретных экспериментальных данных, имеют, преимущественно, вычислительный характер. Это связано с тем, что ряд, входящий в аналитическое выражение ядра (1.5), является знакопеременным и плохо сходящимся, так что в случае больших длительностей достоверно определить значения параметров ядер путем прямой аппроксимации экспериментальных данных не представляется возможным.

Отмеченные трудности преодолеваются, как правило, с привлечением дополнительных процедур, таких как аппроксимация ядра экспоненциальной функцией, упрощение структуры ядра с использованием преобразования Лапласа – Карсона, нормирование экспериментальных данных по шкале времени. В случае линейно-вязкоупругих материалов наиболее эффективным является метод прямой обработки нормированных экспериментальных данных.

На точность определения параметров дробно-экспоненциальных ядер наследственности и, следовательно, на точность расчетов деформаций ползучести при реализации основных процедур в рамках рассмотренных нелинейных моделей могут ока-

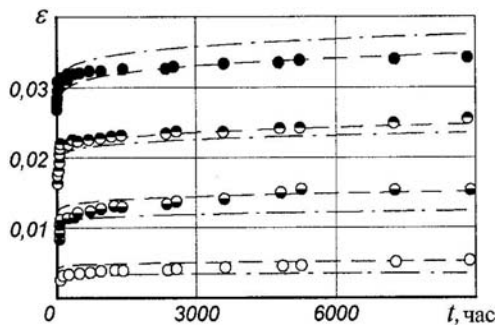


Рис. 7

момента времени $t = 77$ часов, что примерно на 2 порядка меньше, чем в случае расчетов, показанных штриховыми линиями. Видно, что с уменьшением длительности базовой изохронной диаграммы отличие результатов расчетов с экспериментальными данными увеличивается. Это свидетельствует о зависимости параметров α , β и λ дробно-экспоненциального ядра наследственности от выбора базовой изохронной диаграммы.

В целом же, как видно из результатов сопоставления, расчетные данные вполне удовлетворительно согласуются с экспериментом. Максимальная погрешность по величине деформации в рамках всех рассмотренных теорий изменяется в пределах от 5 до 15%, практически не зависит от типа нелинейности теории и возникает только на начальной стадии ползучести. Это, возможно, связано с неточностями измерений на начальной стадии испытаний, когда проявляются динамические эффекты, вызванные практически мгновенным приложением нагрузки.

Наиболее общим является, по-видимому, нелинейное определяющее уравнение (1.4), построенное исходя из условия подобия изохронных диаграмм ползучести. Это условие выполняется для широкого класса нелинейно-вязкоупругих материалов [1, 5, 9], в том числе и для материалов, для которых можно выделить область линейности, а также для материалов, для которых выполняется условие подобия первичных кривых ползучести. На рис. 3 и 5, в качестве примера, штрих-пунктирными линиями нанесены результаты расчетов, выполненных по уравнению (4.14), как альтернатива расчетам по уравнениям (2.9) и (3.10). Совпадение результатов расчетов, как видно, вполне удовлетворительное.

Область применимости нелинейных определяющих уравнений (1.2) и (1.3) ограничивается классами материалов и уровнями напряжений, для которых выполняются условия линейности и подобия первичных кривых ползучести.

Заключение.

Задача определения параметров дробно-экспоненциальных ядер наследственности нелинейно-вязкоупругих материалов решена в рамках кубической теории вязкоупругости, а также теорий вязкоупругости, основанных на подобию первичных и изохронных диаграмм ползучести. При определении параметров ядер, независимо от характера нелинейности вязкоупругих свойств материалов, использованы частные решения, полученные экспериментально в опытах на одноосную ползучесть при постоянных напряжениях и представленные в виде таблиц нормированных по шкале времени исходных или преобразованных данных.

Методы определения параметров дробно-экспоненциальных ядер ползучести, рассмотренные в данной статье, позволяют определить параметры ядер для широкого класса нелинейно-вязкоупругих материалов с различным характером нелинейности. Методы апробированы экспериментально на задачах определения деформаций ползучести ряда полимерных и композитных материалов при постоянных напряжениях. Апробация проведена в диапазоне изменения напряжений примерно на порядок, а длительностей нагружения – примерно на три порядка.

