

В.Л. Богданов<sup>1</sup>, А.Н. Гузь<sup>2</sup>, В.М. Назаренко<sup>3</sup>

**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ МАТЕРИАЛА  
С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ СООСНЫХ КРУГОВЫХ ТРЕЩИН  
РАДИАЛЬНОГО СДВИГА ПРИ ДЕЙСТВИИ НАПРАВЛЕННЫХ  
ВДОЛЬ НИХ УСИЛИЙ**

<sup>1-3</sup>*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина;  
e-mail: <sup>1</sup>bogdanov@nas.gov.ua, <sup>2</sup>guz@carier.kiev.ua; <sup>3</sup>desc@inmech.kiev.ua;*

**Abstract.** With using the approaches of linearized solid mechanics, the axisymmetric problem on interaction of periodic system of coaxial disc-shaped cracks of radial shear in the infinite pre-stressed material is solved. Two non-classical mechanisms of fracture are considered: fracture of body with initial stresses acting parallel to the crack plane and fracture under compression along the cracks. For high-elastic materials with different types of elastic potentials, the numerical values are obtained for fracture parameters and their dependence on loading conditions, physical-mechanical characteristics of materials, and geometrical parameters of the problem is studied.

**Key words:** fracture, initial stresses, stress intensity factor, circular crack, high-elastic material.

**Введение.**

К актуальным и важным для практики проблемам механики разрушения, исследование которых невозможно осуществить в рамках классических подходов, относятся проблемы механики разрушения материалов с начальными (или остаточными) напряжениями и разрушения тел в условиях сжатия вдоль трещин. Детальный анализ результатов, полученных в последние годы при исследовании указанных проблем, выполнен в работах [6 – 8, 10, 11, 13 – 20, 23]. В частности, в [11] с использованием подходов, предложенных в [2 – 5, 12, 13] в рамках линеаризованной теории упругости, рассмотрена пространственная осесимметричная задача о разрушении предварительно напряженного неограниченного упругого тела с периодической системой параллельных соосных круговых трещин нормального отрыва.

В данной статье, в развитие работы [11], исследована пространственная задача о напряженно-деформированном состоянии упругого тела с начальными напряжениями, содержащего периодическую систему соосных дискообразных трещин радиального сдвига. Получены представления коэффициентов интенсивности напряжений в окрестностях контуров трещин. Для некоторых типов высокоэластических материалов численно исследовано влияние начальных напряжений и взаимодействия трещин на значения коэффициентов интенсивности напряжений.

Кроме того, с использованием указанного в [11] объединенного подхода к исследованию задач о разрушении материала с начальными напряжениями, направленными параллельно плоскостям трещин, и о сжатии тел вдоль расположенных в них трещин в работе определены критические параметры нагружения, соответствующие анти-

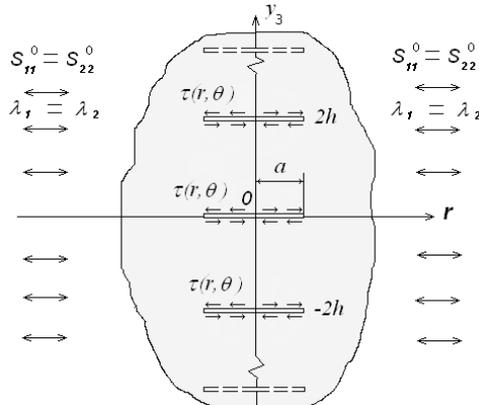


Рис. 1

симметричным (изгибным) формам локальной потери устойчивости материала при сжатии вдоль периодической системы параллельных соосных трещин (в [11] были получены критические параметры сжатия, соответствующие симметричной форме локальной потери устойчивости материала возле трещин). Указанные критические параметры сжатия вычислены как значения начальных сжимающих напряжений, при которых происходит резкое «резонансоподобное» изменение значений коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности периодической системы соосных трещин

радиального сдвига.

### §1. Постановка задачи.

Используем декартовые координаты начального состояния  $y_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ), которые связаны с координатами естественного (недеформированного) состояния  $x_j$  соотношениями

$$y_j = \lambda_j x_j; \quad j = \overline{1, 3}, \quad (1.1)$$

где  $\lambda_j$  – коэффициенты удлинений (или укорочений) вдоль координатных осей, вызываемых начальными растягивающими (или сжимающими) напряжениями  $S_{ij}^0$  (здесь  $S_{ij}^0$  – компоненты симметричного тензора напряжений, отнесенные к единице площади тела в недеформированном (естественном) состоянии).

Дискообразные трещины одинакового радиуса  $a$  расположены в параллельных плоскостях  $y_3 = \text{const} : \{r < a, 0 \leq \theta < 2\pi, y_3 = 2hn; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ , где  $(r, \theta, y_3)$  – круговые цилиндрические координаты, получаемые из декартовых координат  $y_j$  (рис. 1).

Предполагается, что нормальные начальные напряжения направлены строго вдоль плоскостей расположения трещин, а их компоненты связаны соотношениями

$$S_{33}^0 = 0; S_{11}^0 = S_{22}^0 = \text{const} \neq 0; \lambda = \text{const}; \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3. \quad (1.2)$$

В этом случае в теле реализуется однородное начальное напряженно-деформированное состояние, при котором компоненты вектора перемещений, вызываемых начальными напряжениями, определяются такими соотношениями:

$$u_j^0 = \lambda_j^{-1} (\lambda_j - 1) y_j = (\lambda_j - 1) x_j; \quad j = \overline{1, 3}. \quad (1.3)$$

В последующем также используем такие обозначения:  $Q'_{ij}$  – компоненты несимметричного тензора напряжений, отнесенные к единице площади тела в начальном состоянии;  $u_j$  – компоненты соответствующего им вектора перемещений.

На берегах трещин действуют антисимметричные относительно плоскостей расположения трещин радиальные сдвиговые нагрузки (рассматривается осесимметричная задача)

$$Q'_{33} = 0; \quad Q'_{3r} = -\tau(r) \quad (y_3 = (2hn)_{\pm}; r < a), \quad (1.4)$$

где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , а нижними индексами «+» и «-» обозначены соответствующие берега трещин.

