

Д. М. Л и л а

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ
ДВУХЗВЕННОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА,
ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО СО СТРУНОЙ**

*Черкасский национальный университет имени Богдана Хмельницкого,
б-р Шевченко, 81, 18031, Черкассы, Украина; e-mail: dim_1@ukr.net*

Abstract. The equations of plane vertical motion are obtained for a hybrid model of mechanical system consisting of the horizontally placed string and the suspended at some its point two-link pendulum. The conditions of asymptotical stability are established for stationary motions of two-link pendulum interacting with the elastic string.

Key words: two-link pendulum; elastic string; hybrid model; conditions of stability of stationary motion.

Введение.

Обоснование научного интереса к общим моделям колебательных систем с бесконечным числом степеней свободы, взаимодействующих посредством подвеса с сосредоточенной осциллирующей массой, и практической применимости результатов решений задач устойчивости соответствующих стационарных движений имеется в работах [3, 4 и др.]. В работе [4] построена модель плоского вертикального движения однозвенного математического маятника, взаимодействующего с упругой струной. Здесь также дифференциальным уравнениям движения придан вид нормальной системы. Исходя из уравнений возмущенного движения в окрестности нижнего положения равновесия, в этой работе с привлечением метода матричнозначных вспомогательных функций [12 – 19] и асимптотических методов теории нелинейных колебаний решена в линейной и нелинейной постановках задача устойчивости стационарных режимов колебаний однозвенного маятника в такой модели.

Настоящая работа посвящена построению математической модели и решению с использованием критерия устойчивости для линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами [8, 9] задачи асимптотической устойчивости положений равновесия двухзвенного математического маятника, взаимодействующего со струной.

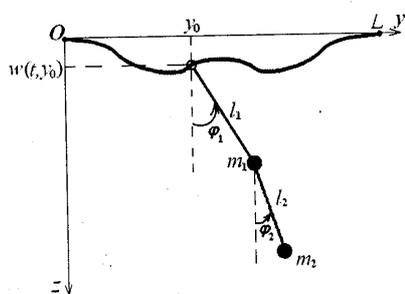


Рис. 1

§1. Постановка задачи.

Изучим некоторые особенности плоских движений механической системы, моделируемой горизонтально расположенной в поле тяжести материальной упругой изотропной струной и совокупностью двух материальных точек, подвешенных последовательно в некоторой точке струны на невесомых нерастяжимых стержнях (рис. 1). В декартовой прямоугольной системе координат Ozy положение точек струны определяем по величине их смещения $w(t, y)$ от гори-

зонтали $z = 0$ (здесь $t \in [t_0, \infty)$, $y \in [0, L]$), а положение колеблющейся сосредоточенной массы $m = m_1 + m_2$ – координатами

$$z_1 = w(t, y_0) + l_1 \cos \varphi_1; \quad y_1 = y_0 + l_1 \sin \varphi_1;$$

$$z_2 = w(t, y_0) + l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2; \quad y_2 = y_0 + l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2,$$

где y_0 , l_j и φ_j , $j = 1, 2$, – ордината точки подвеса маятника, длины стержней и углы отклонения стержней от вертикали, соответственно.

Предполагается, что углы φ_1 и φ_2 достаточно малы (малые нелинейные колебания маятника), чтобы не учитывать смещения точек струны вдоль горизонтали. Стержни рассматриваем как реономную связь

$$(z_1 - w(t, y_0))^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_2 - z_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_1^2 + l_2^2.$$

Вычисляя производные \dot{z}_1 , \dot{y}_1 , \dot{z}_2 , \dot{y}_2 и вводя обозначение $\rho(y)$ для линейной плотности струны, получаем выражение кинетической энергии данной механической системы в виде

$$T = \frac{1}{2} m_1 (w_t^2(t, y_0) - 2l_1 \sin \varphi_1 w_t(t, y_0) \dot{\varphi}_1 + l_1^2 \dot{\varphi}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (w_t^2(t, y_0) - 2(l_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + l_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2) w_t(t, y_0) + 2l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2) + \frac{1}{2} \int_0^L \rho(y) w_t^2(t, y) dy. \quad (1.1)$$

Потенциальная энергия представляется выражением

$$\Pi = -m_1 g (w(t, y_0) + l_1 \cos \varphi_1) - m_2 g (w(t, y_0) + l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2) + \int_0^L (0,5 \mu w_y^2(t, y) - (p(t, y) + \rho(y)g) w(t, y)) dy, \quad (1.2)$$

где $0,5 \mu w_y^2(t, y) dy$, $-p(t, y) w(t, y) dy$ и $-\rho(y) g w(t, y) dy$ – мгновенная элементарная потенциальная энергия упругой силы [2, 7], внешней нормальной силы, эквивалентной дополнительному удельному весу $p(t, y)$ струны, и силы тяжести, соответственно.

Для получения уравнений движения исследуемой системы воспользуемся обобщенным интегральным вариационным принципом Гамильтона – Остроградского [5]

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta \Pi + \delta W) dt = 0;$$

$$\delta \varphi_1(t_0) = \delta \varphi_1(t_1) = 0; \quad \delta \varphi_2(t_0) = \delta \varphi_2(t_1) = 0; \quad \delta w(t_0, y) = \delta w(t_1, y) = 0,$$

где $\delta W = Q_{\varphi_1} \delta \varphi_1 + Q_{\varphi_2} \delta \varphi_2 = -k_1 \dot{\varphi}_1 \delta \varphi_1 - k_2 \dot{\varphi}_2 \delta \varphi_2$ – виртуальная работа непотенциальной силы трения в точках подвеса.

§2. Уравнения движения.

