А.А.Мартынюк, А.С.Хорошун, А.Н.Черниенко

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ РОБОТА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО СО СРЕДОЙ

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ;
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: center@inmech.kiev.ua

Abstract. The problem is considered on stability of the motion of a robot interacting with a dynamical environment. The sufficient conditions of stability are obtained for the given programmed trajectory of the robot motion. The active participation of active environment is illustrated by three examples.

Key words: dynamical environment, robot, asymptotic stability.

Введение.

В последние десятилетия существенно возрос интерес к проблеме устойчивости роботов, взаимодействующих со средой. Это связано с тем, что влияние среды может оказаться дестабилизирующим фактором в процессе реализации программного движения исполнительного органа робота. В случае взаимодействия робота со средой задача управления формулируется так: необходимо выбрать такой закон управления, чтобы движение робота происходило вдоль заданной программной траектории $x_p(t)$, в то время как между роботом и средой действует требуемая сила взаимодействия $F_p(t)$.

В данной статье установлены некоторые результаты, позволяющие в зависисимости от параметров, характеризирующих среду, определить условия устойчивости желаемой програмной траектории движения робота.

1. Постановка задачи. Вспомогательные результаты.

Рассмотрим один частный случай взаимодействия робота со средой, считая что требуемая сила взаимодействия между ними асимптотически стремится к ожидаемой. В этом случае важным является определение условий устойчивости ожидаемой программной траектории движения робота $x_p(t)$ в зависимости от параметров рассматриваемой среды.

Согласно работам [6, 9], движение робота описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$H(q)\ddot{q} + h(q,\dot{q}) = \tau + J^T(q)F,$$

где $q, \dot{q}, \ddot{q} \in R^n$ – векторы обобщенных координат, скоростей и ускорений робота; $H(q)$ – положительно определенная матрица моментов инерции манипуляторов; $h(q,\dot{q})$ – n-мерная нелинейная вектор-функция, которая вводит в рассмотрение моменты центробежных, кориолисовых и гравитационных сил; $\tau = \tau(t)$ – n-мерный вектор управления; $J^T(q)$ – $n \times m$-мерная матрица Якоби, которая описывает взаимосвязь между скоростями рабочих органов робота и его обобщенными скоростями; $F = F(t)$ – n-мерный вектор обобщенных сил или обобщенных сил и моментов сил, действующих на исполнительные органы робота со стороны рассматриваемой среды.

Если среда не обладает смещениями, которые независимы от движений исполнительных органов робота, то ее математическая модель описывается нелинейным векторным уравнением следующего вида [9]:

$$M(s)\ddot{s} + L(s, \dot{s}) = -F \qquad (s = \varphi(q)),$$

где s – вектор смещений среды; $\varphi(q)$ – векторная функция, связывающая координаты s и q. При некоторых предположениях [9] это уравнение можно представить в виде

$$M(q)\ddot{q} + L(q, \dot{q}) = -S^T(q)F,$$

где $M(q)$ – невырожденная матрица размерности $n \times m$; $L(q, \dot{q})$ – нелинейная n-мерная векторная функция; $S^T(q)$ – $n \times m$-мерная матрица ранга n.

Таким образом, совокупность систем уравнений, которые описывают движение робота и поведение среды, представляют собой математическую модель робота, взаимодействующего со средой.

Согласно работам [4, 6, 10], указанную совокупность систем дифференциальных уравнений можно привести к одному векторному дифференциальному уравнению

$$dx/dt = A(t)x + \alpha(t, x) + \beta(t, x)\mu(t); \;\; x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $x(t) \in R^n$ – вектор состояния робота в момент $t \in R_+$; $A(t)$ – матрица и $\alpha(t, x)$, $\beta(t, x)\mu(t)$ – вектор-функции соответствующей размерности. Вопрос об устойчивости движения робота, взаимодействующего со средой, сводится к рассмотрению и решению системы уравнений, состоящей из уравнения (1) и уравнения

$$d\mu/dt = Q(\mu) \qquad (\mu(t) = F(t) - F_p(t)) \tag{2}$$

при соответствующих предположениях о функциях, описывающих воздействие среды на робот.

Следуя работе [6], введем следующие предположения.

