

В. И. Сторожев

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН  
В МНОГОСЛОЙНЫХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРАХ  
С СЕКТОРНЫМ ВЫРЕЗОМ В СЕЧЕНИИ

*Донецкий национальный университет  
ул. Университетская 24, Донецк, Украина, 83001,  
e-mail: stvi@i.ua*

**Abstract.** A technique is elaborated for the theoretical analysis of spectra and properties of electroelastic waves in the multilayered piezoactive cylinders with the longitudinal sector cutout of arbitrary angle in the cross-section. The real and imaginary branches of dispersion spectra and ratios of period-averaged power flows in the internal and external layers of cylinder (waveguide) are studied. It is shown that a change of layer material and geometry of cross-sections enables a control of the dispersion characteristics of cylinders within a quite wide range.

**Key words:** piezoceramics, multilayered cylinders, noncircular cross-section, electroelastic wave, analytical solution.

**Введение.**

Задача управления волноводными свойствами упругих пьезоэлектрических тел за счет вариации их физико-механических и геометрических параметров представляет интерес для целого ряда научно-технических направлений, в частности, акустоэлектроники и ультразвуковой дефектоскопии. Такое управление для цилиндрических волноводов может быть реализовано путем целенаправленного варьирования геометрии их сечений, в том числе за счет создания в волноводах продольных вырезов различной формы.

Достижения в развитии теории волн в периодически-неоднородных средах проанализированы в [16]. Трехслойные цилиндрические волноводы по прикладным и трехмерной теориям электроупругости исследованы в [7, 10]. Неоднородные по радиусу полые цилиндрические волноводы со свойствами типа кристаллов ромбической системы класса  $mm2$  рассмотрены в [3, 4]. Регулярно-слоистым цилиндрическим волноводам посвящены публикации [1, 8, 9, 11]. Методы и результаты этих исследований освещены в обзорных статьях [5, 6].

Данная статья посвящена разработке алгоритма теоретического исследования свойств электроупругих волн в составных многослойных цилиндрических волноводах из конечного числа концентрических пьезокерамических слоев, в пакете которых имеется продольный вырез секторного сечения с варьируемыми угловыми размерами.

Основой для представляемой теоретической методики являются исследования по теории распространения электроупругих волн в пьезоэлектрических цилиндрах концентрического кольцевого сечения, исследования по проблемам распространения электромагнитных волн в твердотельных волноводах неканонического поперечного сечения, а также работы по распространению упругих волн в однослойных цилиндрах с секторными вырезами в круговых либо кольцевых сечениях [2, 13 – 15].

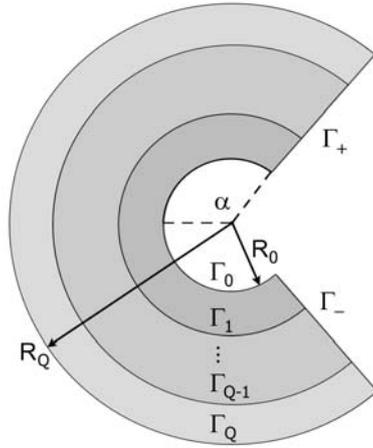


Рис. 1

### 1. Постановка задачи.

Рассмотрим сплошные и полые составные кусочно-однородные цилиндрические волноводы, образуемые пакетом аксиально-поляризованных концентрических пьезокерамических слоев различной толщины. В составном сечении указанные волноводы имеют секторный вырез произвольной угловой меры. Геометрия сечения многослойных цилиндров представлена на рис. 1; внутренний и внешний радиусы  $Q$ -слоя волновода обозначены, соответственно,  $R_0$  и  $R_Q$ ; внешний радиус  $q$ -го слоя –  $R_q$ , а его толщина –  $h_q = R_q - R_{q-1}$ .

Сечение сплошных секторных цилиндров имеет геометрию, аналогичную представленной на рис. 1, но без внутренней полости. Цилиндрический слой  $V_q$  рассматриваемого волновода в цилиндрических координатах занимает область

$$V_q = \{(r, \theta) \in S_q, -\infty < z < \infty\} \quad (S_q = \{r \in [R_{q-1}, R_q], \theta \in [-\alpha, \alpha]\}).$$

Общий подход для решения поставленных задач основан на использовании аналитических решений системы уравнений о распространении гармонических электроупругих волн вдоль оси симметрии механических свойств в пьезокерамической среде класса  $C_{6v}$ . Данная система для характеристик динамического электроупругого состояния рассматриваемых тел в цилиндрических координатах включает уравнения движения упругой среды и квазистатические уравнения Максвелла

$$\begin{aligned} \partial_r \sigma_{rr} + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{r\theta} + \partial_z \sigma_{rz} + r^{-1} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) &= \rho \ddot{u}_r; \\ \partial_r \sigma_{r\theta} + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{\theta\theta} + \partial_z \sigma_{\theta z} + 2r^{-1} \sigma_{r\theta} &= \rho \ddot{u}_\theta; \\ \partial_r \sigma_{rz} + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{\theta z} + \partial_z \sigma_{zz} + r^{-1} \sigma_{rz} &= \rho \ddot{u}_z; \\ \partial_r D_r + r^{-1} \partial_\theta D_\theta + \partial_z D_z + r^{-1} D_r &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