После варьирования выражений (1.1), (1.2) и использования при необходимости интегрирования по частям совместно с граничными условиями

$$w(t, 0) = w(t, L) = 0,$$

а также определяющих свойств δ -функции получим путем приравнивания к нулю коэффициентов при независимых вариациях $\delta \varphi_1$, $\delta \varphi_2$ и δw следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi}_1 + \frac{k_1}{ml_1^2} \dot{\varphi}_1 + \frac{1}{l_1} (g - w_n(t, y_0)) \sin \varphi_1 &= -\frac{m_2 l_2}{ml_1} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_2 + \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_2^2); \\
\ddot{\varphi}_2 + \frac{k_2}{m_2 l_2^2} \dot{\varphi}_2 + \frac{1}{l_2} (g - w_n(t, y_0)) \sin \varphi_2 &= -\frac{l_1}{l_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_1 - \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2); \\
[\rho(y) + m\delta(y - y_0)]w_n &= \mu w_{yy} + p(t, y) + \rho(y)g + \\
&+ (m(g + l_1(\sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2) + m_2 l_2(\sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 + \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2))\delta(y - y_0).
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Обозначив $\Phi_j(t) = \sin \varphi_j \dot{\varphi}_j + \cos \varphi_j \dot{\varphi}_j^2$, $j = 1, 2$, и полагая $p \equiv 0$; $\rho \equiv \text{const}$, на основании уравнений (2.1) получим систему

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi}_1 + \frac{k_1}{ml_1^2} \dot{\varphi}_1 + \frac{1}{l_1} (g - w_n(t, y_0)) \sin \varphi_1 &= -\frac{m_2 l_2}{ml_1} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_2 + \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_2^2); \\
\ddot{\varphi}_2 + \frac{k_2}{m_2 l_2^2} \dot{\varphi}_2 + \frac{1}{l_2} (g - w_n(t, y_0)) \sin \varphi_2 &= -\frac{l_1}{l_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_1 - \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2); \\
[\rho + m\delta(y - y_0)]w_n &= \mu w_{yy} + \rho g + (m(g + l_1 \Phi_1(t)) + m_2 l_2 \Phi_2(t))\delta(y - y_0);
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\varphi_1(t_0) = \varphi_{10}; \quad \dot{\varphi}_1(t_0) = \dot{\varphi}_{10}; \quad \varphi_2(t_0) = \varphi_{20}; \quad \dot{\varphi}_2(t_0) = \dot{\varphi}_{20};$$

$$w(t, 0) = w(t, L) = 0; \quad w(t_0, y) = w_0(y); \quad \dot{w}_i(t_0, y) = \dot{w}_0(y).$$

Используя идею метода нормальных форм колебаний [6], заключающуюся в данном случае в возможности представления решения исходного неоднородного уравнения в частных производных в виде

$$w(t, y) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) u_n(y), \tag{2.3}$$

где коэффициенты q_n выписанной линейной комбинации удовлетворяют уравнениям Лагранжа второго рода [5, 6]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T - \Pi)}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial(T - \Pi)}{\partial q_n} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{2.4}$$

играя вместе с переменными φ_1, φ_2 роль независимых координат, на основании (2.4) уравнения (2.2) получаем в виде

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_s + \nu_s^2 q_s &= \beta_s + ml_1 u_s(y_0) [\sin \varphi_1 \ddot{\varphi}_1 + \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2] + m_2 l_2 u_s(y_0) [\sin \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 + \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2] \\
&(s = 1, 2, \dots);
\end{aligned}$$

$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{k_1}{ml_1^2} \dot{\varphi}_1 + \frac{1}{l_1} \left(g - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y_0) \ddot{q}_n \right) \sin \varphi_1 = -\frac{m_2 l_2}{ml_1} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_2 + \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_2^2); \tag{2.5}$$

$$\ddot{\varphi}_2 + \frac{k_2}{m_2 l_2^2} \dot{\varphi}_2 + \frac{1}{l_2} \left(g - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y_0) \ddot{q}_n \right) \sin \varphi_2 = -\frac{l_1}{l_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_1 - \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2),$$

где

$$\beta_s = mg u_s(y_0) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4v_s^2 \sin \frac{(2n-1)\pi y_0}{L}}{\pi(2n-1)(\omega_{2n-1}^2 - v_s^2)} \right];$$

ω_j^2 , $j \in \mathbb{N}$, – собственные числа спектральной задачи для ненагруженной струны, а v_j^2 и $u_j(y)$, $j \in \mathbb{N}$, – собственные числа и собственные функции спектральной задачи для нагруженной струны [3, 4], соответственно. При этом имеем

$$q_s(t_0) = w_{0s}; \quad \dot{q}_s(t_0) = \dot{w}_{0s}; \quad \varphi_1(t_0) = \varphi_{10}; \quad \dot{\varphi}_1(t_0) = \dot{\varphi}_{10}; \quad \varphi_2(t_0) = \varphi_{20}; \quad \dot{\varphi}_2(t_0) = \dot{\varphi}_{20}, \quad (2.6)$$

если учесть разложения начальных условий

$$w_0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{0n} u_n(y); \quad \dot{w}_0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{w}_{0n} u_n(y).$$

§3. Устойчивость стационарных движений.

Стационарными решениями бесконечной системы нелинейных дифференциальных уравнений (2.5) являются $(\beta_1/v_1^2, \beta_2/v_2^2, \dots, 0, 0)^T$; $(\beta_1/v_1^2, \beta_2/v_2^2, \dots, 0, \pi)^T$; $(\beta_1/v_1^2, \beta_2/v_2^2, \dots, \pi, 0)^T$ и $(\beta_1/v_1^2, \beta_2/v_2^2, \dots, \pi, \pi)^T$. Соответствующие положения равновесия будем называть первым нижним, вторым нижним, первым верхним и вторым верхним.

Далее рассматриваем вместо (2.3) конечную линейную комбинацию системы «координатных» функций $\{q_n(t)\}_{n=1}^2$, аппроксимирующих движение системы с бесконечным числом степеней свободы.