I. Векторная функция $\alpha(t, x)$, входящая в уравнение (1) такова, что для каждого $L > 0$ существуют величины $D = D(L)$ и $T = T(L)$ такие, что $\|\alpha(t, x)\| \le L\|x\|$ при $\|x\| \le D$ и $t \ge T$.

II. Векторная функция, которая описывает влияние среды на робот, $u(t, x) = \beta(t, x)\mu(t)$, удовлетворяет условию $u(t, x) \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно по x при достаточно малом значении $\|x\|$.

Отметим, что это условие соответствует выбору управления, при котором $F(t) \to F_p(t)$ при $t \to +\infty$.

III. Матричная функция $A(t)$ может быть представлена в виде $A(t) = A + B(t)$, где A – постоянная матрица такая, что все ее собственные значения удовлетворяют условию $\mathrm{Re}(\lambda_i(A)) < -\gamma < 0$, $i = 1, \ldots, n$, и для матричной функции $B(t)$ выполняется условие $\|B(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$.

IV. Матричная функция $A(t)$ может быть представлена в виде $A(t) = A + B(t)$, где A – постоянная матрица такая, что все ее собственные значения удовлетворяют условию $Re(\lambda_i(A)) < -\gamma < 0,\ i = 1, \dots, n,$ и для матричной функции $B(t)$ выполняется условие: существует $c > 0$ такое, что $\|B(t)\| \le c$ при всех $t \in R_+$.

Теорема 1. Пусть уравнения (1) и (2) движения робота, взаимодействующего со средой таковы, что условия I – III удовлетворены. Тогда существует $t_0 \in R_+$ такое, что любое движение $x(t;\ t_0,\ x_0)$ робота, описываемое системой (1), стремится к 0 при $t \to \infty$ и достаточно малом значении $\|x(t_0)\|$.

Доказательство. Представим уравнение (1) в виде

$$dx/dt = Ax + f(t, x) + q(t, x), \tag{3}$$

где $f(t, x) = \alpha(t, x),\quad q(t, x) = B(t)x + \beta(t, x)\mu(t).$ Заметим, что $\|q(t, x)\| \le \|B(t)\| \|x\| + \|\beta(t, x)\mu(t)\|$ и $\|B(t)\| \|x\| \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно по x при достаточно малом значении $\|x\|$. Отсюда следует, что при выполнении условий I–III уравнение (3) удовлетворяет всем условиям [3, теорема 4.2]. Этим и завершается доказательство утверждения теоремы 1.

Лемма 1. Пусть матрица $A,$ входящая в систему

$$dx/dt = (A + B(t))x, \tag{4}$$

устойчива, т.е. выполняется условие $\max\limits_i \mathrm{Re}(\lambda_i(A)) < 0,$ а матрица $B(t)$ ограничена, т.е. существует константа $c > 0$ такая, что $\|B(t)\| \le c$ для всех $t \in R_+$. Тогда тривиальное решение $x = 0$ этой системы экспоненциально устойчиво при $t \to +\infty$, если $-\lambda_{\min}(Q) + 2c\|P\| < 0,$ где P – положительно определенная симметрическая матрица, которая является решением алгебраического уравнения Ляпунова

$$A^T P + PA = -Q, \tag{5}$$

где Q – положительно определенная симметрическая матрица.

Доказательство. Выберем произвольно положительно определенную симметрическую матрицу Q и найдем решение уравнения (5). Поскольку система $dx/dt = Ax$ асимптотически устойчива, то такое решение, в виде симметрической положительно определенной матрицы P, существует. Рассмотрим квадратичную форму $V(x) = x^T Px,$ которая, очевидно, положительно определена и найдем ее производную в силу системы (4). Тогда имеем равенство

$$dV/dt = \left(dx/dt\right)^T Px + x^T P\, dx/dt = x^T (A + B(t))^T Px + x^T P(A + B(t))x =$$

