

Применение метода начальных параметров к анализу связанных гидромеханических колебаний трубопроводных систем. Сообщение 2. Собственные частоты и формы связанных гидромеханических колебаний среды, транспортируемой трубопроводами

И. В. Орыняк, А. С. Батура, Я. Р. Дубик

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Представлена модификация метода начальных параметров, используемого для учета гармонических колебаний транспортируемой трубопроводом среды. К существующим параметрам, описывающим механические колебания трубопровода, добавлены параметры смещения среды и пульсации ее давления. Для этих гидродинамических параметров получены уравнения связи в пределах расчетных элементов и сопряжения параметров на границах между элементами. Записаны уравнения сопряжения гидродинамических и механических параметров, позволяющие учитывать их влияние друг на друга и анализировать связанные гидромеханические колебания. В целом алгоритм метода начальных параметров и метод построения расчетной модели остались без изменений. На ряде примеров показана точность предложенных методов, используемых для анализа собственных и вынужденных колебаний среды в трубопроводе как с учетом взаимного влияния среды и трубы, так и без.

Ключевые слова: вибрации трубопроводных систем, гидродинамические колебания, колебания транспортируемой среды, связанные гидромеханические колебания.

Введение. Газ или жидкость, переносимые трубопроводами, являются упругими средами и в них, как и в материале труб, могут иметь место колебательные процессы, обычно называемые гидродинамическими либо акустическими. При этом из-за относительно низкого уровня демпфирования колебания транспортируемой среды могут распространяться на большие расстояния и быть причиной значительных механических колебаний трубопроводов. Такие явления называют связанными гидромеханическими колебаниями (ГМК). Взаимодействие между динамическим поведением внутренней среды (жидкости или газа) и механической конструкции происходит путем наложения трех механизмов [1, 2].

Взаимодействие на фитингах (junction coupling). Этот эффект преобладает над другими и обусловлен разностью давлений между специфическими точками трубопроводной системы, такими как тройники, гибы трубы, конические переходы, заглушки на концах. Разница давлений приводит к результирующей гидравлической силе, вызывающей перемещения точек трубы, что, в свою очередь, влияет на относительные перемещения среды и ее давление.

Пуассоново взаимодействие (Poisson coupling). Действие этого эффекта возможно только благодаря ненулевому значению коэффициента Пуассона μ . Волны давления вызывают радиальные напряжения и деформации в стенке трубы, которые через эффект Пуассона связаны с осевыми деформациями. Кроме того, осевые напряжения в трубе приводят к окружным деформациям и уменьшению площади поперечного сечения и, как следствие, к изменению

деформаций (давления) в жидкости (среде). Впервые для прямых участков труб уравнения взаимодействия были получены в [3]. Их суть состоит в том, что вместо двух независимых пар уравнений для деформирования прямой трубы в осевом направлении (сила и перемещение) и уравнений для деформирования жидкости (давление и перемещение) получены четыре взаимосвязанных уравнения.

Взаимодействие трением (friction coupling). Взаимодействие происходит благодаря двухсторонней силе трения жидкости о стенки трубы. Для промышленных трубопроводных систем величины реальных параметров шероховатостей труб малые, и этим эффектом можно пренебречь.

Практический анализ гидромеханического взаимодействия сводится к трем возможным случаям [4]. Первый случай тривиальный: отсутствие взаимодействия, когда жидкость может рассматриваться только как присоединенная масса. Второй случай промежуточный: основным источником возбуждения колебаний служат волны в среде, и анализ поведения механической системы выполняется путем задания соответствующих сил на фитингах. Этот подход обоснован для податливых (легкожимаемых) сред (газов) или жесткой механической системы. Его недостаток заключается в отдельном решении задачи для среды и неудобстве (и дополнительном обосновании) способа приложения гидравлических сил. Третий случай – это полное решение связанной задачи, что не всегда доступно. Более того, обычно уравнения, определяющие решение связанного пуассонового взаимодействия, записываются в виде, который приводит к неопределенным результатам при значении коэффициента Пуассона, равном нулю, и равенстве собственных частот механических и гидродинамических колебаний.