Исследуя влияние малых колебаний струны на колебания математического маятника в окрестности первого нижнего положения равновесия, исключим из системы (2.5) переменные q_1 , q_2 (двухмодовое приближение), проинтегрировав соответствующие линеаризованные уравнения [4]. Вследствие этого в переменных возмущенного движения $\chi_1 = \varphi_1$; $\chi_2 = \varphi_2$; $\chi_3 = \dot{\varphi}_1$; $\chi_4 = \dot{\varphi}_2$ в нормальной форме получим нелинейную нестационарную систему четвертого порядка, линейное приближение которой имеет вид

$$\dot{\chi}_1 = \chi_3; \quad \dot{\chi}_2 = \chi_4; \quad \dot{\chi}_3 = -\frac{m}{m_1} q(t) \chi_1 + \frac{m_2}{m_1} q(t) \chi_2 - \frac{k_1}{m_1 l_1^2} \chi_3 + \frac{k_2}{m_1 l_1 l_2} \chi_4; \quad (3.1)$$

$$\dot{\chi}_4 = \frac{m}{m_1} r(t) \chi_1 - \frac{m}{m_1} r(t) \chi_2 + \frac{k_1}{m_1 l_1 l_2} \chi_3 - \frac{m k_2}{m_1 m_2 l_2^2} \chi_4,$$

где

$$q(t) = \frac{g}{l_1} + \frac{d_{11}}{v_1} (c_{25} \sin v_1 t - c_{15} \cos v_1 t) + \frac{d_{12}}{v_2} (c_{26} \sin v_2 t - c_{16} \cos v_2 t);$$

$$r(t) = \frac{g}{l_2} + \frac{d_{21}}{v_1} (c_{25} \sin v_1 t - c_{15} \cos v_1 t) + \frac{d_{22}}{v_2} (c_{26} \sin v_2 t - c_{16} \cos v_2 t);$$

$$d_{11} = -\frac{v_1^2 u_{10}}{l_1}; \quad d_{12} = -\frac{v_2^2 u_{20}}{l_1}; \quad d_{21} = -\frac{v_1^2 u_{10}}{l_2}; \quad d_{22} = -\frac{v_2^2 u_{20}}{l_2} u_{10} = u_1(y_0); \quad u_{20} = u_2(y_0);$$

$$c_{15} = \dot{w}_{01} \sin v_1 t_0 - v_1 \left(w_{01} - \frac{\beta_1}{v_1^2} \right) \cos v_1 t_0; \quad c_{25} = v_1 \left(w_{01} - \frac{\beta_1}{v_1^2} \right) \sin v_1 t_0 + \dot{w}_{01} \cos v_1 t_0;$$

$$c_{16} = \dot{w}_{02} \sin v_2 t_0 - v_2 \left(w_{02} - \frac{\beta_2}{v_2^2} \right) \cos v_2 t_0; \quad c_{26} = v_2 \left(w_{02} - \frac{\beta_2}{v_2^2} \right) \sin v_2 t_0 + \dot{w}_{02} \cos v_2 t_0.$$

Естественной формой агрегирования [1] системы (3.1) является

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2; \quad \dot{x}_2 = A_{22}x_2 + A_{21}(t)x_1, \quad (3.2)$$

где

$$x_1 = (\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)^T; \quad x_2 = (\mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4)^T; \quad A_{11} = 0 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}; \quad A_{12} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} -\frac{k_1}{m_1 l_1^2} & \frac{k_2}{m_1 l_1 l_2} \\ \frac{k_1}{m_1 l_1 l_2} & -\frac{m k_2}{m_1 m_2 l_2^2} \end{bmatrix}; \quad A_{21}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{m}{m_1} q(t) & \frac{m_2}{m_1} q(t) \\ \frac{m}{m_1} r(t) & -\frac{m}{m_1} r(t) \end{bmatrix} = A_{21}^{(0)} + \sum_{\substack{j=-2 \\ (j \neq 0)}}^2 A_{21}^{(j)} e^{iv_j t},$$

причем $v_{-j} = -v_j$, $j = 1, 2$;

$$A_{21}^{(0)} = \begin{bmatrix} -\frac{mg}{m_1 l_1} & \frac{m_2 g}{m_1 l_1} \\ \frac{mg}{m_1 l_2} & -\frac{mg}{m_1 l_2} \end{bmatrix}; \quad A_{21}^{(1)} = -\frac{c_{15} + ic_{25}}{2v_1} \begin{bmatrix} -\frac{md_{11}}{m_1} & \frac{m_2 d_{11}}{m_1} \\ \frac{md_{21}}{m_1} & -\frac{md_{21}}{m_1} \end{bmatrix}; \quad A_{21}^{(-1)} = \overline{A_{21}^{(1)}};$$

$$A_{21}^{(2)} = -\frac{c_{16} + ic_{26}}{2v_2} \begin{bmatrix} -\frac{md_{12}}{m_1} & \frac{m_2 d_{12}}{m_1} \\ \frac{md_{22}}{m_1} & -\frac{md_{22}}{m_1} \end{bmatrix}; \quad A_{21}^{(-2)} = \overline{A_{21}^{(2)}}.$$

Вводя в рассмотрение малый параметр ε , систему уравнений (3.2) перепишем в виде

$$\dot{x} = (A + \varepsilon F(t))x, \quad (3.3)$$

где

$$x = (x_1^T, x_2^T)^T; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\Omega^2 & 0 \end{bmatrix}; \quad \Omega = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{bmatrix}; \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{mg}{m_1 l_1}}; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{mg}{m_1 l_2}};$$

$$F(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -Q(t) & -P \end{bmatrix}; \quad Q(t) = Q_0 + \sum_{\substack{j=-2 \\ (j \neq 0)}}^2 Q_j e^{iv_j t}; \quad P = -\frac{1}{u_0 k} A_{22}; \quad Q_0 = -\frac{1}{u_0 k} \begin{bmatrix} 0 & \frac{m_2 g}{m_1 l_1} \\ \frac{mg}{m_1 l_2} & 0 \end{bmatrix};$$

$$Q_1 = -\frac{1}{u_0 k} A_{21}^{(1)}; \quad Q_{-1} = \overline{Q_1}; \quad Q_2 = -\frac{1}{u_0 k} A_{21}^{(2)}; \quad Q_{-2} = \overline{Q_2}; \quad u_0 = \sqrt{u_{10}^2 + u_{20}^2}; \quad k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}.$$

Иследуем случай $l_1 \neq l_2$, когда матрица A имеет две пары комплексно сопряженных характеристических чисел $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$. Тогда нормальная жорданова форма матрицы A имеет вид $J = \begin{bmatrix} i\Omega & 0 \\ 0 & -i\Omega \end{bmatrix}$, а неособенная матрица S , производящая пре-