Предполагается, что возмущения напряженно-деформированного состояния тела, вызванные дополнительными нагрузками  $\tau(r)$ , значительно меньше таковых для начального состояния, обусловленного начальными напряжениями  $S_{ij}^0$ , что позволяет применять для исследования задачи линейаризованные соотношения [4, 5, 12].

Учитывая, что геометрическая и силовая схемы задачи являются антисимметричными относительно плоскости  $y_3 = 0$ , а также периодичность компонент тензора напряжений и вектора перемещений (с периодом  $2h$ ) по переменной  $y_3$ , сводим исходную задачу для тела с периодической системой соосных трещин к задаче для слоя  $0 \leq y_3 \leq h$  со следующими условиями на его границах:

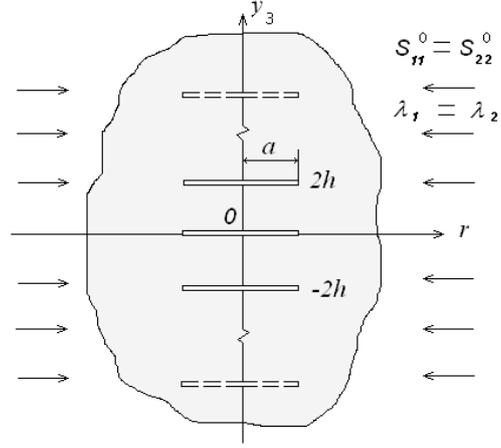


Рис. 2

$$u_r = 0 \quad (y_3 = 0, r > a);$$

$$Q'_{3r} = -\tau(r) \quad (y_3 = 0, r < a);$$

$$Q'_{33} = 0 \quad (y_3 = 0, 0 \leq r < \infty); \quad (1.5)$$

$$u_r = 0, Q'_{33} = 0 \quad (y_3 = h, 0 \leq r < \infty).$$

Отметим, что для постановки задачи о сжатии тела вдоль периодической системы параллельных соосных трещин (рис. 2) в граничных условиях (1.5) второе соотношение следует заменить таким:

$$Q'_{3r} = 0 \quad (y_3 = 0, r < a). \quad (1.6)$$

Решения задачи (1.5) на основе условий симметрии распространяются на слой  $|y_3| \leq h$ , а на основании условий периодичности строится решение для всего пространства.

В [4, 5] для случая однородного начального состояния (1.3) построены представления общих решений линейаризованных уравнений равновесия через гармонические потенциальные функции; при этом вид этих представлений зависит от соотношения корней характеристического уравнения. Так, в случае *неравных корней* ( $n_1 \neq n_2$ ) характеристического уравнения указанные представления в круговой цилиндрической системе координат имеют вид

$$u_r = \frac{\partial}{\partial r}(\varphi_1 + \varphi_2); \quad u_3 = \frac{m_1}{\sqrt{n_1}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + \frac{m_2}{\sqrt{n_2}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2};$$

$$Q'_{33} = C_{44} \left( d_1 l_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_1^2} + d_2 l_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z_2^2} \right); \quad Q'_{3r} = C_{44} \left( \frac{d_1}{\sqrt{n_1}} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial z_1} + \frac{d_2}{\sqrt{n_2}} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial z_2} \right), \quad (1.7)$$

где  $d_i \equiv 1 + m_i$ ;  $z_i \equiv n_i^{-\frac{1}{2}} y_3$  ( $i = 1, 2$ ), а  $\varphi_j, j = \overline{1, 3}$ , – гармонические функции, удовлетворяющие уравнениям Лапласа

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} \right) \varphi_j(r, z_i) = 0, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Величины  $C_{44}, n_i, m_i, l_i$  ( $i = 1, 2$ ) определяются выбором модели материала и зависят от величин начальных напряжений [4, 5].

Для случая *равных корней* ( $n_1 = n_2$ ) характеристического уравнения имеем следующие представления:

$$u_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} - z_1 \frac{\partial F}{\partial r}; \quad u_3 = \frac{m_1 - m_2 + 1}{\sqrt{n_1}} F - \frac{m_1}{\sqrt{n_1}} \Phi - \frac{m_1}{\sqrt{n_1}} z_1 \frac{\partial F}{\partial z_1};$$

$$Q'_{33} = C_{44} \left[ (d_1 l_1 - d_2 l_2) \frac{\partial F}{\partial z_1} - d_1 l_1 \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} - d_1 l_1 z_1 \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} \right]; \quad (1.8)$$

$$Q'_{3r} = C_{44} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n_1}} \frac{\partial}{\partial r} [(d_1 - d_2) F - d_1 \Phi] - \frac{d_1}{\sqrt{n_1}} z_1 \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z_1} \right\}; \quad \Phi \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial z_1},$$

где  $\varphi, F, \Phi$  – гармонические функции.

Подставив представления общих решений (1.7), (1.8) в условия (1.5), получим граничные условия для гармонических в слое ( $0 \leq y_3 \leq h$ ) потенциальных функций на гранях указанного слоя.

## §2. Получение разрешающих интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Далее сведем задачу к системе парных интегральных уравнений и затем к разрешающему интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Выразим гармонические потенциальные функции, фигурирующие в (1.7), (1.8), в виде интегральных разложений Ханкеля по координате  $r$ :

для *неравных корней* ( $n_1 \neq n_2$ )

$$\varphi_1(r, z_1) = \int_0^\infty [A_1(\lambda) ch\lambda(h_1 - z_1) + A_2(\lambda) sh\lambda(h_1 - z_1)] J_0(\lambda r) \frac{\partial \lambda}{\lambda sh\lambda h_1};$$

$$\varphi_2(r, z_2) = \int_0^\infty [B_1(\lambda) ch\lambda(h_2 - z_2) + B_2(\lambda) sh\lambda(h_2 - z_2)] J_0(\lambda r) \frac{\partial \lambda}{\lambda sh\lambda h_2}; \quad (2.1)$$