По нашему мнению, в случае численного анализа поведения трубопроводной системы непрактично разделять частичное или полное взаимодействие ГМК или его отсутствие. Очевидно, что представление результирующих уравнений в форме, допускающей непрерывное решение при любом значении коэффициента Пуассона, имеет практический интерес.

Цель настоящего сообщения состоит в получении более удобной формы решения уравнений Скалака [3] для случая гармонического нагружения, чем, например, в [5], и формулировке граничных условий для создания алгоритма решения связанных ГМК. При этом используется алгоритм решения пространственных трубопроводных систем, основанный на методе начальных параметров, точном решении для прямого участка трубопровода и введении понятия “поворотный элемент” для моделирования криволинейных участков [6–8].

1. Решение уравнений Скалака для прямого участка трубы. Согласно модели Скалака, силой трения между движущейся жидкостью и внутренней поверхностью трубы можно пренебречь. В основе модели колебания среды лежат следующие постулаты: среда имеет некоторую объемную упругость K_{cp} (размерность совпадает с таковой для модуля Юнга, Па); среда неразрывна. Таким образом, в математическую модель колебаний стержневой системы добавляются параметры пульсации давления среды P_{cp} и ее продольного смещения u_{cp} . Пусть ε_{cp} – объемная деформация среды. Если v_0 – недеформированный объем среды, v_1 – деформированный, можно записать выражение

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{v_1 - v_0}{v_0} = -\frac{P_{\text{ср}}}{K_{\text{ср}}}, \quad (1)$$

которое следует из определения $K_{\text{ср}}$. Здесь знак “-” обозначает, что положительное давление приводит к уменьшению объема, отрицательное – к его увеличению; $P_{\text{ср}}$ – параметр изменения давления относительно некоторого статического значения, следовательно, его величина может быть отрицательной.

Из (1) следует

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{(dx + du_{\text{ср}})F_1 - dxF_0}{dxF_0}, \quad (2)$$

где F_0 – внутренняя площадь “в свету” трубы без действия давления среды, $F_0 = \pi R^2$; F_1 – внутренняя площадь под действием давления среды; dx – длина участка; $du_{\text{ср}}$ – прирост смещения жидкости (рис. 1).

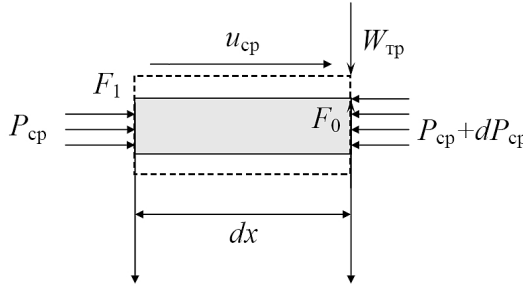


Рис. 1. Элементарный объем трубопровода под действием давления среды.

С учетом радиального перемещения точек трубы $W_{\text{тр}}$ и изменения площади ее поперечного сечения получим

$$F_1 = F_0 + 2\pi W_{\text{тр}}R, \quad W_{\text{тр}} = \frac{P_{\text{ср}}R^2}{hE}, \quad (3)$$

где h – толщина стенки трубы; R – внутренний радиус; E – модуль Юнга материала трубы.