образование подобия $A = S^{-1}JS$, представляется в виде $S = \begin{bmatrix} i\Omega & I \\ -i\Omega & I \end{bmatrix}$. Общее решение $x = S^{-1}e^{Jt}Sc$, где $c = (C_1, \dots, C_4)^T$, системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = Ax$ запишется так:

$$x = -\frac{1}{2\omega_1\omega_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ i\omega_1 & 0 & -i\omega_1 & 0 \\ 0 & i\omega_2 & 0 & -i\omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-\omega_1\omega_2C_1 + i\omega_2C_3)e^{i\omega_1 t} \\ (-\omega_1\omega_2C_2 + i\omega_1C_4)e^{i\omega_2 t} \\ (-\omega_1\omega_2C_1 - i\omega_2C_3)e^{-i\omega_1 t} \\ (-\omega_1\omega_2C_2 - i\omega_1C_4)e^{-i\omega_2 t} \end{bmatrix}.$$

Отсюда заключаем [8], что

$$B = \begin{bmatrix} I & I \\ i\Omega & -i\Omega \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Диагональная матрица, элементами которой являются мнимые части собственных значений матрицы A , имеет вид

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & -\Omega \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

С учетом соотношений (3.3) – (3.5) получаем

$$A_0 = B^{-1}AB - i\Theta = 0. \quad (3.6)$$

Для определения матрицы A_1 [8] необходимо знать вид свободного члена квазипериодической матрицы-функции

$$e^{-i\Theta t} B^{-1} F(t) B e^{i\Theta t} = -\frac{1}{2u_0 k \omega_1 \omega_2} \begin{bmatrix} \Gamma_{11}(t) & \Gamma_{12}(t) \\ \Gamma_{21}(t) & \Gamma_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

где

$$\Gamma_{11}(t) = \Gamma_{11}^{(1)}(t) + \Gamma_{11}^{(2)}(t); \quad \Gamma_{11}^{(1)}(t) = - \begin{bmatrix} \sum_{j=-2(j \neq 0)}^2 i\omega_2 a_{21,11}^{(j)} e^{i\nu_j t} & \sum_{j=-2}^2 i\omega_2 a_{21,12}^{(j)} e^{i(\omega_2 - \omega_1 + \nu_j)t} \\ \sum_{j=-2}^2 i\omega_1 a_{21,21}^{(j)} e^{i(\omega_1 - \omega_2 + \nu_j)t} & \sum_{j=-2(j \neq 0)}^2 i\omega_1 a_{21,22}^{(j)} e^{i\nu_j t} \end{bmatrix};$$

$$\Gamma_{11}^{(2)}(t) = - \begin{bmatrix} \omega_1 \omega_2 \left(-\frac{k_1}{m_1 l_1^2}\right) & \omega_2^2 \frac{k_2}{m_1 l_1 l_2} e^{i(\omega_2 - \omega_1)t} \\ \omega_1^2 \frac{k_1}{m_1 l_1 l_2} e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} & \omega_1 \omega_2 \left(-\frac{mk_2}{m_1 m_2 l_2^2}\right) \end{bmatrix}; \quad \Gamma_{12}(t) = \Gamma_{12}^{(1)}(t) + \Gamma_{12}^{(2)}(t);$$

$$\Gamma_{12}^{(1)}(t) = - \begin{bmatrix} \sum_{j=-2(j \neq 0)}^2 i\omega_2 a_{21,11}^{(j)} e^{i(-2\omega_1 + \nu_j)t} & \sum_{j=-2}^2 i\omega_2 a_{21,12}^{(j)} e^{i(-\omega_1 - \omega_2 + \nu_j)t} \\ \sum_{j=-2}^2 i\omega_1 a_{21,21}^{(j)} e^{i(-\omega_1 - \omega_2 + \nu_j)t} & \sum_{j=-2(j \neq 0)}^2 i\omega_1 a_{21,22}^{(j)} e^{i(-2\omega_2 + \nu_j)t} \end{bmatrix};$$

$$\Gamma_{12}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} \omega_1 \omega_2 \left(-\frac{k_1}{m_1 l_1^2}\right) e^{-2i\omega_1 t} & \omega_2^2 \frac{k_2}{m_1 l_1 l_2} e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} \\ \omega_1^2 \frac{k_1}{m_1 l_1 l_2} e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} & \omega_1 \omega_2 \left(-\frac{mk_2}{m_1 m_2 l_2^2}\right) e^{-2i\omega_2 t} \end{bmatrix};$$

$$\Gamma_{21}(t) = \Gamma_{21}^{(1)}(t) + \Gamma_{21}^{(2)}(t);$$

$$\Gamma_{21}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} \sum_{j=-2(j \neq 0)}^2 i\omega_2 a_{21,11}^{(j)} e^{i(2\omega_1 + \nu_j)t} & \sum_{j=-2}^2 i\omega_2 a_{21,12}^{(j)} e^{i(\omega_1 + \omega_2 + \nu_j)t} \\ \sum_{j=-2}^2 i\omega_1 a_{21,21}^{(j)} e^{i(\omega_1 + \omega_2 + \nu_j)t} & \sum_{j=-2(j \neq 0)}^2 i\omega_1 a_{21,22}^{(j)} e^{i(2\omega_2 + \nu_j)t} \end{bmatrix};$$

$$\Gamma_{21}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} \omega_1 \omega_2 \left(-\frac{k_1}{m_1 l_1^2}\right) e^{2i\omega_1 t} & \omega_2^2 \frac{k_2}{m_1 l_1 l_2} e^{i(\omega_1 + \omega_2)t} \\ \omega_1^2 \frac{k_1}{m_1 l_1 l_2} e^{i(\omega_1 + \omega_2)t} & \omega_1 \omega_2 \left(-\frac{mk_2}{m_1 m_2 l_2^2}\right) e^{2i\omega_2 t} \end{bmatrix};$$