а также определяющие соотношения для аксиально-поляризованной пьезокерамики

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{11} K_{rr} + c_{12} K_{\theta\theta} + c_{13} K_{zz} - e_{13} E_z; \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{12} K_{rr} + c_{11} K_{\theta\theta} + c_{13} K_{zz} - e_{13} E_z; \\ \sigma_{zz} &= c_{13} K_{rr} + c_{13} K_{\theta\theta} + c_{33} K_{zz} - e_{13} E_z; \\ \sigma_{r\theta} &= 2c_{66} K_{r\theta}, \quad \sigma_{rz} = 2c_{44} K_{rz} - e_{15} E_r, \quad \sigma_{\theta z} = 2c_{44} K_{\theta z} - e_{15} E_\theta; \\ D_r &= 2e_{15} K_{rz} + \varepsilon_{11} E_r, \quad D_\theta = 2e_{15} K_{\theta z} + \varepsilon_{11} E_\theta; \\ D_z &= e_{13} (K_{rr} + K_{\theta\theta}) + e_{33} K_{zz} + \varepsilon_{33} E_z \end{aligned} \quad (2)$$

$$(K_{rr} = \partial_r u_r, \quad K_{\theta\theta} = r^{-1} \partial_\theta u_\theta + r^{-1} u_r, \quad K_{zz} = \partial_z u_z,$$

$$2K_{r\theta} = r^{-1}\partial_\theta u_r + \partial_r u_\theta - r^{-1}u_\theta, \quad 2K_{rz} = \partial_z u_r + \partial_r u_z, \quad 2K_{\theta z} = \partial_z u_\theta + r^{-1}\partial_\theta u_z;$$

$$E_r = -\partial_r \varphi, \quad E_\theta = -r^{-1}\partial_\theta \varphi, \quad E_z = -\partial_z \varphi. \quad (3)$$

Здесь  $\partial_\alpha = \partial/\partial_\alpha$  – оператор частного дифференцирования;  $\sigma_{ij}$ ,  $K_{ij}$ ,  $u_j$  – компоненты тензоров безразмерных механических напряжений, деформаций и вектора перемещений;  $E_j$ ,  $D_j$ ,  $\varphi$  – безразмерные компоненты векторов электрической напряженности, индукции и электрического потенциала. Используемые в статье безразмерные электрические функции  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\varphi$  и физические параметры  $e_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ , а также механические напряжения  $\sigma_{ij}$ , перемещения  $u_j$  и механические параметры  $c_{ij}$ ,  $\rho$  впервые введены Н.А. Шульгой [5, 6, 12] и применяются во многих работах по электроупругости. Во всех приводимых ниже соотношениях верхний индекс обозначает принадлежность к соответствующему слою составного волновода.

Ниже рассмотрены случаи, когда внешние цилиндрические участки граничной поверхности свободны от механических напряжений

$$(\sigma_{rr}^{(1)})_{\Gamma_0} = (\sigma_{r\theta}^{(1)})_{\Gamma_0} = (\sigma_{rz}^{(1)})_{\Gamma_0} = 0; \quad (\sigma_{rr}^{(Q)})_{\Gamma_Q} = (\sigma_{r\theta}^{(Q)})_{\Gamma_Q} = (\sigma_{rz}^{(Q)})_{\Gamma_Q} = 0 \quad (4)$$

и имеют закороченное электродное покрытие

$$(\varphi^{(1)})_{\Gamma_0} = 0, \quad (\varphi^{(Q)})_{\Gamma_Q} = 0. \quad (5)$$

На поверхностях  $\Gamma_\pm$  секторного выреза  $\Gamma_\pm = \bigcup_{q=1}^Q \Gamma_\pm^q$ ,  $\Gamma_\pm^q = \{\theta = \pm\alpha, r \in [R_{q-1}, R_q]\}$

предполагаем наличие гибких нерастяжимых электропроводящих покрытий, ввиду чего соответствующие граничные условия на  $\Gamma_\pm$  приводятся к виду

$$(\sigma_{\theta\theta}^{(q)})_{\Gamma_\pm^q} = (u_r^{(q)})_{\Gamma_\pm^q} = (u_z^{(q)})_{\Gamma_\pm^q} = (\varphi^{(q)})_{\Gamma_\pm^q} = 0, \quad q = \overline{1, Q}. \quad (6)$$

На границе слоев с номерами  $q$  и  $q+1$  выполняются условия идеального механического контакта

$$(u_r^{(q)})_{\Gamma_q} = (u_r^{(q+1)})_{\Gamma_q}, \quad (u_\theta^{(q)})_{\Gamma_q} = (u_\theta^{(q+1)})_{\Gamma_q}, \quad (u_z^{(q)})_{\Gamma_q} = (u_z^{(q+1)})_{\Gamma_q};$$

$$(\sigma_{rr}^{(q)})_{\Gamma_q} = (\sigma_{rr}^{(q+1)})_{\Gamma_q}, \quad (\sigma_{r\theta}^{(q)})_{\Gamma_q} = (\sigma_{r\theta}^{(q+1)})_{\Gamma_q}, \quad (\sigma_{rz}^{(q)})_{\Gamma_q} = (\sigma_{rz}^{(q+1)})_{\Gamma_q}, \quad (7)$$

а также условия непрерывности нормальных компонент индукции и потенциала квазистатического электрического поля

$$(D_r^{(q)})_{\Gamma_q} = (D_r^{(q+1)})_{\Gamma_q}; \quad (\varphi^{(q)})_{\Gamma_q} = (\varphi^{(q+1)})_{\Gamma_q}. \quad (8)$$