$$= x^T (A^T P + B^T(t)P + PA + PB(t))x = x^T(-Q + B^T(t)P + PB(t))x.$$

Тогда $dV/dt \le \left(-\lambda_{\min}(Q) + 2c\|P\|\right)\|x\|^2 = W(x)$ для всех $t \in R_+$ и всех $x \in R,$ где $\|x\| = \left(x^T x\right)^{\frac{1}{2}}$ – эвклидова векторная норма, а $\|P\|$ – спектральная матричная норма; $W(x) = x^T Bx$ – отрицательно определенная квадратичная форма; $B = (-\lambda_{\min}(Q) + 2c\|P\|)I$, где I – единичная матрица соответствующей размерности. Согласно теореме [1, с. 252] тривиальное решение $x = 0$ системы (4) экспоненциально устойчиво при $t \to +\infty$. Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть система (1) такова, что выполняются условия I, II, IV и $-\lambda_{\min}(Q)+2c\|P\|<0$, где P – положительно определенная симметрическая матрица, являющаяся решением алгебраического уравнения Ляпунова $A^T P + PA = -Q$, где Q – положительно определенная симметрическая матрица. Тогда тривиальное решение $x=0$ системы $dx/dt = A(t)x+\alpha(t,x)$ устойчиво при постоянно действующих возмущениях.

Доказательство. Согласно лемме 1 тривиальное решение $x=0$ системы (4) является экспоненциально устойчивым и $V(x)=x^T Px$ – функция Ляпунова, позволяющая установить этот факт. Очевидно, что $V(x)$ будет функцией Ляпунова в некоторой окрестности 0, позволяющей установить асимптотическую устойчивость тривиального решения $x=0$ системы

$$dx/dt = A(t)x+\alpha(t,x).$$

Поскольку величина $\nabla V(x)$, очевидно, ограничена в окрестности 0, то $V(x)=x^T Px$ удовлетворяет теореме Малкина об устойчивости при постоянно действующих возмущениях [2]. Теорема 2 доказана.

Замечание. Неравенство $-\lambda_{\min}(Q)+2c\|P\|<0$ позволяет определить величину $c>0$, при которой будет иметь место экспоненциальная устойчивость тривиального решения $x=0$ системы (4) при $t\to+\infty$, а также устойчивость при постоянно действующих возмущениях тривиального решения $x=0$ системы $dx/dt = A(t)x+\alpha(t,x)$.

2. Приложения.

Рассмотрим примеры, которые описывают взаимодействие робота со средой, когда требуемая сила взаимодействия $F_p(t)$ асимптотически устойчива. Схема робота, взаимодействующего со средой, в рамках рассматриваемой модели, согласно [10], представлена на рис. 1. Ниже дана иллюстрация результатов, полученных в п.1.

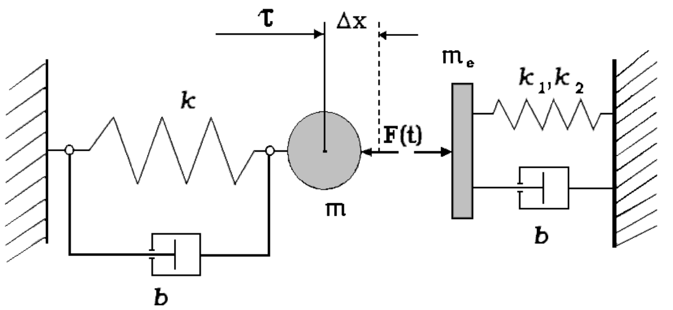

Рис. 1

Случай А.

Пусть среда описывается нелинейной моделью вида

$$F = m_e\ddot{x}+b_e\dot{x}+k_1x+k_2x^3, \tag{6}$$

где m_e, b_e, k_1, k_2 – некоторые постоянные. Заменой переменных $\eta = x - x_p$, где x_p – ожидаемая траектория движения робота, уравнение (6) приводится к виду

$$\ddot{\eta}+\frac{b_e}{m_e}\dot{\eta}+\frac{k_2}{m_e}\eta^3+\frac{3k_2x_p}{m_e}\eta^2+\frac{k_1+3k_2x_p^2}{m_e}\eta=\frac{1}{m_e}\mu, \tag{7}$$