Подставив выражение (3) в (2), с учетом (1) получим дифференциальное выражение для деформирования среды, которое вместе с более тривиальными уравнениями равенства сил для жидкости и трубы, физическим законом деформаций для материала трубы формирует следующую систему уравнений Скалака [3]:

$$\frac{du_{\text{ср}}(x, \tau)}{dx} = -\frac{P_{\text{ср}}}{K_{\text{ср}}} \left(1 + \frac{2RK_{\text{ср}}}{hE} \right) - \frac{\mu N_t}{fE}; \quad (4a)$$

$$\frac{dP_{\text{ср}}(x, \tau)}{dx} = -\frac{d^2u_{\text{ср}}}{d\tau^2} \rho_{\text{ср}}; \quad (4б)$$

$$\frac{dv_t(x, \tau)}{dx} = -\frac{N_t}{fE} - \frac{\mu P_{cp} R}{hE}; \quad (4в)$$

$$\frac{dN_t(x, \tau)}{dx} = -f \frac{d^2 v_t}{d\tau^2} \rho_m, \quad (4г)$$

где f – площадь сечения материала трубы, $f = \pi h(2R + h)$; $\rho_{cp/m}$ – плотность среды или материала трубы; τ – время. Балочные механические неизвестные параметры: N_t – осевая сила; v_t – продольное смещение трубы.

Полагаем, что все процессы являются гармоническими, т.е. пропорциональными $\sin \omega \tau$, где ω – некоторая частота гармонических колебаний. Сохраним те же обозначения для новых введенных функций, зависящих только от x . Дифференцируя (4а) и (4в) и подставляя в них (4б) и (4г), получаем систему исходных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 v_t}{dx^2} = -v_t a - u_{cp} \mu \alpha d; \quad (5а)$$

$$\frac{d^2 u_{cp}}{dx^2} = -v_t \mu a - u_{cp} d, \quad (5б)$$

где

$$a = \omega^2 \frac{\rho_m}{E}; \quad d = \frac{\rho_{cp}}{K_{cp}} \left(1 + \frac{2RK_{cp}}{hE} \right) \omega^2; \quad (6а)$$

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{1 + 2\alpha_1} < 1; \quad \alpha_1 = \frac{RK_{cp}}{hE}. \quad (6б)$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений отыскиваем в виде

$$v_t(x) = A \cos \lambda_1 x + B \sin \lambda_1 x + CX \mu \cos \lambda_2 x + DX \mu \sin \lambda_2 x; \quad (7а)$$

$$u_{cp}(x) = A \mu Y \cos \lambda_1 x + B \mu Y \sin \lambda_1 x + C \cos \lambda_2 x + D \sin \lambda_2 x, \quad (7б)$$

где значения λ_1 и λ_2 определяются из решения характеристического уравнения

$$\lambda^4 - (a + d)\lambda^2 + ad(1 - \mu^2 \alpha) = 0; \quad (8)$$

$$(\lambda_{1,2})^2 = \frac{(a + d) \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4ad\mu^2 \alpha}}{2}. \quad (9)$$

Здесь знак “+” соответствует первому корню, который при $\mu = 0$ стремится к a , что отвечает решению для механической системы, знак “-” – второму корню, который при $\mu = 0$ стремится к d , что соответствует решению для

гидродинамических колебаний. Очевидно, что в силу (8) оба корня удовлетворяют равенству

$$(\lambda_i^2 - a)(\lambda_i^2 - d) = ad\mu^2\alpha, \quad i = 1, 2. \quad (10)$$

Значение X определяется путем подстановки (7б) в (5а), значение Y – (7а) в (5б):

$$X = \frac{ad}{(\lambda_2)^2 - a}; \quad Y = \frac{a}{(\lambda_1)^2 - d}. \quad (11)$$

Введем следующие обозначения:

$$\gamma_x = \frac{Y}{1 - \mu^2 XY}; \quad \gamma_y = \frac{X}{1 - \mu^2 XY}; \quad \gamma = \frac{\mu^2 XY}{1 - \mu^2 XY}. \quad (12)$$