Получаемые в качестве следствия (1) – (3) уравнения волновых движений относительно представлений компонент вектора волновых перемещений и потенциала электрического поля  $u_j^{(q)} = \text{Re}(u_{j0}^{(q)} \cdot e^{-i(\omega t - kz)})$ ,  $\varphi^{(q)} = \text{Re}(\varphi_0^{(q)} \cdot e^{-i(\omega t - kz)})$  в гармонических электроупругих волнах для компонент  $V_q$  имеют вид

$$\|L_{ij}^{(q)}\| \Phi^{(q)} = 0, \quad \Phi^{(q)} = (u_r^{(q)}, u_\theta^{(q)}, u_z^{(q)}, \varphi^{(q)})^T; \quad (9)$$

$$L_{11}^{(q)} = c_{11}^{(q)} \left( \partial_r^2 + r^{-1}\partial_r - r^{-2} \right) + c_{66}^{(q)} r^{-2} \partial_\theta^2 + c_{44}^{(q)} \partial_z^2 - \rho^{(q)} R_*^2 / c_* \partial_t^2;$$

$$\begin{aligned}
L_{12}^{(q)} &= (c_{11}^{(q)} + c_{12}^{(q)})/2 \cdot r^{-1} \partial_r \partial_\theta - (c_{11}^{(q)} + c_{66}^{(q)}) r^{-2} \partial_\theta; \\
L_{13}^{(q)} &= (c_{13}^{(q)} + c_{44}^{(q)}) \partial_r \partial_z, \quad L_{14}^{(q)} = (e_{31}^{(q)} + e_{15}^{(q)}) \partial_r \partial_z; \\
L_{21}^{(q)} &= (c_{11}^{(q)} + c_{12}^{(q)})/2 \cdot r^{-1} \partial_r \partial_\theta + (c_{11}^{(q)} + c_{66}^{(q)}) r^{-2} \partial_\theta; \\
L_{22}^{(q)} &= c_{66}^{(q)} (\partial_r^2 + r^{-1} \partial_r - r^{-2}) + c_{11}^{(q)} r^{-2} \partial_\theta^2 + c_{44}^{(q)} \partial_z^2 - \rho^{(q)} R_*^2 / c_* \partial_t^2; \\
L_{23}^{(q)} &= (c_{13}^{(q)} + c_{44}^{(q)}) r^{-1} \partial_\theta \partial_z, \quad L_{24}^{(q)} = (e_{31}^{(q)} + e_{15}^{(q)}) r^{-1} \partial_\theta \partial_z; \\
L_{31}^{(q)} &= (c_{13}^{(q)} + c_{44}^{(q)}) (\partial_r \partial_z + r^{-1} \partial_z), \quad L_{32}^{(q)} = (c_{13}^{(q)} + c_{44}^{(q)}) r^{-1} \partial_\theta \partial_z; \\
L_{33}^{(q)} &= c_{44}^{(q)} (\partial_r^2 + r^{-1} \partial_r + r^{-2} \partial_\theta^2) + c_{33}^{(q)} \partial_z^2 - \rho^{(q)} R_*^2 / c_* \partial_t^2; \\
L_{34}^{(q)} &= e_{15}^{(q)} (\partial_r^2 + r^{-1} \partial_r + r^{-2} \partial_\theta^2) + e_{33}^{(q)} \partial_z^2; \\
L_{41}^{(q)} &= -(e_{31}^{(q)} + e_{15}^{(q)}) (\partial_r \partial_z + r^{-1} \partial_z), \quad L_{42}^{(q)} = -(e_{31}^{(q)} + e_{15}^{(q)}) r^{-1} \partial_\theta \partial_z; \\
L_{43}^{(q)} &= -e_{15}^{(q)} (\partial_r^2 + r^{-1} \partial_r + r^{-2} \partial_\theta^2) - e_{33}^{(q)} \partial_z^2, \quad L_{44}^{(q)} = \varepsilon_{11}^{(q)} (\partial_r^2 + r^{-1} \partial_r + r^{-2} \partial_\theta^2) + \varepsilon_{33}^{(q)} \partial_z^2.
\end{aligned}$$

Для интегрирования уравнений (9) вводим представления искомых функций  $u_j^{(0)}$ ,  $\varphi^{(0)}$  через обобщенные волновые потенциалы  $\psi_j$

$$\begin{aligned}
u_{r0}^{(q)} &= \partial_r \psi_1^{(q)} + r^{-1} \partial_\theta \psi_4^{(q)}; \\
u_{\theta 0}^{(q)} &= r^{-1} \partial_\theta \psi_1^{(q)} - \partial_r \psi_4^{(q)}; \\
u_{z0}^{(q)} &\equiv \psi_2^{(q)}; \quad \varphi_0^{(q)} \equiv \psi_3^{(q)}. \tag{10}
\end{aligned}$$

В результате ряда преобразований систему разрешающих уравнений данной задачи приводим к виду

$$\begin{aligned}
&(c_{11}^{(q)} D^2 - c_{44}^{(q)} k^2 + \Omega^2) \psi_1^{(q)} + ik (c_{13}^{(q)} + c_{44}^{(q)}) \psi_2^{(q)} - ik (e_{31}^{(q)} + e_{15}^{(q)}) \psi_3^{(q)} = 0; \\
&ik (c_{13}^{(q)} + c_{44}^{(q)}) D^2 \psi_1^{(q)} + (c_{44}^{(q)} D^2 + \Omega^2 - c_{33}^{(q)} k^2) \psi_2^{(q)} - (e_{15}^{(q)} D^2 - e_{33}^{(q)} k^2) \psi_3^{(q)} = 0; \\
&ik (e_{31}^{(q)} + e_{15}^{(q)}) D^2 \psi_1^{(q)} + (e_{15}^{(q)} D^2 - e_{33}^{(q)} k^2) \psi_2^{(q)} + (e_{11}^{(q)} D^2 - e_{33}^{(q)} k^2) \psi_3^{(q)} = 0; \\
&(c_{66}^{(q)} D^2 - c_{44}^{(q)} k^2 + \Omega^2) \psi_4^{(q)} = 0 \tag{11} \\
&(D^2 = \partial_r^2 + r^{-1} \partial_r + r^{-2} \partial_\theta^2).
\end{aligned}$$