для *равных корней* ( $n_1 = n_2$ )

$$\varphi(r, z_1) = -\int_0^\infty [B_1(\lambda) sh\lambda(h_1 - z_1) + B_2(\lambda) ch\lambda(h_1 - z_1)] J_0(\lambda r) \frac{\partial \lambda}{\lambda sh\lambda h_1};$$

$$F(r, z_1) = \int_0^\infty [A_1(\lambda) ch\lambda(h_1 - z_1) + A_2(\lambda) sh\lambda(h_1 - z_1)] J_0(\lambda r) \frac{\partial \lambda}{sh\lambda h_1}; \quad (2.2)$$

$$\Phi(r, z_1) = \int_0^{\infty} [B_1(\lambda) ch\lambda(h_1 - z_1) + B_2(\lambda) sh\lambda(h_1 - z_1)] J_0(\lambda r) \frac{\partial \lambda}{sh\lambda h_1},$$

где  $h_i = n_i^{-1/2} h$ ,  $i = 1, 2$ .

Удовлетворяя тем граничным условиям, которые заданы на всей области  $y_3 = \text{const}$  (последние три соотношения в (1.5)), получаем такие соотношения между неизвестными функциями, фигурирующими в (2.1), (2.2):

для *неравных корней* ( $n_1 \neq n_2$ )

$$A_1(\lambda) = 0, \quad B_1(\lambda) = 0, \quad B_2(\lambda) = -\frac{d_1 l_1}{d_2 l_2} A_2(\lambda); \quad (2.3)$$

для *равных корней* ( $n_1 = n_2$ )

$$A_2(\lambda) = 0; \quad B_1(\lambda) = \left[ \left( 1 - \frac{d_2 l_2}{d_1 l_1} \right) - \mu_1 cth\mu_1 \right] A_1(\lambda); \quad B_2(\lambda) = \mu_1 A_1(\lambda). \quad (2.4)$$

Оставшиеся граничные условия приводят к системе парных интегральных уравнений

$$\int_0^{\infty} \lambda [1 - g(\lambda)] A(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda = T(r); \quad r < a; \quad (2.5)$$

$$\int_0^{\infty} A(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda = 0; \quad r > a,$$

где для *неравных корней*

$$A(\lambda) \equiv A_2(\lambda); \quad g(\lambda) = \frac{1}{k} \left( k_2 \frac{e^{-\mu_1}}{sh\mu_1} - k_1 \frac{e^{-\mu_2}}{sh\mu_2} \right); \quad \mu_i \equiv \lambda h_i, \quad i = 1, 2;$$

$$k_1 = \frac{l_1}{\sqrt{n_2}}; \quad k_2 = \frac{l_2}{\sqrt{n_1}}; \quad k = k_1 - k_2; \quad T(r) = \frac{\sqrt{n_1}}{C_{44} d_1} \frac{k_2}{k} \tau(r); \quad (2.6)$$

для *равных корней*

$$A(\lambda) \equiv A_1(\lambda); \quad g(\lambda) = -\frac{e^{-\mu_1}}{sh\mu_1} + \frac{1}{k} \frac{\mu_1}{sh^2 \mu_1}; \quad k = \frac{d_2 (l_1 - l_2)}{d_1 l_1}; \quad T(r) = -\frac{\sqrt{n_1}}{C_{44} d_1} \frac{1}{k} \tau(r). \quad (2.7)$$

Запись системы парных интегральных уравнений в единой форме позволяет в дальнейшем проводить решение одновременно для случаев неравных и равных корней характеристического уравнения. Решение системы уравнений (2.5), следуя [9], выбираем в виде, который позволяет тождественно удовлетворить второму уравнению в (2.5), а именно:

$$A(\lambda) = \left( \frac{\pi \lambda}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^a t^{\frac{1}{2}} \omega(t) J_{\frac{3}{2}}(\lambda t) dt = -\lambda^{-1} \left\{ \omega(a) \sin \lambda a - \int_0^a t^{-1} \sin(\lambda t) \frac{d}{dt} [t \omega(t)] d\lambda \right\}, \quad (2.8)$$

где  $\omega(t)$  – неизвестная функция, непрерывная вместе со своей первой производной на интервале  $[0, a]$ .

Подставив представление (2.8) в первое уравнение (2.5), получим соотношение

$$\int_0^r t^2 \omega(t) \frac{dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \left[ \int_0^a t^{\frac{1}{2}} \omega(t) J_{\frac{3}{2}}(\lambda t) dt \right] r^2 g(\lambda) \lambda^{\frac{1}{2}} J_2(\lambda r) d\lambda + \int_0^r \rho^2 \Gamma(\rho) d\rho. \quad (2.9)$$

Сделав замену переменных  $t = r \sin \theta$ , после ряда преобразований, аналогичных тем, которые были сделаны в [11], из (2.9) получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\tilde{\omega}(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^a \tilde{\omega}(t) \tilde{K}(x, t) dt = \frac{2}{\pi} x \int_0^{\pi/2} \tilde{q}'(x \sin \theta) d\theta; \quad 0 \leq x \leq a; \quad (2.10)$$

где

$$\tilde{\omega}(x) \equiv \frac{d}{dx} [x\omega(x)]; \quad \tilde{q}(r) \equiv r\Gamma(r). \quad (2.11)$$

Ядра в (2.10) имеют вид:  
для *неравных корней*

$$\begin{aligned} \tilde{K}(x, t) &\equiv xt^{-1} [\tilde{R}_1(x-t) - \tilde{R}_1(x+t)] - xa^{-1} [\tilde{R}_1(x-a) - \tilde{R}_1(x+a)]; \\ \tilde{R}_1(z) &\equiv \frac{1}{k} \left[ \frac{k_1}{h_2} \operatorname{Re} \psi \left( 1 + \frac{iz}{2h_2} \right) - \frac{k_2}{h_1} \operatorname{Re} \psi \left( 1 + \frac{iz}{2h_1} \right) \right]; \end{aligned} \quad (2.12)$$