где $\mu(t) = F(t) - F_p(t)$, $x_p(t) = c_1 e^{-\alpha_p t} + c_2$, $F_p(t) = F_0(1 - e^{-\alpha_p t})$, $\alpha_p(t) > 0$ – const. Введя новые переменные $x_1 = \eta$, $x_2 = \dot{\eta}$, $x = (x_1, x_2)^T$, уравнение (5) приведем к виду

$$\dot{x} = Ax + B(t)x + \beta\mu(t) + \alpha(t, x), \tag{8}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k_1 + 3k_2 c_2^2}{m_e} & -\dfrac{b_e}{m_e} \end{pmatrix}; \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\dfrac{6k_2 c_1 c_2 e^{-\alpha_p t} + 3k_2 c_1^2 e^{-2\alpha_p t}}{m_e} & 0 \end{pmatrix};$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m_e} \end{pmatrix}; \quad \alpha(t, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{3k_2 x_p}{m_e} x_1^2 - \dfrac{k_2}{m_e} x_1^3 \end{pmatrix};$$

k_1, k_2, m_e, b_e – положительные постоянные. Нетрудно проверить, что матрица A устойчива, т.е. $\max\limits_i \operatorname{Re}(\lambda_i(A)) < 0$. Поскольку сила взаимодействия асимптотически стремится к требуемой, то принимаем, что выполняется условие $\|\beta\mu(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно по x. Также заметим, что $\|B(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$ и $\|\alpha(t, x)\| = o(\|x\|)$, т.е. все условия теоремы 1 выполнены при произвольных значениях параметров. Следовательно, ожидаемая программная траектория x_p – асимптотически устойчива.

На рис. 2 представлено поведение решения уравнения (7) при следующих значениях параметров: $F_0 = 10$ Н, $k_1 = 100$ Н/м, $k_2 = 100$ Н/м^3, $\alpha_p = 20$, $m_e = 2{,}8145$ кг, $b_e = 0{,}5$ Нс/м.

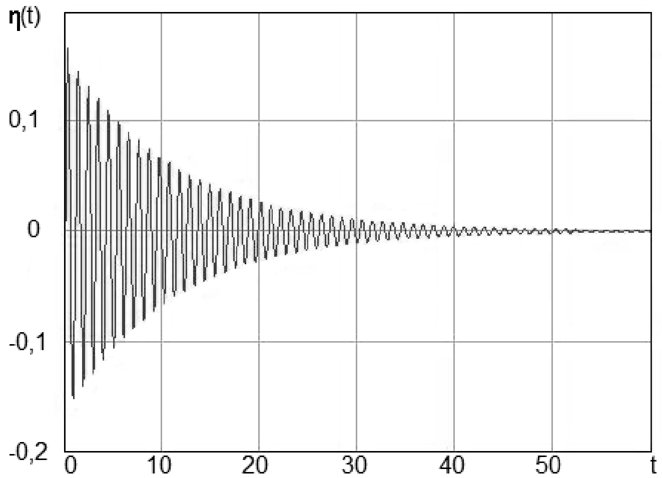

Рис. 2.

Случай Б. Пусть среда описывается нелинейной моделью вида

$$F = m_e \ddot{x} + b_e \dot{x} - k_1 x + k_2 x^3, \tag{9}$$

где сохранены все обозначения из предыдущего случая. Аналогично случаю А получим, что уравнение (9) приводится к виду (8). При этом матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{k_1 - 3k_2c_2^2}{m_e} & -\dfrac{b_e}{m_e} \end{pmatrix}.$$

В этом случае асимптотическая устойчивость ожидаемой программной траектории x_p будет иметь место, если для матрицы A выполняется условие III, т.е. для параметров уравнения (9) выполняется неравенство $k_1 - 3k_2c_2^2 < 0$.