С использованием для интегрирования системы (11) операторного метода получена следующая форма ее решения:

$$\psi_p^{(q)} = \sum_{j=1}^3 \beta_{pi}^{(q)} \chi_j^{(q)}(r, \theta) \quad (p = \overline{1,3}); \quad \psi_4^{(q)} = \chi_4^{(q)}(r, \theta). \quad (12)$$

Здесь  $\chi_j^{(q)}$  ( $j = \overline{1,4}$ ) – метагармонические функции, определяемые из уравнений

$$D^2 \chi_j^{(q)}(r, \theta) + \gamma_j^2 \chi_j^{(q)}(r, \theta) = 0. \quad (13)$$

Таким образом, выражения для комплексных амплитудных компонент в представлениях вектора упругих перемещений, тензора механических напряжений, потенциала и вектора индукции квазистатического электрического поля для исследуемых нормальных электроупругих волн принимают вид

$$\begin{aligned} u_{r0}^{(q)} &= \sum_{j=1}^3 \beta_{1j}^{(q)} \partial_r \chi_j^{(q)}(r, \theta) + r^{-1} \partial_\theta \chi_4^{(q)}(r, \theta), \quad u_{\theta 0}^{(q)} = \sum_{j=1}^3 \beta_{1j}^{(q)} r^{-1} \partial_\theta \chi_j^{(q)}(r, \theta) - \partial_r \chi_4^{(q)}(r, \theta); \\ u_{z0}^{(q)} &= \sum_{j=1}^3 \beta_{2j}^{(q)} \chi_j^{(q)}(r, \theta), \quad \varphi_0^{(q)} = \sum_{j=1}^3 \beta_{3j}^{(q)} \chi_j^{(q)}(r, \theta); \\ \sigma_{rr0}^{(q)} &= \sum_{j=1}^3 \left[ \left( c_{11}^{(q)} \partial_r^2 + c_{12}^{(q)} \left( r^{-1} \partial_r + r^{-2} \partial_\theta^2 \right) \right) \beta_{1j}^{(q)} + ikc_{13}^{(q)} \beta_{2j}^{(q)} - ik e_{31}^{(q)} \beta_{3j}^{(q)} \right] \chi_j^{(q)}(r, \theta) + \\ &\quad + \left( c_{12}^{(q)} - c_{11}^{(q)} \right) \left( r^{-2} \partial_\theta - r^{-1} \partial_r \partial_\theta \right) \chi_4^{(q)}(r, \theta); \\ \sigma_{\theta\theta 0}^{(q)} &= \sum_{j=1}^3 \left[ \left( c_{11}^{(q)} \left( r^{-1} \partial_r + r^{-2} \partial_\theta^2 \right) + c_{12}^{(q)} \partial_r^2 \right) \beta_{1j}^{(q)} + ikc_{13}^{(q)} \beta_{2j}^{(q)} - ik e_{31}^{(q)} \beta_{3j}^{(q)} \right] \chi_j^{(q)}(r, \theta) - \\ &\quad - \left( c_{12}^{(q)} - c_{11}^{(q)} \right) \left( r^{-2} \partial_\theta - r^{-1} \partial_r \partial_\theta \right) \chi_4^{(q)}(r, \theta); \\ \sigma_{zz0}^{(q)} &= \sum_{j=1}^3 \left[ c_{13}^{(q)} \beta_{1j}^{(q)} \left( \partial_r^2 + r^{-1} \partial_r + r^{-2} \partial_\theta^2 \right) + ikc_{33}^{(q)} \beta_{2j}^{(q)} - ik e_{33}^{(q)} \beta_{3j}^{(q)} \right] \chi_j^{(q)}(r, \theta); \\ \sigma_{\theta z 0}^{(q)} &= \sum_{j=1}^3 \left[ ikc_{44}^{(q)} \beta_{1j}^{(q)} + c_{44}^{(q)} \beta_{2j}^{(q)} - e_{15}^{(q)} \beta_{3j}^{(q)} \right] r^{-1} \partial_\theta \chi_j^{(q)}(r, \theta) - ikc_{44}^{(q)} \partial_r \chi_4^{(q)}(r, \theta); \\ \sigma_{rz0}^{(q)} &= \sum_{j=1}^3 \left[ ikc_{44}^{(q)} \beta_{1j}^{(q)} + c_{44}^{(q)} \beta_{2j}^{(q)} - e_{15}^{(q)} \beta_{3j}^{(q)} \right] \partial_r \chi_j^{(q)}(r, \theta) + ikc_{44}^{(q)} r^{-1} \partial_\theta \chi_4^{(q)}(r, \theta); \\ \sigma_{r\theta 0}^{(q)} &= \sum_{j=1}^3 \left[ -2c_{66}^{(q)} \beta_{1j}^{(q)} \left( r^{-2} \partial_\theta - r^{-1} \partial_r \partial_\theta \right) \right] \chi_j^{(q)}(r, \theta) - c_{66}^{(q)} \left( \partial_r^2 - r^{-1} \partial_r - r^{-2} \partial_\theta^2 \right) \chi_4^{(q)}(r, \theta); \\ D_{r0}^{(q)} &= \sum_{j=1}^3 \left[ ik e_{15}^{(q)} \beta_{1j}^{(q)} + e_{15}^{(q)} \beta_{2j}^{(q)} + \varepsilon_{11}^{(q)} \beta_{3j}^{(q)} \right] \partial_r \chi_j^{(q)}(r, \theta) + ik e_{15}^{(q)} r^{-1} \partial_\theta \chi_4^{(q)}(r, \theta); \\ D_{\theta 0}^{(q)} &= \sum_{j=1}^3 \left[ ik e_{15}^{(q)} \beta_{1j}^{(q)} + e_{15}^{(q)} \beta_{2j}^{(q)} + \varepsilon_{11}^{(q)} \beta_{3j}^{(q)} \right] r^{-1} \partial_\theta \chi_j^{(q)}(r, \theta) - ik e_{15}^{(q)} \partial_r \chi_4^{(q)}(r, \theta); \end{aligned} \quad (14)$$