для *равных корней*

$$\begin{aligned} \tilde{K}(x, t) &\equiv xt^{-1} [\tilde{R}_2(x-t) - \tilde{R}_2(x+t)] - xa^{-1} [\tilde{R}_2(x-a) - \tilde{R}_2(x+a)]; \\ \tilde{R}_2(z) &\equiv \frac{1}{kh_1} \left[ (k-1) \operatorname{Re} \psi \left( 1 + \frac{iz}{2h_1} \right) + \frac{z}{2h_1} \operatorname{Im} \psi_1 \left( 1 + \frac{iz}{2h_1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

В (2.12), (2.13)  $\operatorname{Re} \psi \left( 1 + \frac{iz}{2h} \right)$ ,  $\operatorname{Im} \psi_1 \left( 1 + \frac{iz}{2h} \right)$  – соответственно, действительная часть от пси-функции  $\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z)$ , где  $\Gamma(z)$  – гамма-функция, и мнимая часть от ее производной  $\psi_1(z) = \frac{d}{dz} \psi(z)$ .

Вводя безразмерные переменные и функции

$$\xi \equiv a^{-1}x; \quad \eta \equiv a^{-1}t; \quad f(\xi) \equiv a^{-1} \frac{d}{d\xi} [\xi \omega(a\xi)]; \quad q(\xi) \equiv \tilde{q}(a\xi), \quad (2.14)$$

приводим интегральное уравнение Фредгольма второго рода (2.10) к безразмерному виду

$$f(\xi) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 f(\eta) K(\xi, \eta) d\eta = \frac{2}{\pi} \xi \int_0^{\pi/2} q'(\xi \sin \theta) d\theta; \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (2.15)$$

где ядро имеет вид:

для *неравных корней*

$$K(\xi, \eta) = \xi \eta^{-1} [R_1(\xi - \eta) - R_1(\xi + \eta)] - \xi [R_1(\xi - 1) - R_1(\xi + 1)]; \quad (2.16)$$

где

$$R_1(z) \equiv \frac{1}{k} \left[ \frac{k_1}{\beta_2} \operatorname{Re} \psi \left( 1 + \frac{iz}{2\beta_2} \right) - \frac{k_2}{\beta_1} \operatorname{Re} \psi \left( 1 + \frac{iz}{2\beta_1} \right) \right]; \quad \beta_1 = a^{-1}h_1, \beta_2 = a^{-1}h_2;$$

для равных корней

$$K(\xi, \eta) = \xi \eta^{-1} [R_2(\xi - \eta) - R_2(\xi + \eta)] - \xi [R_2(\xi - 1) - R_2(\xi + 1)], \quad (2.17)$$

где

$$R_2(z) \equiv \frac{1}{k\beta_1} \left[ (k-1) \operatorname{Re} \psi \left( 1 + \frac{iz}{2\beta_1} \right) + \frac{z}{2\beta_1} \operatorname{Im} \psi_1 \left( 1 + \frac{iz}{2\beta_1} \right) \right]; \quad \beta_1 = a^{-1}h_1.$$

### §3. Коэффициенты интенсивности напряжений.

Аналогично тому, как принято в классической механике разрушения материалов без начальных напряжений [22], определяем коэффициенты интенсивности напряжений как коэффициенты при сингулярностях в распределении соответствующих компонент тензора напряжений в окрестностях контуров трещин:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow +a} [2\pi(r-a)]^{1/2} Q'_{33}(r, 0), \quad K_{II} = \lim_{r \rightarrow +a} [2\pi(r-a)]^{1/2} Q'_{3r}(r, 0). \quad (3.1)$$

Из решения уравнения (2.15) с учетом (2.14), (2.11), (2.1), (2.2), (1.7), (1.8) можно определить распределение напряжений и перемещений в материале. Рассмотрим значения компонент тензора напряжения в плоскости расположения трещины  $y_3 = 0$  в области вне трещины  $r > a$ . Для случая *неравных корней* ( $n_1 \neq n_2$ ) из (1.7) с учетом (2.1), (2.8), применяя интегрирование по частям, получаем

$$Q'_{33}(r, 0) = 0, \quad Q'_{3r}(r, 0) = C_{44} d_1 n_1^{-\frac{1}{2}} \frac{k}{k_2} \frac{a\omega(a)}{r\sqrt{r^2 - a^2}} + O(1), \quad (3.2)$$

где символом  $O(1)$  обозначены слагаемые, которые не имеют особенностей при  $r \rightarrow +a$ .

Тогда из (3.1) получаем такие выражения для коэффициентов интенсивности напряжений в окрестностях контуров трещин:

$$K_I = 0; \quad K_{II} = C_{44} d_1 n_1^{-\frac{1}{2}} \frac{k}{k_2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \omega(a), \quad (3.3)$$

где  $\omega(a)$  определяются из решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода (2.10).

Аналогично, для случая *равных корней* ( $n_1 = n_2$ ) выражения для коэффициентов интенсивности напряжений получаем в виде

$$K_I = 0; \quad K_{II} = -C_{44} d_1 n_1^{-\frac{1}{2}} k \sqrt{\frac{\pi}{a}} \omega(a). \quad (3.4)$$

Переходя в (3.3), (3.4) к безразмерным переменным и функциям, получаем формулы:

для *неравных корней*

$$(n_1 \neq n_2): \quad K_I = 0; \quad K_{II} = C_{44} d_1 n_1^{-\frac{1}{2}} \frac{k}{k_2} \sqrt{\pi a} \int_0^1 f(\eta) d\eta; \quad (3.5)$$

для *равных корней*

$$(n_1 = n_2): K_I = 0; K_{II} = -C_{44}d_1n_1^{-2}k\sqrt{\pi a} \int_0^1 f(\eta) d\eta, \quad (3.6)$$

где  $f(\eta)$  определяются из решения интегрального уравнения Фредгольма (2.15).

Как видим, коэффициент интенсивности напряжений  $K_{II}$  зависит как от величин начальных напряжений (поскольку параметры  $C_{44}, d_1, l_1, k$ , а также функция  $f$  зависят от коэффициентов начального удлинения (укорочения) вдоль координатных осей  $\lambda_j, j = \overline{1,3}$ ), так и от геометрических параметров задачи (радиуса трещин и расстояния между ними).