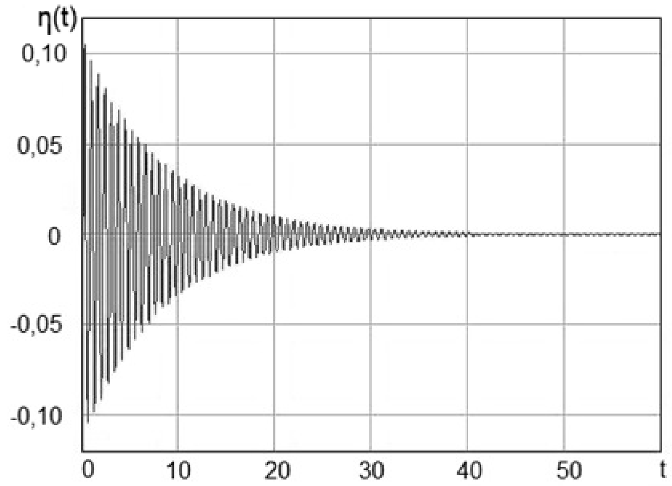

Рис. 3

На рис. 3 представлено поведение решения уравнения (9) при значениях параметров: $F_0 = 10$ Н, $k_1 = 100$ Н/м, $k_2 = 100$ Н/м^3, $\alpha_p = 20$, $m_e = 2,8145$ кг, $b_e = 0,5$ Нс/м, когда программная траектория x_p устойчива.

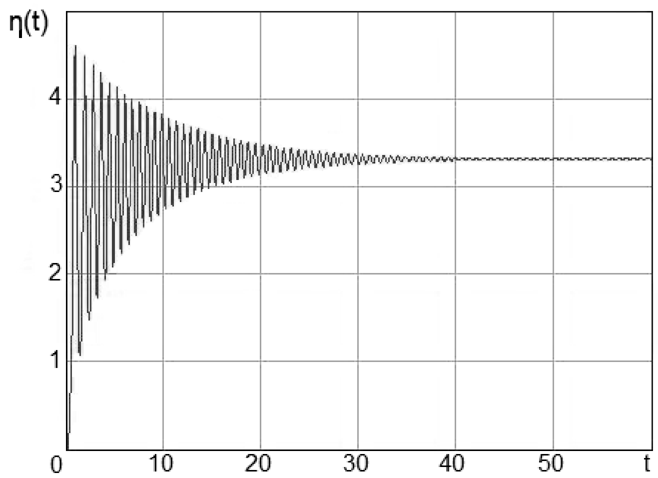

Рис. 4

На рис. 4 представлено поведение решения уравнения (9) при значениях параметров: $F_0 = 10$ Н, $k_1 = 100$ Н/м, $k_2 = 10$ Н/м^3 $\alpha_p = 20$, $m_e = 2,8145$ кг, $b_e = 0,5$ Нс / м, когда программная траектория x_p неустойчива.

Случай B. Пусть среда описывается нелинейной моделью вида

$$F = m_e\ddot{x} + b_e\dot{x} - k_1x + k_2x^3, \tag{10}$$

где также сохранены все обозначения случая А. Выберем $x_p^2 = a^2 + b^2 \sin^2 \alpha t$ и $F_p = F(\sqrt{a^2 + b^2 \sin^2 \alpha t})$. Аналогично предыдущему рассмотрению получим, что уравнение (10) приводится к виду (6). При этом матрицы A и $B(t)$ имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{k_1 - 3k_2 a^2}{m_e} & -\dfrac{b_e}{m_e} \end{pmatrix}; \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\dfrac{3k_2 b^2 \sin \alpha t}{m_e} & 0 \end{pmatrix}.$$

Выберем следующие значения параметров для данной задачи: $F_0 = 10$ Н, $k_1 = 100$ Н / м, $k_2 = 35$ Н / м^3, $\alpha_p = 1$, $m_e = 2{,}8145$ кг, $b_e = 0{,}5$ Нс / м, $a = 1$, $b = 0{,}04$. При этих значениях параметров выполняется соотношение $k_1 - 3k_2 a^2 < 0$, т. е. матрица A устойчива. Выберем матрицу Q в виде $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ и, решив соответствующее алгебраическое уравнение Ляпунова, найдем матрицу $P = \begin{pmatrix} 15{,}729 & 0{,}563 \\ 0{,}563 & 8{,}798 \end{pmatrix}$. Для матрицы $B(t)$ константа $c = \dfrac{3k_2 b^2}{m_e}$. Соотношение $-\lambda_{\min}(Q) + 2c\|P\| < 0$ выполняется, значит, согласно теореме 2, ожидаемая программная траектория x_p устойчива при постоянно действующих возмущениях.