$$D_{z0}^{(q)} = \sum_{j=1}^3 \left[ e_{31}^{(q)} \beta_{1j}^{(q)} \left( \partial_r^2 + r^{-1} \partial_r + r^{-2} \partial_\theta^2 \right) + i k e_{33}^{(q)} \beta_{2j}^{(q)} + i k \varepsilon_{33}^{(q)} \beta_{3j}^{(q)} \right] \chi_j^{(q)}(r, \theta). \quad (16)$$

## 2. Основные дисперсионные соотношения

При построении и исследовании дисперсионных зависимостей для принятых электроупругих волн отдельно рассмотрены независимые подмножества симметричных (S) и антисимметричных (A) волн, которые характеризуются альтернативной симметрией характеристик динамического электроупругого состояния по координатам в сечении. К S-волнам относятся волны, для которых

$$u_r^{(q)}(r, -\theta) = u_r^{(q)}(r, \theta); \quad u_\theta^{(q)}(r, -\theta) = -u_\theta^{(q)}(r, \theta);$$

$$u_z^{(q)}(r, -\theta) = u_z^{(q)}(r, \theta); \quad \varphi^{(q)}(r, -\theta) = \varphi^{(q)}(r, \theta),$$

а к A-волнам – волны, для которых

$$u_r^{(q)}(r, -\theta) = -u_r^{(q)}(r, \theta); \quad u_\theta^{(q)}(r, -\theta) = u_\theta^{(q)}(r, \theta);$$

$$u_z^{(q)}(r, -\theta) = -u_z^{(q)}(r, \theta), \quad \varphi^{(q)}(r, -\theta) = -\varphi^{(q)}(r, \theta).$$

С учетом геометрии сечений волноводов и граничных условий на их поверхностях вводим следующие представления  $\chi_j^{(q)}$  для S-волн:

$$\chi_j^{(q)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_{jn}^{(q)} J_{\lambda_n}(\gamma_j r) + B_{jn}^{(q)} Y_{\lambda_n}(\gamma_j r) \right) \cos \lambda_n \theta \quad (j = \overline{1, 3});$$

$$\chi_4^{(q)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_{4n}^{(q)} J_{\lambda_n}(\gamma_4 r) + B_{4n}^{(q)} Y_{\lambda_n}(\gamma_4 r) \right) \sin \lambda_n \theta, \quad \lambda_n = (2n+1)\pi/2\alpha. \quad (17)$$

Представления  $\chi_j^{(q)}$  для A-волн имеют схожую форму:

$$\chi_j^{(q)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_{jn}^{(q)} J_{\eta_n}(\gamma_j r) + B_{jn}^{(q)} Y_{\eta_n}(\gamma_j r) \right) \sin \eta_n \theta \quad (j = \overline{1, 3});$$

$$\chi_4^{(q)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_{4n}^{(q)} J_{\eta_n}(\gamma_4 r) + B_{4n}^{(q)} Y_{\eta_n}(\gamma_4 r) \right) \cos \eta_n \theta, \quad \eta_n = n\pi/\alpha. \quad (18)$$

При данном выборе разрешающих функций  $\chi_j^{(q)}$  граничные условия (6) на поверхностях секторного выреза удовлетворяются тождественно.

С учетом ортогональности систем функций  $\{\cos \lambda_n \theta\}$ ,  $\{\sin \lambda_n \theta\}$  в интервале  $\theta \in [-\alpha, \alpha]$  алгебраизацию граничных условий и условий контакта слоев осуществляем методом ортогональных рядов. Граничные условия на внутренней и внешней цилиндрических границах  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_Q$  полого волновода приводим к восьми функциональным уравнениям, содержащим произвольные постоянные  $A_{jn}^{(q)}$  и  $B_{jn}^{(q)}$ . Каждое условие контакта (7), (8) на границе пары слоев также порождает восемь уравнений аналогичного вида. Следовательно, полная система функциональных уравнений для полого  $Q$ -слойного пьезокерамического волновода секторного сечения состоит из  $8Q$  уравнений. В результате ортогонализации получаем для каждого отдельного зна-

чения  $n = \overline{0, \infty}$  однородную систему  $8Q$  линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $A_{jn}^{(q)}$  и  $B_{jn}^{(q)}$ . Условием существования нетривиальных решений этой системы является равенство нулю ее определителя, который имеет блочную форму следующего вида:

$$\begin{vmatrix} \boxed{S_0^{(1)}} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{C_1^{(1)}} & \boxed{C_1^{(2)}} & 0 & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \boxed{C_{Q-1}^{(Q-1)}} & \boxed{C_{Q-1}^{(Q)}} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{S_Q^{(Q)}} \end{vmatrix} = 0. \quad (19)$$