Рассмотрим предельный случай расположения трещин, когда расстояние между ними стремится к бесконечности. Из выражений для ядер интегральных уравнений (2.16), (2.17) следует, что при  $\beta \equiv ha^{-1} \rightarrow \infty$  ядра в пределе обращаются в нуль

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} K(\xi, \eta) = 0.$$

Тогда из уравнений (2.15), используя замену переменных  $\eta = \xi \sin \theta$ , получаем граничное значение функции  $f$

$$f^\infty(\xi) \equiv \lim_{\beta \rightarrow \infty} f(\xi) = \frac{2}{\pi} \xi \int_0^{\pi/2} q'(\xi \sin \theta) d\theta. \quad (3.7)$$

Поскольку  $\xi \int_0^{\pi/2} q'(\xi \sin \theta) d\theta = \frac{d}{d\xi} \int_0^\xi \frac{\eta q(\eta)}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}} d\eta$ , из (3.7) имеем

$$f^\infty(\xi) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{d\xi} \int_0^\xi \frac{\eta q(\eta)}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}} d\eta, \quad (3.8)$$

откуда следует, что

$$\int_0^1 f^\infty(\eta) d\eta = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\eta q(\eta)}{\sqrt{1 - \eta^2}} d\eta. \quad (3.9)$$

Подставляя выражение (3.9) в (3.5), (3.6), получаем следующие значения коэффициентов интенсивности напряжений для предельного случая расположения трещин при  $\beta \rightarrow \infty$  ( $h \rightarrow \infty$ ) для *неравных* и *равных* корней характеристического уравнения:

$$K_I^\infty = 0; K_{II}^\infty = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^1 \frac{\eta^2 q(\eta)}{\sqrt{1 - \eta^2}} d\eta = \frac{2}{a\sqrt{\pi a}} \int_0^a \frac{t^2 \tau(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt. \quad (3.10)$$

Из (3.10) видим, что в указанном предельном случае расположения трещин коэффициенты интенсивности напряжений не зависят от начальных напряжений, а их значения полностью совпадают (с точностью до обозначений) со значениями коэффициентов интенсивности напряжений, полученными в задаче об изолированной трещине радиального сдвига в бесконечном материале с начальными напряжениями [4, 5] и в задаче о трещине радиального сдвига в бесконечном теле в рамках классической механики разрушения материалов без начальных напряжений [22].

В частности, когда на берегах трещин задано равномерное сдвиговое нагружение вида

$$\tau(r) = \tau_0 = \text{const}, \quad (3.11)$$

из (3.10) получаем равенства

$$K_I^\infty = 0, \quad K_{II}^\infty = \frac{\tau}{2} \sqrt{\pi a}. \quad (3.12)$$

#### §4. Результаты численного исследования.

Для численного исследования интегрального уравнения Фредгольма второго рода (2.15) и определения значений коэффициентов интенсивности напряжений (3.5), (3.6) использован метод Бубнова – Галеркина с выбором в качестве системы координатных функций системы степенных функций. Численное интегрирование осуществлялось по квадратурным формулам Гаусса. Ниже приведены численные значения для высокоэластических сжимаемых и несжимаемых материалов с разными типами упругих потенциалов, когда к берегам трещин приложена равномерная сдвиговая нагрузка вида (3.11).

**4.1. Потенциал Трелоара [24]** (случай неравных корней, несжимаемое тело). Для указанного потенциала параметры, входящие в (1.7), имеют значения:

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= \lambda_1^{-2}; \quad n_1 = \lambda_1^{-6}; \quad n_2 = 1; \quad m_1 = \lambda_1^{-6}; \quad m_2 = 1; \quad l_1 = \frac{2\lambda_1^6}{1+\lambda_1^6}; \quad l_2 = \frac{1}{2}(1+\lambda_1^6); \\ d_1 &= 1+\lambda_1^{-6}; \quad d_2 = 2; \quad k_1 = \frac{2\lambda_1^6}{1+\lambda_1^6}; \quad k_2 = \frac{1}{2}\lambda_1^3(1+\lambda_1^6); \\ C_{44} &= 2C_{10}\lambda_1^{-4}; \quad S_{11}^0 = 2c_{10}\lambda_1^{-2}(\lambda_1^2 - \lambda_3^2). \end{aligned} \quad (4.1)$$

На рис. 3 показана зависимость отношения коэффициентов интенсивности напряжений  $K_{II}/K_{II}^\infty$  ( $K_{II}^\infty$  – коэффициент интенсивности напряжений для изолированной трещины радиального сдвига в бесконечном материале, определяемый из (3.12)) от значений параметра начального укорочения (удлинения)  $\lambda_1$ , обусловленного действием начальных напряжений сжатия-растяжения  $S_{11}^0$  ( $\lambda_1 < 1$  – начальное сжатие;  $\lambda_1 > 1$  – начальное растяжение;  $\lambda_1 = 1$  – начальные напряжения отсутствуют), для различных значений безразмерного полурасстояния между трещинами  $\beta = ha^{-1}$ . Как видим, начальные напряжения оказывают существенное влияние на коэффициенты интенсивности напряжений.