$$\Gamma_{22}(t) = \Gamma_{22}^{(1)}(t) + \Gamma_{22}^{(2)}(t); \quad \Gamma_{22}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} \sum_{j=-2(j \neq 0)}^2 i\omega_2 a_{21,11}^{(j)} e^{i\nu_j t} & \sum_{j=-2}^2 i\omega_2 a_{21,12}^{(j)} e^{i(\omega_1 - \omega_2 + \nu_j)t} \\ \sum_{j=-2}^2 i\omega_1 a_{21,21}^{(j)} e^{i(\omega_2 - \omega_1 + \nu_j)t} & \sum_{j=-2(j \neq 0)}^2 i\omega_1 a_{21,22}^{(j)} e^{i\nu_j t} \end{bmatrix};$$

$$\Gamma_{22}^{(2)}(t) = - \begin{bmatrix} \omega_1 \omega_2 \left(-\frac{k_1}{m_1 l_1^2}\right) & \omega_2^2 \frac{k_2}{m_1 l_1 l_2} e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} \\ \omega_1^2 \frac{k_1}{m_1 l_1 l_2} e^{i(\omega_2 - \omega_1)t} & \omega_1 \omega_2 \left(-\frac{mk_2}{m_1 m_2 l_2^2}\right) \end{bmatrix}$$

(для сокращения записи условимся полагать $\nu_0 = 0$). Предположив, что выполняется одно из нижеуказанных соотношений между величинами собственных частот ω_1 , ω_2 и частот ν_1 , ν_2 двухпериодической силы воздействия колеблющейся струны, получим, соответственно:

$$1) \quad \omega_2 - \omega_1 + \nu_j = 0; \quad j \in \{-2, -1, 1, 2\}; \quad A_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & 0 & \beta_2 & \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

где

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2u_0 k} \cdot \frac{k_1}{m_1 l_1^2}; \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2u_0 k} \cdot \frac{mk_2}{m_1 m_2 l_2^2}; \quad \beta_1 = \frac{1}{2u_0 k \omega_1} \cdot ia_{21,12}^{(j)}; \quad \beta_2 = \frac{1}{2u_0 k \omega_2} \cdot ia_{21,21}^{(-j)};$$

$$2) \quad -2\omega_1 + \nu_j = 0; \quad j \in \{1, 2\}; \quad A_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}; \quad (3.9)$$

где

$$\gamma = \frac{1}{2u_0 k \omega_1} \cdot ia_{21,11}^{(j)};$$

$$3) \quad -2\omega_2 + \nu_j = 0, \quad j \in \{1, 2\}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & \bar{\delta} & 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

где

$$\delta = \frac{1}{2u_0 k \omega_2} \cdot ia_{21,22}^{(j)};$$

$$4) \quad -\omega_1 - \omega_2 + \nu_j = 0; \quad j \in \{1, 2\}; \quad A_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & \alpha_2 & -\bar{\beta}_2 & 0 \\ 0 & \bar{\beta}_1 & \alpha_1 & 0 \\ -\beta_2 & 0 & 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}; \quad (3.11)$$

$$5) \quad \omega_2 - \omega_1 + \nu_j \neq 0; \quad j = -2, -1, 1, 2;$$

$$-2\omega_1 + \nu_j \neq 0; \quad -2\omega_2 + \nu_j \neq 0; \quad -\omega_1 - \omega_2 + \nu_j \neq 0; \quad j = 1, 2;$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Ограничиваясь членами первого порядка малости в характеристическом полиноме $\det(A_0 + \varepsilon A_1 + \dots - \lambda E)$, где E — единичная матрица четвертого порядка, в случае (3.8) приходим к характеристическому уравнению

$$\lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0, \quad (3.13)$$

где

$$a_1 = -2\varepsilon(\alpha_1 + \alpha_2) + \dots; \quad a_2 = \varepsilon^2[(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + 2(\alpha_1 \alpha_2 - \operatorname{Re}(\beta_1 \beta_2))] + \dots;$$

$$a_3 = 2\varepsilon^3(\alpha_1 + \alpha_2)(\operatorname{Re}(\beta_1 \beta_2) - \alpha_1 \alpha_2) + \dots; \quad a_4 = \varepsilon^4(\alpha_1^2 \alpha_2^2 + |\beta_1|^2 |\beta_2|^2 - 2\alpha_1 \alpha_2 \operatorname{Re}(\beta_1 \beta_2)) + \dots$$

Положительность старших коэффициентов его определителей Гурвица $\Delta_1, \dots, \Delta_4$ является условием асимптотической устойчивости [8] исследуемого состояния.

В случае (3.9) отрицательность действительных частей корней уравнения (3.13) легко проверяется непосредственно и сводится к единственному условию

$$\alpha_1 + |\gamma| < 0. \quad (3.14)$$

Аналогом неравенства (3.14) в случае (3.10) является условие

$$\alpha_2 + |\delta| < 0. \quad (3.15)$$

Для случая (3.11) коэффициенты характеристического уравнения (3.13) имеют вид

$$a_1 = -2\varepsilon(\alpha_1 + \alpha_2) + \dots; \quad a_2 = \varepsilon^2[(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + 2(\alpha_1\alpha_2 + \operatorname{Re}(\beta_1\beta_2))] + \dots;$$

$$a_3 = -2\varepsilon^3(\alpha_1 + \alpha_2)(\operatorname{Re}(\beta_1\beta_2) + \alpha_1\alpha_2) + \dots; \quad a_4 = \varepsilon^4(\alpha_1^2\alpha_2^2 + |\beta_1|^2|\beta_2|^2 + 2\alpha_1\alpha_2\operatorname{Re}(\beta_1\beta_2)) + \dots$$

И, наконец, в случае (3.12) асимптотическая устойчивость первого нижнего положения двухзвенного маятника в изучаемой гибридной модели сводится к положительности коэффициентов трения k_1 , k_2 , что и предполагается априори.