Здесь  $S_0^{(1)}$  и  $S_Q^{(Q)}$  – прямоугольные матричные блоки размером 8 на 4, соответствующие граничным условиям на цилиндрических границах;

$$S_0^{(1)} = \begin{vmatrix} \Delta_{r11}^{(q,j)} & \Delta_{r12}^{(q,j)} & \Delta_{r13}^{(q,j)} & \Delta_{r14}^{(q,j)} & \Delta_{r21}^{(q,j)} & \Delta_{r22}^{(q,j)} & \Delta_{r23}^{(q,j)} & \Delta_{r24}^{(q,j)} \\ \Delta_{\theta11}^{(q,j)} & \Delta_{\theta12}^{(q,j)} & \Delta_{\theta13}^{(q,j)} & \Delta_{\theta14}^{(q,j)} & \Delta_{\theta21}^{(q,j)} & \Delta_{\theta22}^{(q,j)} & \Delta_{\theta23}^{(q,j)} & \Delta_{\theta24}^{(q,j)} \\ \Delta_{z11}^{(q,j)} & \Delta_{z12}^{(q,j)} & \Delta_{z13}^{(q,j)} & \Delta_{z14}^{(q,j)} & \Delta_{z21}^{(q,j)} & \Delta_{z22}^{(q,j)} & \Delta_{z23}^{(q,j)} & \Delta_{z24}^{(q,j)} \\ \Delta_{\phi11}^{(q,j)} & \Delta_{\phi12}^{(q,j)} & \Delta_{\phi13}^{(q,j)} & \Delta_{\phi14}^{(q,j)} & \Delta_{\phi21}^{(q,j)} & \Delta_{\phi22}^{(q,j)} & \Delta_{\phi23}^{(q,j)} & \Delta_{\phi24}^{(q,j)} \end{vmatrix} \quad (20)$$

Структура элементов блока имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta_{r1j}^{(q,j)} = & \frac{(c_{11}^{(q)} + c_{12}^{(q)})}{2} (-\gamma_j^2) \beta_{1j}^{(q)} J_{\lambda_n}(\gamma_j R) + ikc_{13}^{(q)} \beta_{2j}^{(q)} J_{\lambda_n}(\gamma_j R) - ike_{31}^{(q)} \beta_{3j}^{(q)} J_{\lambda_n}(\gamma_j R) - \\ & - \beta_{1j}^{(q)} \frac{(c_{12}^{(q)} - c_{11}^{(q)})}{2} (-\gamma_j^2 J_{\lambda_n}(\gamma_j R) - 2\lambda_n R^{-2} J_{\lambda_n}(\gamma_j R) + \\ & + 2\gamma_j R^{-1} J_{\lambda_n+1}(\gamma_j R) + 2\lambda_n^2 R^{-2} J_{\lambda_n}(\gamma_j R)) \quad j = \overline{(1, 3)}; \end{aligned}$$

$$\Delta_{r14}^{(q,j)} = (c_{12}^{(q)} - c_{11}^{(q)}) (\lambda_n R^{-2} J_{\lambda_n}(\gamma_4 R) - \lambda_n R^{-1} (\lambda_n R^{-1} J_{\lambda_n}(\gamma_4 R) - \gamma_4 J_{\lambda_n+1}(\gamma_4 R))) ; \dots ;$$

$C_j^{(q)}$  – квадратные матричные блоки 8 на 8, вид элементов которых определяется условиями контакта между слоями.

Данные соотношения, в конечном итоге, представляют искомые дисперсионные уравнения. Для сплошных секторных цилиндров граничные условия на внешней цилиндрической границе  $\Gamma_Q$  приводят к четырем функциональным уравнениям, а условия контакта на границах слоев по-прежнему порождают по восемь уравнений. Полная система уравнений для сплошного  $Q$ -слойного пьезокерамического волновода секторного сечения состоит из  $8Q - 4$  уравнений и имеет вид, аналогичный (19), за исключением первых четырех строк и столбцов определителя (условий на  $\Gamma_0$ ). Возможна ситуация, когда недостаточная жесткость пьезокерамики обуславливает необходимость включения в волновод «несущих» металлических слоев. В этом случае, при наличии в волноводе  $M$  непьезоэлектрических проводящих слоев, порядок опре-

делителя для полых и сплошных цилиндров будет  $8Q-2M$  и  $8Q-2M-4$ , соответственно.

Отметим, что в случае сплошных секторных цилиндров амплитудные функции напряженно-деформированного состояния могут иметь особенности в окрестности точки  $r=0$ . Элементы дисперсионных определителей имеют зависимости от радиальной координаты, представленные выражениями типа  $J_\alpha(\gamma r) \cdot r^{-\beta}$ ; следовательно, в случае  $\alpha - \beta < 0$  в соответствующем слагаемом имеется особенность степенного типа порядка  $|\alpha - \beta|$  при  $r \rightarrow 0$ . С учетом выражения (17) для  $\lambda_n$  устанавливаем, что для S-волн особенности степенного типа существуют в волноводах угловой меры  $\alpha > \pi/2$  для волн со значением окружного показателя изменчивости  $n=0$ .

### 3. Результаты численных исследований.

Численный анализ проведен для двухслойных полых волноводов с внутренним слоем из пьезокерамики PZT-5A и внешним слоем из пьезокерамики BaTiO<sub>3</sub> с геометрическими параметрами  $R_2/R_0=2$ ,  $h_1=h_2$ . Физико-механические параметры материалов имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \text{PZT-5A: } & c_{11} = 12,1 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \quad c_{12} = 7,54 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \quad c_{13} = 7,52 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \\ & c_{33} = 11,1 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \quad c_{44} = 2,11 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \quad e_{31} = -5,4 \text{ С/м}^2; \quad e_{33} = 15,8 \text{ С/м}^2; \\ & e_{15} = 12,3 \text{ С/м}^2; \quad \varepsilon_{11} = 81,1 \cdot 10^{-10} \text{ Ф/м}; \quad \varepsilon_{33} = 73,5 \cdot 10^{-10} \text{ Ф/м}; \quad \rho = 7,75 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{BaTiO}_3: & c_{11} = 15,0 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \quad c_{12} = 6,6 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \quad c_{13} = 6,6 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \\ & c_{33} = 14,6 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \quad c_{44} = 4,4 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \quad e_{31} = -4,35 \text{ С/м}^2; \quad e_{33} = 17,5 \text{ С/м}^2; \\ & e_{15} = 11,4 \text{ С/м}^2; \quad \varepsilon_{11} = 98,7 \cdot 10^{-10} \text{ Ф/м}; \quad \varepsilon_{33} = 111,6 \cdot 10^{-10} \text{ Ф/м}; \quad \rho = 5,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3. \end{aligned}$$