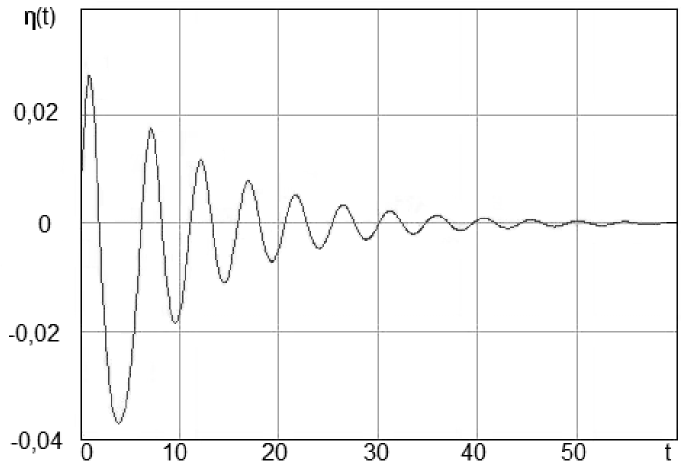

Рис. 5

На рис. 5 представлено поведение решения уравнения (10) при заданных значениях параметров. Видно, что оно асимптотически устойчиво.

Заключение.

Известно, что поведение сплошной среды описывается уравнениями в частных производных [7, 9]. Эти уравнения конкретизируются в зависимости от того, что понимается под «сплошной средой», например, оболочка, пластина и.т.д. Ясно, что модели (6), (9) и (10) являются весьма приближенными для описания динамики сплошной среды, но их применение в данной задаче оправдано тем, что позволяет, в принципе, показать, как среда влияет на динамические свойства осцилятора, моделирующего исполнительный орган робота [5, 8].

В данной работе определены достаточные условия асимптотической устойчивости заданной программной траектории $x_p(t)$ в случае, когда сила взаимодействия между роботом и средой $F(t)$ асимптотически стремится к ожидаемой силе взаимодействия $F_p(t)$ при $t \to +\infty$. При этом, матрица линейного приближения рассматриваемой системы $A(t)$ допускает выделение устойчивой постоянной составляющей A, т. е. $A(t) = A + B(t)$, а зависимая от t компонента $B(t)$ мала в смысле Беллмана [3, с.169] либо ограничена.

Несомненный интерес представляет также рассмотрение динамики среды в более точном ее описании уравнениями в частных производных, а также оценки влияния среды на динамическое поведение робота.

Р Е З Ю М Е . Розглянуто задачу про стійкість руху робота, що взаємодіє з середовищем. Отримано достатні умови стійкості заданої програмної траєкторії руху робота. Активна участь середовища ілюструється трьома прикладами.

1. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
2. *Малкин И.Г.* Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях // Прикл. математика и механика. – 1944. – **VIII**, №3. – С. 241 – 245.
3. *Мартынюк А.А., Лакшмикантам В., Лила С.* Устойчивость движения: метод интегральных неравенств. – К.: Наук. думка, 1989. – 272 с.
4. *De Luca A., Manes C.* Hybrid Force/Position Control for Robots in Contact with Dynamic Environment // Proc. of Robot Control SYROCO '91. – 1991. – P. 377 – 382.
5. *Larin V.B.* Control Problems for Wheeled Robotic Vehicles // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 4. – P. 363 – 389.
6. *Martynyuk A.A., Chernienko A.N.* On the Theory of Motion Stability of a Robot Interacting with a Dynamic Environment // Eng. Simulation. – 2000. – **17**. – P. 605 – 620.
7. *Martynyuk A.A., Slyn'ko V.I.* On Stability of Motion with Respect to Two Measures under Uncertainty // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 1. – P. 91 – 101.
8. *Martynyuk A.A., Slyn'ko V.I.* On Stability of Moving Autonomous Mechanical Systems under Uncertainty // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 2. – P. 217 – 227.
9. *Shamolin M.V.* Stability of a Rigid Body Translating in a Resisting Medium // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 6. – P. 680 – 692.
10. *Vukobratovič M.* The role of environmental dynamics in the contact force control of manipulation robots // J. Dynamic Systems, Measurement and Control. – 1996. – **119**, N 1. – P. 86 – 89.

Поступила 24.09.2009 Утверждена в печать 15.06.2010