Выражения (12) с учетом (11) и (10) представим в виде

$$\begin{aligned} \gamma_x &= \frac{a}{(\lambda_1)^2 - (\lambda_2)^2}; & \gamma_y &= -\frac{\alpha d}{(\lambda_1)^2 - (\lambda_2)^2}; \\ \gamma &= -\frac{(\lambda_1)^2 - a}{(\lambda_1)^2 - (\lambda_2)^2} = \frac{(\lambda_2)^2 - d}{(\lambda_1)^2 - (\lambda_2)^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Неизвестные коэффициенты A, B, C, D находим из начальных условий (7а), (7б) при $x = 0$. Полагая известными значения перемещений, т.е. $v_t(x = 0) = v_{t0}, u(x = 0) = u_0$, получаем

$$A = \frac{v_{t0} - \mu Xu_0}{1 - \mu^2 XY}; \quad C = \frac{u_0 - \mu Yv_{t0}}{1 - \mu^2 XY}. \quad (14)$$

Для удобства введем обозначения:

$$\frac{du_{cp}}{dx} = -\tilde{P}_{cp}; \quad \frac{dv_t}{dx} = -\tilde{N}_t, \quad (15)$$

где

$$\tilde{P}_{cp} = \frac{P_{cp}}{K_{cp}} \left(1 + \frac{2RK_{cp}}{hE} \right) + \frac{\mu N_t}{fE}; \quad \tilde{N}_t = \frac{N_t}{fE} + \frac{\mu P_{cp} R}{hE}. \quad (16)$$

Принимая, что начальные значения $\tilde{P}_{cp}(x = 0) = \tilde{P}_{cp0}$ и $\tilde{N}_t(x = 0) = \tilde{N}_{t0}$ известны, получаем

$$B = \frac{1}{\lambda_1} \frac{\tilde{N}_{t0} - \mu X \tilde{P}_{cp0}}{1 - \mu^2 XY}; \quad D = \frac{1}{\lambda_2} \frac{\tilde{P}_{cp0} - \mu Y \tilde{N}_{t0}}{1 - \mu^2 XY}. \quad (17)$$

С учетом определенных значений A, B, C, D решения (7а) и (7б) примут вид

$$v_t(x) = v_{t0}(\cos \lambda_1 x + \gamma F_1(x)) - u_{cp0} \mu \gamma_y F_1(x) - \tilde{N}_{t0}(\sin \lambda_1 x / \lambda_1 + \gamma F_2(x)) + \tilde{P}_{cp0} \mu \gamma_y F_2(x); \quad (18a)$$

$$u_{cp}(x) = v_{t0} \mu \gamma_x F_1(x) + u_{cp0}(\cos \lambda_2 x - \gamma F_1(x)) - \tilde{N}_{t0} \mu \gamma_x F_2(x) - \tilde{P}_{cp0}(\sin \lambda_2 x / \lambda_2 - \gamma F_2(x)), \quad (18б)$$

где для удобства введены функции:

$$F_1(x) = \cos \lambda_1 x - \cos \lambda_2 x; \quad (19a)$$

$$F_2(x) = \sin \lambda_1 x / \lambda_1 - \sin \lambda_2 x / \lambda_2, \quad (19б)$$

обладающие следующими свойствами:

$$F_1(0) = F_2(0) = 0; \quad (20a)$$

$$F_2'(x) = F_1(x); \quad F_1'(x) = -((\lambda_1)^2 - (\lambda_2)^2) \sin \lambda_1 x / \lambda_1 - F_2(x)(\lambda_2)^2. \quad (20б)$$

Дифференцируя функции (18) с учетом обозначений (15) и свойств (20), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{N}_t(x) = & v_{t0}(a \sin \lambda_1 x / \lambda_1 + \gamma(\lambda_2)^2 F_2(x)) - \\ & - u_{cp0}(\mu \alpha d \sin \lambda_1 x / \lambda_1 + \mu \gamma_y (\lambda_2)^2 F_2(x)) + \\ & + \tilde{N}_{t0}(\cos \lambda_1 x + \gamma F_1(x)) - \tilde{P}_{cp0} \mu \gamma_y F_1(x); \end{aligned} \quad (21a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{cp}(x) = & v_{t0}(\mu a \sin \lambda_1 x / \lambda_1 + \mu \gamma_x (\lambda_2)^2 F_2(x)) + \\ & + u_0(d \sin \lambda_2 x / \lambda_2 - \gamma(\lambda_1)^2 F_2(x)) - \\ & - \tilde{N}_{t0} \mu \gamma_x F_1(x) + \tilde{P}_{cp0}(\cos \lambda_2 x - \gamma F_1(x)). \end{aligned} \quad (21б)$$