На рис. 4 для этого же материала проиллюстрирована зависимость  $K_{II}/K_{II}^\infty$  от безразмерного полурасстояния между трещинами  $\beta$  для разных значений параметра

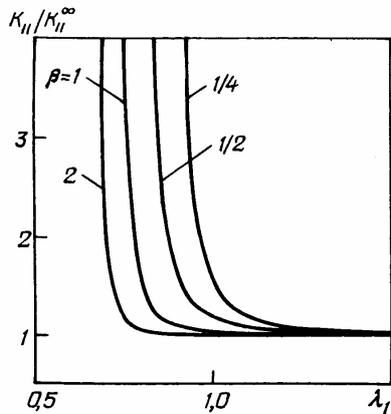


Рис. 3

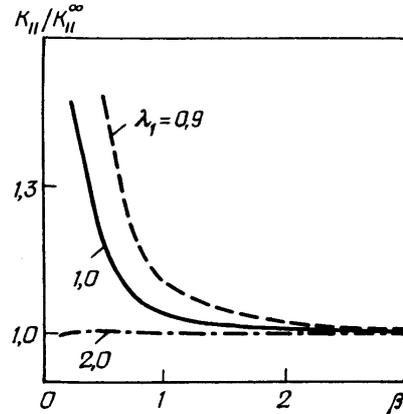


Рис. 4

$\lambda_1$ . Видим, что взаимовлияние трещин радиального сдвига приводит к увеличению значения коэффициента интенсивности напряжений  $K_{II}$  по сравнению со случаем изолированной трещины в неограниченном теле. При увеличении расстояния между трещинами значения  $K_{II}$  уменьшаются и стремятся к значениям коэффициента интенсивности напряжений  $K_{II}^\infty$ . При этом, при значениях  $\beta > 3$  взаимным влиянием трещин для практических расчетов можно пренебрегать, поскольку в этом случае отличие значений коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности трещин для случая периодической системы трещин отличается от значений КИН для одной трещины в бесконечном теле менее, чем на 3%.

Следует отметить, что приведенные на рис. 3 кривые зависимостей  $K_{II}/K_{II}^\infty$  от параметра  $\lambda_1$  имеют вертикальные асимптоты, соответствующие резкому «резонансоподобному» изменению коэффициентов интенсивности напряжений при стремлении начальных сжимающих усилий к значениям, при которых происходит локальная потеря устойчивости материала в окрестности трещин (по антисимметричной (или изгибной) форме) в условиях сжатия тела вдоль периодической системы параллельных соосных трещин.

Это явление, в соответствии с подходом, изложенным в [11], позволяет определять критические параметры сжатия в задаче о сжатии материала вдоль периодической системы соосных параллельных трещин. Из результатов рис. 5 видим, что полученные таким образом критические значения параметров начального укорочения зависят от расстояния между трещинами, но для всех значений  $\beta$  эти значения  $\lambda_1$  выше, чем значения, полученные в [11] в задаче о трещинах нормального отрыва (они приведены пунктирной линией).

Таким образом, в случае материала с потенциалом Трелоара локальная потеря устойчивости при сжатии тела вдоль периодической системы соосных трещин происходит по изгибной форме.

**4.2. Потенциал Бартенева – Хазановича [1]** (случай равных корней, несжимаемое тело). Параметры, входящие в (1.8), для этого материала определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= \lambda_1^{-2}; \quad n_1 = n_2 = \lambda_1^{-3}; \quad m_1 = \lambda_1^{-3}; \quad m_2 = 1; \quad l_1 = \lambda_1^3; \\ l_2 &= \frac{1}{2}(1 - \lambda_1^3); \quad d_1 = \lambda_1^{-3} + 1; \\ d_2 &= 2; \quad k = \frac{3\lambda_1^3 - 1}{\lambda_1^3 + 1}; \quad C_{44} = 2\mu\lambda_1^{-1}(1 + \lambda_1^3)^{-1}; \quad S_{11}^0 = 2\mu\lambda_1^{-1}(1 - \lambda_1^{-3}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

На рис. 6 показан зависимость отношения коэффициентов интенсивности напря-

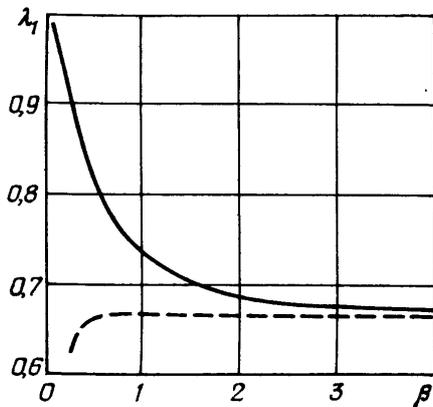


Рис. 5

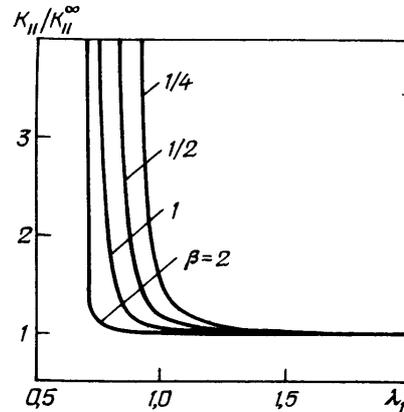


Рис. 6

жений  $K_{II}/K_{II}^{\infty}$  от параметра начальных напряжений  $\lambda_1$  для разных значений относительного полурасстояния между трещинами  $\beta$ .

Из данных рис. 6 следует, что приведенные кривые имеют вертикальные асимптоты, соответствующие значениям начальных сжимающих усилий, при которых происходит локальная потеря устойчивости материала в окрестности трещин (по изгибной форме) при сжатии материала вдоль периодической системы трещин. В табл. 1 приведены полученные таким образом значения критических параметров сжатия для разных значений относительного полурасстояния между трещинами  $\beta$ ; видно, что на всем диапазоне изменения  $\beta$  критические значения параметра  $\lambda_1$ , соответствующие изгибной форме потери устойчивости, превышают значение  $\lambda_1 = 0,6934$ , при котором происходит потеря устойчивости материала по симметричной форме [11]. Таким образом, в случае материала с потенциалом Бартенева – Хазановича локальная потеря устойчивости при сжатии материала вдоль трещин происходит по изгибной форме. Также видим, что при малых расстояниях между трещинами их взаимовлияние приводит к существенному уменьшению критических параметров сжатия.