При $l_1 = l_2 = l$ матрица A в системе (3.3) имеет двукратный корень $\pm i\omega$, которому в нормальной жордановой форме J отвечают простые блоки. Следовательно, все предыдущие соображения по вычислению постоянных матриц A_0 и A_1 будут иметь место и в этом случае, если учесть, что $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. При условии, что частота ω не комбинирует ни с одной из частот ν_j , $j = 1, 2$,

$$A_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \xi_1 & 0 & 0 \\ \xi_2 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \overline{\xi_1} \\ 0 & 0 & \overline{\xi_2} & \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

где

$$\xi_1 = \frac{1}{2u_0k\omega}(\omega \frac{k_2}{m_1l^2} + ia_{21,12}^{(0)}); \quad \xi_2 = \frac{1}{2u_0k\omega}(\omega \frac{k_1}{m_1l^2} + ia_{21,21}^{(0)});$$

$$a_1 = -2\varepsilon(\alpha_1 + \alpha_2) + \dots; \quad a_2 = \varepsilon^2[(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + 2(\alpha_1\alpha_2 - \operatorname{Re}(\xi_1\xi_2))] + \dots;$$

$$a_3 = 2\varepsilon^3(\alpha_1 + \alpha_2)(\operatorname{Re}(\xi_1\xi_2) - \alpha_1\alpha_2) + \dots; \quad a_4 = \varepsilon^4(\alpha_1^2\alpha_2^2 + |\xi_1|^2|\xi_2|^2 - 2\alpha_1\alpha_2\operatorname{Re}(\xi_1\xi_2)) + \dots$$

В случае параметрического резонанса имеем

$$-2\omega + \nu_j = 0, \quad j \in \{1, 2\}; \quad A_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \xi_1 & \gamma & \beta_1 \\ \xi_2 & \alpha_2 & -\overline{\beta_2} & \delta \\ \overline{\gamma} & \overline{\beta_1} & \alpha_1 & \overline{\xi_1} \\ -\beta_2 & \overline{\delta} & \overline{\xi_2} & \alpha_2 \end{bmatrix}; \quad (3.17)$$

$$a_1 = -2\varepsilon(\alpha_1 + \alpha_2) + \dots;$$

$$a_2 = \varepsilon^2[(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - |\gamma|^2 - |\delta|^2 + 2(\alpha_1\alpha_2 + \operatorname{Re}(\beta_1\beta_2) - \operatorname{Re}(\xi_1\xi_2))] + \dots;$$

$$a_3 = 2\varepsilon^3[(\alpha_1 + \alpha_2)(\operatorname{Re}(\xi_1\xi_2) - \operatorname{Re}(\beta_1\beta_2) - \alpha_1\alpha_2) + \alpha_1|\delta|^2 + \alpha_2|\gamma|^2 +$$

$$+ \operatorname{Re}(\xi_1\beta_2\delta) + \operatorname{Re}(\xi_1\overline{\beta_2\gamma}) - \operatorname{Re}(\xi_2\overline{\beta_1\gamma}) - \operatorname{Re}(\xi_2\beta_1\overline{\delta})] + \dots;$$

$$a_4 = \varepsilon^4[\alpha_1^2\alpha_2^2 + |\beta_1|^2|\beta_2|^2 + |\gamma|^2|\delta|^2 + |\xi_1|^2|\xi_2|^2 - \alpha_1^2|\delta|^2 - \alpha_2^2|\gamma|^2 - |\xi_1|^2|\beta_2|^2 - |\xi_2|^2|\beta_1|^2 -$$

$$\begin{aligned}
& -2\alpha_1\alpha_2(\operatorname{Re}(\xi_1\xi_2) - \operatorname{Re}(\beta_1\beta_2)) + 2\alpha_1(\operatorname{Re}(\beta_1\xi_2\bar{\delta}) - \operatorname{Re}(\xi_1\beta_2\delta)) + \\
& + 2\alpha_2(\operatorname{Re}(\bar{\beta}_1\xi_2\gamma) - \operatorname{Re}(\xi_1\bar{\beta}_2\gamma)) - 2\operatorname{Re}(\xi_1\xi_2\bar{\gamma}\delta) + 2\operatorname{Re}(\bar{\beta}_1\beta_2\gamma\delta)] + \dots
\end{aligned}$$

Область асимптотической устойчивости системы (3.3) в случае параметрического резонанса (первого нижнего положения равновесия для случая (3.17) при $j = 1$ в пространстве параметров $(m_1; m_2)$) изображена на рис. 2. При этом $\rho = 1$; $L = 1$; $y_0 = 0,5$; $\mu = 200$; $w_{01} = 0,03$; $w_{02} = -0,003$; $\dot{w}_{01} = \dot{w}_{02} = 0$ (система возбуждается малыми смещениями точек струны от положения равновесия без сообщения им начальной скорости); $t_0 = 0$; $k_1 = k_2 = 0,025$; $\mu_1 = \mu_2 = 1111$.

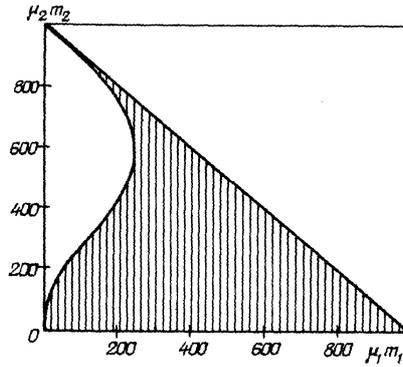


Рис. 2

Изучая влияние высокочастотных колебаний струны на колебания математического маятника в окрестности второго нижнего положения равновесия, переходим к «быстрому» времени $\tau = \nu t$, где $\nu = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$. Это дает возможность исключить из системы (2.5) переменные q_1, q_2 после интегрирования соответствующих линейаризованных уравнений. Вследствие этого в переменных возмущенного движения $\chi_1 = \varphi_1, \chi_2 = \varphi_2 - \pi, \chi_3 = \dot{\varphi}_1, \chi_4 = \dot{\varphi}_2$ получим нелинейную нестационарную систему дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами четвертого порядка. Ее линейное приближение представимо в виде

$$\frac{dx}{d\tau} = (A + \varepsilon(F_0(\tau) + \varepsilon F_1))x, \quad (3.18)$$