Результаты численных исследований приведены для нескольких значений параметра  $\alpha$  (угловой меры сечения) из диапазона  $[30^\circ; 150^\circ]$ . Безразмерное волновое число  $k$  варьировали в пределах  $\text{Re}k \in [0; 8]$ ,  $\text{Im}k \in [0; 8]$ , а безразмерная частота  $\Omega \in [0; 24]$ .

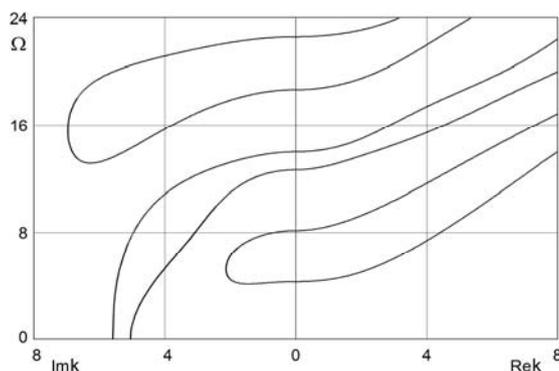


Рис. 2

На рис. 2 показаны действительные и мнимые дисперсионные ветви для спектра симметричных волн в волноводе угловой меры  $\alpha = 30^\circ$ . Следует отметить отсутствие моды бегущих волн с нулевой частотой запертия, а также характер третьей и четвертой мод. В спектрах для волноводов с большими угловыми размерами, а именно  $\alpha = 45^\circ$  (сплошные линии) и  $\alpha = 60^\circ$  (пунктирные линии), представленных на рис. 3, эти моды соединяются в мнимой части спектра. Частоты волн из первых пяти мод имеют тенденцию к уменьшению при росте  $\alpha$ , вместе с тем увеличивается размер

мнимой «петли» (ранее на рис. 2 отсутствует). В целом можно констатировать, что в тех случаях, когда сечение волновода является круговым сектором малой угловой меры, имеет место существенная зависимость структуры спектра от параметра  $\alpha$ .

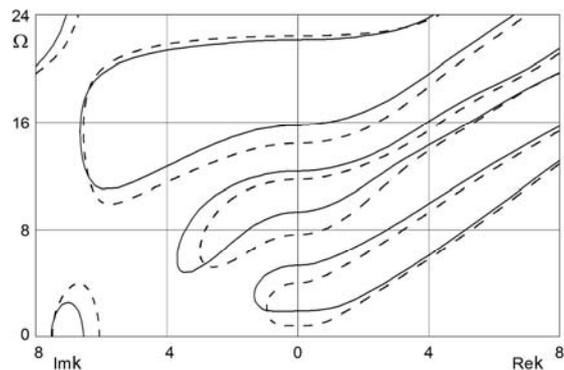


Рис. 3

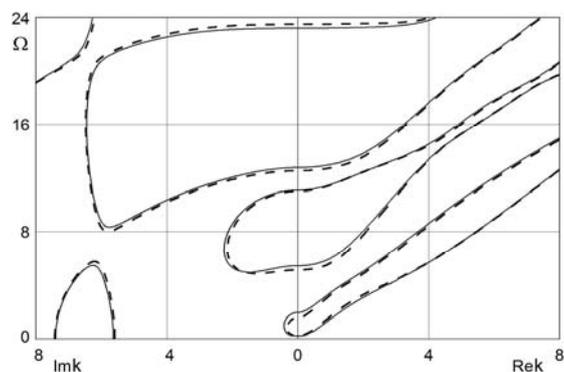


Рис. 4

Дисперсионные спектры для волноводов угловой меры  $\alpha = 120^\circ$  и  $\alpha = 150^\circ$  обозначены на рис. 4, соответственно, сплошными и пунктирными линиями. Можно констатировать гораздо менее значительные отличия между кривыми в двух данных случаях. При этом сохраняются основные тенденции в перестройке спектров с ростом  $\alpha$  – уменьшение частот пяти нижних мод, увеличение частот шестой моды и размеров мнимой «петли».

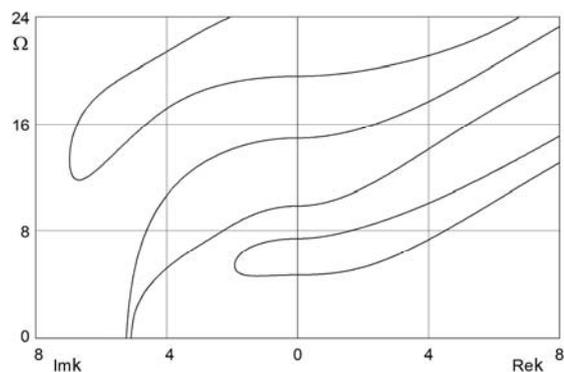


Рис. 5

Одной из важных характеристик волнового движения являются распределения средних за период потоков мощности электроупругих волн, рассчитываемые на основе представлений

$$P_{i,cp} = \frac{\omega}{2} \text{Im}(\sigma_{ij} \bar{u}_j - \varphi \bar{D}_j). \quad (21)$$

На рис. 5 проиллюстрирована зависимость  $P_2/P_1$  (отношение среднего потока мощности в аксиальном направлении для внешнего слоя волновода к потоку мощности для внутреннего слоя) от угловых размеров волновода. Приведенные кривые соответствуют потокам мощности для волн низшей моды с относительной длиной  $\lambda = \pi/2$  и  $\lambda = \pi/3$ . Отношение площадей сечений слоев не зависит от  $\alpha$  и составляет 1,4. При малых  $\alpha$  доля энергии, сосредоточенной во внешнем слое, значительно превышает энергию во внутреннем слое, в то время как с ростом угловой меры отношение  $P_2/P_1$  монотонно убывает.