Таблица 1

$\beta$	0,0625	0,125	0,25	0,5	1,0	2,0	4,0	10,0
$\lambda_1$	0,9885	0,9618	0,9015	0,8150	0,7372	0,7000	0,6938	0,6935

**4.3. Потенциал гармонического типа** [21] (случай равных корней, сжимаемый материал). Параметры, входящие в выражения (1.8), для указанного потенциала определяются следующим образом:

$$\lambda_3 = 1 - 2\nu(1-\nu)^{-1}; \quad n_1 = n_2 = \frac{\lambda_3^2}{\lambda_1^2}; \quad m_1 = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}; \quad m_2 = \frac{\nu\lambda_1 + (3\nu-1)\lambda_3}{\nu\lambda_1 + (1-\nu)\lambda_3};$$

$$l_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_3}; \quad l_2 = \frac{1+\nu + (\nu-2)\lambda_1}{2\nu\lambda_3}; \quad d_1 = 1 + \frac{\lambda_3}{\lambda_1}; \quad d_2 = \frac{2\nu(\lambda_1 + \lambda_3)}{\nu\lambda_1 + (1-\nu)\lambda_3}; \quad k = \frac{\nu(4-\nu)\lambda_1 - 1}{\nu\lambda_1 + (1-\nu)\lambda_3};$$

$$C_{44} = \frac{2\mu\lambda_3}{\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_3)}; \quad S_{11}^0 = 2 \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1}. \quad (4.3)$$

Результаты вычисления относительных коэффициентов интенсивности напряжений  $K_{II}/K_{II}^{\infty}$  для этого материала приведены на рис. 7 – 9.

Из анализа результатов рис. 7, 8 следует, что начальные напряжения, особенно сжимающие, оказывают заметное влияние на значения коэффициентов интенсивности напряжений.

Влияние сжимаемости предварительно напряженного материала с потенциалом гармонического типа на коэффициенты интенсивности напряжений иллюстрирует рис. 9, на котором приведена зависимость соотношений  $K_{II}/K_{II}^{\infty}$  от параметра  $\lambda_1$  (при  $\beta = 0,5$ ) для различных значений коэффициента Пуассона  $\nu$ .

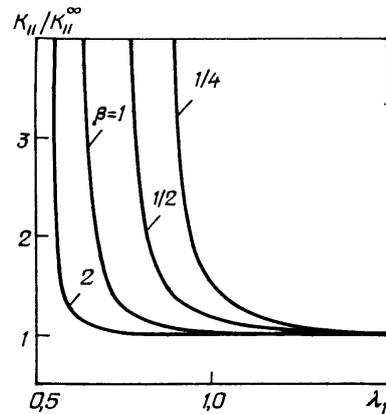


Рис. 7

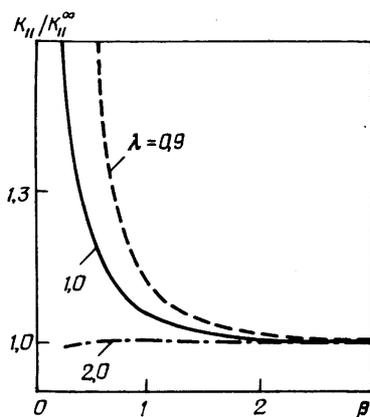


Рис. 8

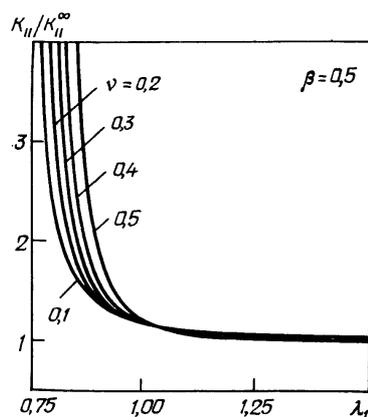


Рис. 9

В табл. 2 приведены значения критических параметров укорочения  $\lambda_1 < 1$ , соответствующих изгибной форме потери устойчивости материала с потенциалом гармонического типа при сжатии вдоль периодической системы параллельных соосных трещин для разных значений безразмерного полурасстояния между трещинами  $\beta$  и коэффициента Пуассона  $\nu$ .

Таблица 2

$\nu$	$\beta$								
	0,0625	0,125	0,25	0,50	0,75	1,00	2,00	5,00	10,00
0,1	0,9841	0,9471	0,8623	0,7369	0,6620	0,6158	0,5435	0,5244	0,5238
0,2	0,9855	0,9519	0,8753	0,7601	0,6893	0,6438	0,5688	0,5462	0,5455
0,3	0,9867	0,9561	0,887	0,7818	0,7151	0,6709	0,5933	0,5663	0,5653
0,4	0,9877	0,9599	0,8980	0,8026	0,7403	0,6977	0,6178	0,5849	0,5834
0,5	0,9886	0,9635	0,9084	0,8231	0,7657	0,7251	0,6433	0,6025	0,6001

При достаточно больших значениях  $\beta$  получаем значения  $\lambda_1$ , совпадающие с критическими значениями  $\lambda_1^* = (1 + \nu)(2 + \nu)^{-1}$ , полученными в задаче об изолированной трещине в бесконечном материале [4, 5].

#### Выводы.

Полученные в работе результаты позволяют сделать следующие выводы:

в рассмотренной задаче о периодической системе соосных параллельных трещин радиального сдвига в материале с начальными напряжениями отличным от нуля является только коэффициент интенсивности напряжений  $K_{II}$ ;

для всех рассмотренных материалов начальные напряжения оказывают существенное влияние на коэффициенты интенсивности напряжений. При этом обнаруживается резкое «резонансоподобное» изменение значений коэффициентов интенсивности напряжений при приближении начальных сжимающих усилий к значениям, соответствующим локальной потере устойчивости материала в окрестности трещин, что по-

звolyает определять критические параметры сжатия непосредственно из решения соответствующей неоднородной задачи механики разрушения материалов с начальными напряжениями;

взаимовлияние трещин радиального сдвига в теле с начальными напряжениями приводит к увеличению (особенно существенному для малых значений расстояния между трещинами) значений коэффициента интенсивности напряжений  $K_{II}$  по сравнению со значением  $K_{II}^{\infty}$ , получаемым для изолированной трещины в бесконечном материале;

при увеличении расстояния между трещинами взаимовлияние трещин постепенно ослабевает, а значения коэффициентов интенсивности напряжений в окрестностях контуров трещин стремятся к соответствующим значениям, полученным в случае изолированной трещины в бесконечном материале. При этом для практических расчетов указанным взаимным влиянием трещин можно пренебречь при значениях расстояния между трещинами, превышающих 6 радиусов трещин;

для сжимаемого материала с упругим потенциалом гармонического типа коэффициенты интенсивности напряжений существенно зависят от значений коэффициента Пуассона;

при сжатии тела усилиями, направленными вдоль периодической системы параллельных трещин, для всех рассмотренных в работе моделей материалов локальная потеря устойчивости происходит по антисимметричной (изгибной) форме;

значения критических параметров сжатия, соответствующих локальной потери устойчивости, зависят от геометрических параметров задачи (расстояния между трещинами и радиуса трещин) и от механических характеристик материалов.