где $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4)^T$; $\varepsilon = k/\nu$ – малый параметр;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad F_0(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -Q(\tau) & -C \end{bmatrix}; \quad F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -R_0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} \frac{k_1}{m_1 l_1^2} & \frac{k_2}{m_1 l_1 l_2} \\ \frac{k_1}{m_1 l_1 l_2} & \frac{m k_2}{m_1 m_2 l_2^2} \end{bmatrix}; \quad R_0 = \frac{1}{k^2} \begin{bmatrix} \frac{m g}{m_1 l_1} & -\frac{m_2 g}{m_1 l_1} \\ \frac{m g}{m_1 l_2} & -\frac{m g}{m_1 l_2} \end{bmatrix};$$

$$Q(\tau) = \sum_{\substack{j=-2 \\ (j \neq 0)}}^2 Q_j e^{i\nu_j \tau}; \quad Q_j = \frac{1}{k\nu} \begin{bmatrix} \frac{m}{m_1} p_1^{(j)} & -\frac{m_2}{m_1} p_1^{(j)} \\ \frac{m}{m_1} p_2^{(j)} & -\frac{m}{m_1} p_2^{(j)} \end{bmatrix}; \quad Q_{-j} = \overline{Q_j}, \quad j = 1, 2;$$

$$p_1^{(1)} = \frac{d_{11}}{2\nu_1'}(c_{15} + ic_{25}), \quad p_1^{(2)} = \frac{d_{12}}{2\nu_2'}(c_{16} + ic_{26}), \quad p_2^{(1)} = \frac{d_{21}}{2\nu_1'}(c_{15} + ic_{25}), \quad p_2^{(2)} = \frac{d_{22}}{2\nu_2'}(c_{16} + ic_{26});$$

$$c_{15} = \dot{w}_{01} \sin \frac{v'_1 \tau_0}{v} - v'_1 \left(w_{01} - \frac{\beta_1}{v_1^2} \right) \cos \frac{v'_1 \tau_0}{v}, \quad c_{25} = v'_1 \left(w_{01} - \frac{\beta_1}{v_1^2} \right) \sin \frac{v'_1 \tau_0}{v} + \dot{w}_{01} \cos \frac{v'_1 \tau_0}{v};$$

$$c_{16} = \dot{w}_{02} \sin \frac{v'_2 \tau_0}{v} - v'_2 \left(w_{02} - \frac{\beta_2}{v_2^2} \right) \cos \frac{v'_2 \tau_0}{v}, \quad c_{26} = v'_2 \left(w_{02} - \frac{\beta_2}{v_2^2} \right) \sin \frac{v'_2 \tau_0}{v} + \dot{w}_{02} \cos \frac{v'_2 \tau_0}{v};$$

$$v'_j = \frac{v_j}{v};, \quad v'_{-j} = -v'_j \quad (j=1, 2).$$

Нормальная жорданова форма матрицы A имеет вид $J = \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix}$, где

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Неособенная матрица } S \text{ представляется в виде } S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Об-}$$

щее решение системы дифференциальных уравнений $\frac{dx}{d\tau} = Ax$ принимает вид

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 - C_3 + C_3 \tau \\ C_2 - C_4 + C_4 \tau \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix},$$

откуда заключаем, что

$$B = \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Соответственно, имеем

$$A_0 = B^{-1}AB = A. \quad (3.20)$$

Поскольку

$$B^{-1}F_0(\tau)B = \sum_{\substack{s=-2 \\ (s \neq 0)}}^2 A_s^{(1)} e^{iv'_s \tau} + A_0^{(1)}; \quad A_s^{(1)} = \begin{bmatrix} Q_s & Q_s \\ -Q_s & -Q_s \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

то

$$A_1 = A_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & -C \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

а матрицы $B_s^{(1)}$, $s = -2, -1, 1, 2$, удовлетворяющие линейным уравнениям

$$\begin{bmatrix} iv'_s I & -I \\ 0 & iv'_s I \end{bmatrix} B_s^{(1)} + B_s^{(1)} \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_s & Q_s \\ -Q_s & -Q_s \end{bmatrix},$$

имеют вид

$$B_s^{(1)} = \frac{1}{v'_s} \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{v'_s} - i \right) Q_s & \left(\frac{2}{v'_s} + \left(\frac{2}{v_s'^2} - 1 \right) i \right) Q_s \\ i Q_s & \left(-\frac{1}{v'_s} + i \right) Q_s \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Учитывая соотношения (3.18), (3.19), (3.21), (3.23), матрицу $A_2 = \sum_{\substack{s=-2 \\ (s \neq 0)}}^2 A_s^{(1)} B_{-s}^{(1)} + B^{-1} F_1 B$

получаем в виде

$$A_2 = -2 \sum_{j=1}^2 \frac{1}{v_j^2} \begin{bmatrix} -Q_{jj} & -Q_{jj} \\ Q_{jj} & Q_{jj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_0 & R_0 \\ -R_0 & -R_0 \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

где

$$Q_{11} = \frac{m}{m_1} \cdot \frac{c_{15}^2 + c_{25}^2}{4k^2 v_1^2} \begin{bmatrix} \frac{m}{m_1} d_{11}^2 - \frac{m_2}{m_1} d_{11} d_{21} & -\frac{m_2}{m_1} d_{11}^2 + \frac{m_2}{m_1} d_{11} d_{21} \\ \frac{m}{m_1} d_{11} d_{21} - \frac{m}{m_1} d_{21}^2 & -\frac{m_2}{m_1} d_{11} d_{21} + \frac{m}{m_1} d_{21}^2 \end{bmatrix};$$

$$Q_{22} = \frac{m}{m_1} \cdot \frac{c_{16}^2 + c_{26}^2}{4k^2 v_2^2} \begin{bmatrix} \frac{m}{m_1} d_{12}^2 - \frac{m_2}{m_1} d_{12} d_{22} & -\frac{m_2}{m_1} d_{12}^2 + \frac{m_2}{m_1} d_{12} d_{22} \\ \frac{m}{m_1} d_{12} d_{22} - \frac{m}{m_1} d_{22}^2 & -\frac{m_2}{m_1} d_{12} d_{22} + \frac{m}{m_1} d_{22}^2 \end{bmatrix}.$$

Ограничиваясь членами второго порядка малости в характеристическом полиноме

$$\det(A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots - \lambda E),$$

к условию асимптотической устойчивости рассматриваемого стационарного решения приходим через положительность первых неисчезающих коэффициентов в разложениях по малому параметру соответствующих детерминантов Гурвица.