### Заключение.

В данной статье предложена методика теоретического анализа электроупругих волн в многослойных пьезоэлектрических цилиндрах, имеющих продольный вырез секторного сечения произвольной угловой меры. Представлены действительные и мнимые ветви дисперсионных спектров и охарактеризованы основные качественные и количественные изменения в их структуре, связанные с варьированием геометрических параметров волноводов.

Также рассчитано соотношение распределения по сечению слоев средних за период потоков мощности. Проведенное исследование позволяет сделать вывод о том, что изменение материала слоев, геометрии сечения и граничных условий на цилиндрических поверхностях рассматриваемых волноводов позволяет управлять их дисперсионными характеристиками в достаточно широком диапазоне.

РЕЗЮМЕ. Розроблено методику теоретичного аналізу спектрів і властивостей електропружних хвиль в багатослойних п'єзоактивних циліндрах, що мають поздовжній виріз секторного перерізу довільної кутової міри. Досліджено дійсні та уявні гілки дисперсійних спектрів і співвідношення середніх за період потоків потужності у зовнішньому та внутрішньому шарах хвилеводу. Показано, що зміна матеріалів шарів і геометрії перерізів дозволяє управляти їх дисперсійними характеристиками у достатньо широкому діапазоні.

1. Лоза И.А., Медведев К.В., Шульга Н.А. Распространение неосесимметричных акустоэлектрических волн в слоистых цилиндрах // Прикл. механика. – 1987. – 23, № 8. – С. 3 – 6.
2. Пузырев В.В. Спектры и свойства нормальных электроупругих волн в закрепленных пьезокерамических цилиндрах кольцевого сечения с секторным вырезом // Механика твердого тела. – 2006. – 36. – С. 134 – 143.
3. Шульга В.М. О распространении акустоэлектрических волн в полом цилиндре с продольной осью симметрии физических свойств // Прикл. механика. – 1999. – 35, № 4. – С. 37 – 46.
4. Шульга В.М. О распространении акустоэлектрических волн в полом цилиндре с радиальной осью симметрии физико-механических свойств // Прикл. механика. – 1999. – 35, № 7. – С. 49 – 58.
5. Шульга Н.А. Распространение гармонических волн в анизотропных пьезоэлектрических цилиндрах. Однородные пьезокерамические волноводы // Прикл. механика. – 2002. – 38, № 8. – С. 46 – 68.
6. Шульга Н.А. Распространение гармонических волн в анизотропных пьезоэлектрических цилиндрах. Волноводы с усложненными свойствами // Прикл. механика. – 2002. – 38, № 12. – С. 33 – 54.
7. Шульга Н.А., Евсейчик Ю.Б., Медведев К.Б. Распространение осесимметричных акустоэлектрических волн в слоистом цилиндре // Прикл. механика. – 1989. – 25, № 9. – С. 39 – 45.
8. Шульга Н.А., Медведев К.Б. Распространение акустоэлектрических волн в слоистых цилиндрах // Прикл. механика. – 1993. – 29, № 5. – С. 32 – 39.

9. Шульга Н.А., Медведев К.Б. Распространение акустоэлектрических волн в слоистом цилиндре с проводящими слоями // Прикл. механика. – 1995. – **31**, № 2. – С. 7 – 15.
10. Шульга Н.А., Рудницкий С.И., Евсейчик Ю.Б. Исследование осесимметричных электроупругих волн в трехслойной цилиндрической оболочке по трехмерной и прикладной теориям // Прикл. механика. – 1987. – **23**, № 10. – С. 118 – 125.
11. Шульга Н.А., Ярыгина Н.А. Распространение осесимметричных акустоэлектрических волн в слоистом цилиндре с жидкостью // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1994. – Вып. 61. – С. 67 – 71.
12. Электроупругость. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5-ти т.; Т. 5).
13. Puzyrev V. Elastic waves in piezoceramic cylinders of sector cross-section // Int. J. Solids Struct. – 2010. – **47**. – P. 2115 – 2122.
14. Puzyrev V., Storozhev V. Wave propagation in axially polarized piezoelectric hollow cylinders of sector cross section // J. Sound and Vibr. – 2011. – **330**. – P. 4508 – 4518.
15. Storozhev V.I., Troian R.R., Puzyrev V.V. Normal waves in anisotropic cylinders of sector cross-section // Proc. of the IUTAM symposium on recent advances of acoustic waves in solids. – Taipei, Taiwan, 2010. – P. 371 – 376.
16. Shul'ga N.A. Theory of dynamic processes in mechanical systems and materials of regular structure Propagation of coupled waves in periodic-nonhomogeneous space // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 12. – P. 1301 – 1338.
17. Shul'ga N.A. On equations of electromagnetomechanics in the International (SI) and Gauss (SG) systems of units and their direct interdependence // Int. Appl. Mech. – 2011. – **47**, N 6. – P. 685 – 693.

Поступила 14.02.2011

Утверждена в печать 26.06.2012