**РЕЗЮМЕ.** З використанням підходів лінеаризованої механіки деформівного твердого тіла досліджено осесиметричну задачу про взаємодію періодичної системи співвісних дископодібних тріщин радіального зсуву в нескінченному попередньо напруженому матеріалі. Розглянуто два не-класичних механізми руйнування – руйнування тіла з початковими напруженнями, що діють паралельно до площин тріщин, та руйнування при стиску вздовж тріщин. Для високоеластичних матеріалів з різними типами пружних потенціалів отримано числові значення параметрів руйнування і досліджено їх залежність від умов навантаження, фізико-механічних характеристик матеріалів та геометричних параметрів задачі.

1. *Бартенев Г.Н., Хазанович Т.Н.* О законе высокоэластических деформаций сеточных полимеров // Высокомолекулярные соединения. – 1960. – С. 21 – 28.
2. *Гузь А.Н.* К линейризованной теории разрушения хрупких тел с начальными напряжениями // Докл. АН СССР. – 1980. – **252**, № 5. – С. 1085 – 1088.
3. *Гузь А.Н.* Об одном критерии разрушения твердых тел при сжатии вдоль трещин. Пространственная задача // Докл. АН СССР. – 1981. – **261**, № 1. – С. 42 – 45.
4. *Гузь А.Н.* Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. – К.: Наук. думка, 1983. – 296 с.
5. *Гузь А.Н.* Хрупкое разрушение материалов с начальными напряжениями. – К.: Наук. думка, 1991. – 288 с. – (Неклассические проблемы механики разрушения: В 4-х т., 5-ти кн. / Под общ. ред. А.Н.Гузя. Т.2).
6. *Гузь А.Н.* Основы механики разрушения композитов при сжатии: В 2-х т.; Т.2. Родственные механизмы разрушения. – К.: Литера, 2008. – 736 с.
7. *Гузь А.Н., Дышель М.Ш., Назаренко В.М.* Разрушение и устойчивость материалов с трещинами. – К.: Наук. думка, 1992. – 456 с. – (Неклассические проблемы механики разрушения: В 4-х т., 5-ти кн. / Под общ. ред. А.Н.Гузя. Т.4, Кн.1).
8. *Гузь А.Н.* Об описании и исследовании некоторых неклассических проблем механики разрушения и соответствующих механизмов // Прикл. механика. – 2000. – **36**, № 12. – С. 3 – 37.
9. *Уфлянд Я.С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. – Л.: Наука, 1977. – 220 с.

10. *Bogdanov V.L., Guz A.N., Nazarenko V.M.* Nonaxisymmetric compressive failure of a circular crack parallel to a surface of halfspace // *Theor. Appl. Fract. Mech.* – 1995. – **22**. – P. 239 – 247.
11. *Bogdanov V.L., Guz A.N., Nazarenko V.M.* Axisymmetric Problem on Fracture of a Solid Containing the Periodic System of Coaxial Cracks under Action of the Directed Along Them Forces // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N 2. – P. 111 – 124.
12. *Guz A.N.* Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies. – Berlin: Springer-Verlag, 1999. – 555 p.
13. *Guz A.N.* Construction of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies // *Int. Appl. Mech.* – 2001. – **37**, N 1. – P. 1 – 37.
14. *Guz A.N.* On Non-Classical Problems of Fracture Mechanics Taking into Account the Stresses Along Cracks // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, N 8. – P. 937 – 942.
15. *Guz A.N.* Pascal Medal Lecture (written presentation) // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 1. – P. 3 – 7.
16. *Guz A.N.* On Study of Nonclassical Problems of Fracture and Failure Mechanics and Related Mechanisms // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N 1. – P. 1 – 31.
17. *Guz A.N.* On Constructing the Theory of Stability of Fibrous and Laminated Composite Materials // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N 6. – P. 587 – 612.
18. *Guz A.N., Dyshel' M.Sh., Nazarenko V.M.* Fracture and Stability of Materials and Structural Members with Cracks: Approaches and Results // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, N 12. – P. 1323 – 1359.
19. *Guz A.N., Nazarenko V.M., Bogdanov V.L.* Fracture under initial stresses acting along cracks: Approach, concept and results // *Theor. And Appl. Fract. Mech.* – 2007. – **48**. – P. 285 – 303.
20. *Guz I.A., Guz A.N.* Stability of Two Different Half-Planes in Compression Along Interfacial Cracks: Analytical Solution // *Int. Appl. Mech.* – 2001. – **37**, N 7. – P. 906 – 912.
21. *John F.* Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type // *Commun. Pure and Appl. Math.* – 1960. – **13**, N 2. – P. 239 – 296.
22. *Kassir M.K., Sih G.C.* Mechanics of Fracture.-Vol.2. Three – dimensional crack problems. – Leyden: Noordhoff Int. Publ., 1975. – 452 p.
23. *Nazarenko V.M., Bogdanov V.L., Altenbach H.* Influence of initial stress on fracture of a halfspace containing a penny-shaped crack under radial shear // *Int. J. Frac.* – 2000. – **104**. – P. 275 – 289.
24. *Treloar L.R.C.* Large elastic deformations in rubber-like materials // *Madrid IUTAM Colloquium, 1955.* – P. 208 – 217.

Поступила 15.12.2009

Утверждена в печать 21.10.2010