Область асимптотической устойчивости системы (3.18) (второго нижнего положения равновесия) изображена на рис. 3. При этом $\mu = 22500$; $\tau_0 = 0$; $l_1 = 3,5$; $l_2 = 0,2$; $k_1 = k_2 = 0,001$; $\mu_1 = \mu_2 = 1000$, а значения других параметров соответствуют рис. 2.

Возвращаясь к системе уравнений (2.5), убеждаемся, что в переменных возмущенного движения $\chi_1 = \varphi_1 - \pi$; $\chi_2 = \varphi_2$; $\chi_3 = \dot{\varphi}_1$; $\chi_4 = \dot{\varphi}_2$, соответствующих первому верхнему положению равновесия маятника в исследуемой модели, соответствующая система уравнений возмущенного движения получается из системы уравнений (3.18) для второго нижнего положения формальной заменой параметров l_1, l_2 на $-l_1$ и $-l_2$. Это относится и к условиям асимптотической устойчивости соответствующего невозмущенного решения.

Заменяв в (3.18) l_1 на $-l_1$, таким же образом получим в переменных $\chi_1 = \varphi_1 - \pi$; $\chi_2 = \varphi_2 - \pi$; $\chi_3 = \dot{\varphi}_1$; $\chi_4 = \dot{\varphi}_2$ систему уравнений возмущенного движения для второго верхнего положения равновесия. Соответствующая область асимптотической устойчивости изображена на рис. 4. При этом $l_1 = l_2 = 0,4$, $\mu_1 = 2000$, $\mu_2 = 2857$. Значения других параметров соответствуют рис. 3.

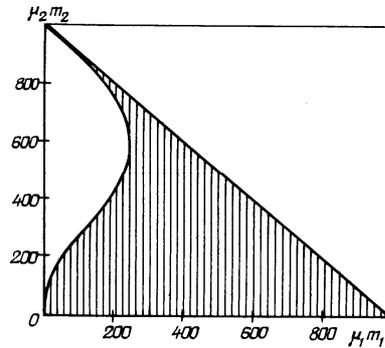


Рис. 3

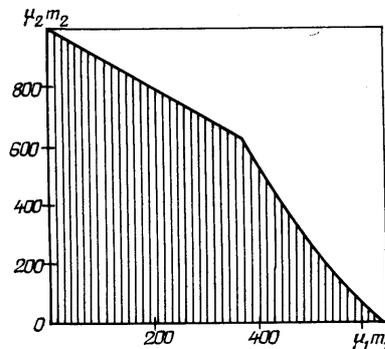


Рис. 4

§4. Заключение.

В данной статье получены уравнения плоского вертикального движения гибридной модели механической системы, состоящей из горизонтальной упругой струны и подвешенного на ней двухзвенного математического маятника. Найдены условия асимптотической устойчивости стационарных движений (положений равновесия) двухзвенного математического маятника, взаимодействующего со струной.

РЕЗЮМЕ. Одержано рівняння плоского вертикального руху гібридної моделі механічної системи, яка складається з горизонтально розміщеної струни і підвішеного в деякій її точці дволанкового математичного маятника. Встановлено умови асимптотичної стійкості стаціонарних рухів дволанкового маятника, що взаємодіє з пружною струною.

1. Груйич Л. Т., Мартынюк А. А., Риббелс-Павелла М. Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях. – К.: Наук. думка, 1984. – 308 с.
2. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. I. – М.: Гостехиздат, 1951. – 476 с.
3. Лила Д.М. Достатні умови стійкості великомасштабних нестационарних механічних систем: автореф. дис. ... канд. наук: спец. 01.02.01 «Теоретична механіка». – К., 2009. – 19 с.
4. Лила Д.М. Достаточные условия устойчивости крупномасштабных нестационарных механических систем: дис. ... кандидата наук: 01.02.01. – К., 2009. – 150 с.
5. Маркеев А.П. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990. – 416 с.
6. Парс Л.А. Аналитическая динамика. – М.: Наука, 1971. – 636 с.
7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГУ; Наука, 2004. – 798 с.
8. Штокало И.З. Критерий устойчивости и неустойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с квази-периодическими коэффициентами // Матем. сб. – 1946. – **19(61)**, № 2. – С. 263 – 286.
9. Штокало И.З. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. – К.: Изд-во АН УССР, 1960. – 78 с.
10. Burov A.A. Planar Motion of an Orbital Pendulum with Periodically Oscillating Point of Suspension // Cosmic Research. – 2007. – **45**, N 2. – P. 167 – 169.
11. Leung A. Y. T., Kuang J. L. On the Chaotic Dynamics of a Spherical Pendulum with a Harmonically Vibrating Suspension // Nonlin. Dynamics. – 2006. – **43**, N 3. – P. 213 – 238.
12. Lila D.M. Stability of Motion of Quasiperiodic Systems in Critical Cases // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 2. – P. 229 – 240.
13. Lila D.M. Stability of Some Solutions of Phase-Matched Generation Equations for Optically Coupled Lasers // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 3. – P. 317 – 318.
14. Lila D.M., Martynyuk A.A. Construction and Applications of the Matrix-Valued Liapunov Functions for Some Quasi-Periodic Systems // Differential Equations and Dynamical Systems. – 2009. – **17**, N 1 – 2. – P. 91 – 104.
15. Lila D.M., Martynyuk A.A. On stability of some solutions for equations of locked lasing of optically coupled lasers with periodic pumping // Nonlinear Oscillations. – 2009. – **12**, N 4. – P. 464 – 473.
16. Lila D.M., Martynyuk A.A. On the theory of stability of matrix differential equations // Ukr. Math. Journ. – 2009. – **61**, N 4. – P. 556 – 565.
17. Lila D.M., Martynyuk A.A. Setting up Lyapunov Functions for the Class of Systems with Quasiperiodic Coefficients // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 12. – P. 1421 – 1429.
18. Lila D.M., Martynyuk A.A. Stability of Periodic Motions of Quasilinear Systems // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 10. – P. 1161 – 1172.
19. Martynyuk A.A. Stability of Motion. The Role of Multicomponent Liapunov Functions. – Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2007. – 322 p.

Поступила 05.10.2009

Утверждена в печать 21.10.2010