зывать влияние различные факторы. В теориях, основанных на условии подобия, существенное влияние оказывает выбор диаграммы ползучести, по отношению к которой обосновывается подобие.

На рис. 7, в качестве примера, штрих-пунктирными линиями нанесены результаты расчетов по уравнению (4.14) с использованием значений параметров $\alpha = -0,8655$,

$\beta = -0,0194$ и $\lambda = -0,0925 \text{ час}^{-1}$.

В качестве базовой изохронной диаграммы ползучести использована диаграмма для

Наиболее эффективной является нелинейная теория вязкоупругости, основанная на подобии изохронных диаграмм ползучести, с ядром наследственности в форме дробно-экспоненциальной функции. Теория и метод определения параметров ядер ползучести обеспечивают удовлетворительное согласование результатов расчетов с экспериментов для нелинейно-вязкоупругих материалов с различным характером нелинейности.

РЕЗЮМЕ. Розв'язано задачу визначення параметрів дробово-експоненційних ядер спадковості нелінійно-в'язкопружних матеріалів. Проаналізовано методи визначення параметрів, що використовуються в кубічній теорії в'язкопружності та в нелінійних теоріях та ґрунтуються на умовах подібності первісних кривих повзучості та ізохронних діаграмах. Визначено та експериментально апробовано параметри дробово-експоненційних ядер спадковості для мікропластику, склопластику ТС-8/3-250, склопластику СВАМ. Дано аналіз результатів (таблиці, графіки).

1. *Воротников Г.С., Паперник Л.Х.* Применение нелинейной наследственной теории к описанию релаксации напряжений в металлах и пересчету данных релаксации на ползучесть // Журнал прикл. механики и техн. физики. – 1970. – № 6. – С. 94 – 97.
2. *Голуб В.П., Кобзарь Ю.М., Фернати П.В.* К расчету деформаций линейной ползучести вязкоупругих армирующих волокон при растяжении // Прикл. механика. – 2005. – **41**, № 5. – С. 97 – 106.
3. *Голуб В.П., Погребняк А.Д., Романенко И.Б.* О применении сглаживающих сплайн-аппроксимаций в задачах идентификации параметров ползучести // Прикл. механика. – 1997. – **33**, № 6. – С. 52 – 61.
4. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970. – 240 с.
5. *Колтунов М.А.* Ползучесть и релаксация. – М.: Высш. школа, 1976. – 277 с.
6. *Кучер Н.К., Земцов М.П., Данильчук Е.Л.* Кратковременная ползучесть и прочность полипропиленовых волокнистых структур // Пробл. прочности. – 2007. – № 6. – С. 77 – 90.
7. *Максимов Р.Д., Плумэ Э.* Длительная ползучесть органостеклопластика // Механика композитных материалов. – 2001. – **37**, № 4. – С. 435 – 450.
8. *Мартыросян М.М.* О кратковременной ползучести стеклопластика СВАМ // Механика полимеров. – 1965. – № 2. – С. 47 – 54.
9. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
10. *Работнов Ю.Н., Паперник А.Х., Степаньчев Е.И.* Нелинейная ползучесть стеклопластика ТС8/3-250 // Механика полимеров. – 1971. – № 3. – С. 391 – 397.
11. *Розовский М.И.* Ползучесть и длительное разрушение материалов // Журнал техн. физики. – 1951. – **21**, № 11. – С. 1311 – 1318.
12. *Golub V.P., Kobzar' Yu.M., Ragulina V.S.* A Method for Determining of the Parameters of the Hereditary Kernels in the Nonlinear Theory of Viscoelasticity // Int. Appl. Mech. – 2011. – **47**, N 3. – P. 290 – 301.
13. *Golub V.P.* Application of Fractional Exponential Hereditary Kernels in the Nonlinear Theory of Viscoelasticity // Int. Appl. Mech. – 2011. – **47**, N 6. – P. 727 – 734.
14. *Leaderman H.* Elastic and creep properties of filaments materials and other high polymers. – Washington: Textile Foundation, 1943. – 278 p.
15. *More J.J., Garbow B.S., Hillstrom K.E.* Users Guide to Minipack // Argone National Laboratory Publication ANL-80-74. – 1980. – P. 238.

Поступила 20.10.2010

Утверждена в печать 26.06.2012