Преимуществом данных выражений, в частности, перед решениями из [5] является то, что при любых реальных значениях параметров материала трубы и транспортируемой среды отсутствует деление на ноль.

Выражения (18), (21) задают матрицу $[\tilde{A}]$, связывающую неизвестные параметры $[v_t, u_{cp}, \tilde{N}_t, \tilde{P}_{cp}]$ в начале и конце прямолинейного участка. Для использования данных выражений в методе начальных параметров (МНП)

матрицу $[\tilde{A}]$ следует преобразовать в аналогичную матрицу $[A]$ для неизвестных параметров $[v_t, u_{cp}, N_t, P_{cp}]$. Пусть матрица $[B]$ преобразовывает $[v_t, u_{cp}, N_t, P_{cp}]$ в $[v_t, u_{cp}, \tilde{N}_t, \tilde{P}_{cp}]$ (тривиально получается из выражений (16)). Тогда выражение для $[A]$ будет следующим:

$$[A] = [B^{-1}][\tilde{A}][B]. \quad (22)$$

Существуют два подхода к получению матрицы $[A]$.

1. Вычислить матрицы $[\tilde{A}]$, $[B]$, $[B^{-1}]$ в процессе выполнения программы и перемножить их численно.

2. Аналитически перемножить матрицы $[\tilde{A}]$, $[B]$, $[B^{-1}]$ и использовать при программировании МНП конечное выражение для $[A]$, аналогичное (18), (21).

Отметим, что первый подход требует некоторой модификации процесса заполнения матрицы, второй – получения весьма громоздких выражений для v_t, u_{cp}, N_t, P_{cp} . С использованием компьютерных математических пакетов, позволяющих решать системы линейных уравнений и совершать операции с матрицами в символьном виде (например, программа Maple компании Waterloo Maple Inc.), можно относительно быстро получить выражения для v_t, u_{cp}, N_t, P_{cp} в явном виде, пригодном для непосредственного программирования МНП. Так, размер данных выражений, запрограммированных на языке C++, составляет 4,7 кБ.

2. Получение зависимостей для прямой трубы в предельных случаях.

Одним из вариантов записи уравнений (5) является предельный случай, когда значения a и d существенно различаются. Случай $a \gg d$ маловероятен для реальных промышленных трубопроводов, поэтому ограничимся рассмотрением варианта $d \gg a$, что представляет практический интерес. При этом для $\lambda_{1,2}, \gamma_x, \gamma_y, \gamma$ справедливы следующие выражения:

$$(\lambda_1)^2 = d + ad\mu^2\alpha / (d - a) = d + a\mu^2\alpha; \quad (23a)$$

$$(\lambda_2)^2 = a - ad\mu^2\alpha / (d - a) = a(1 - \mu^2\alpha); \quad (23б)$$

$$\gamma_x = a/d; \quad (23в)$$

$$\gamma_y = \alpha \left(1 + \frac{a}{d} \right) \approx \alpha; \quad (23г)$$

$$\gamma = - \left(1 - \frac{a}{d} \mu^2 \alpha - \frac{\alpha^2}{d^2} \right) \approx -1. \quad (23д)$$

Тогда вместо выражений (18), (21) можно записать следующие:

$$v_t(x) = v_{t0} \cos \lambda_2 x - u_{cp0} \mu \alpha F_1(x) - \tilde{N}_{t0} \sin \lambda_2 x / \lambda_2 + \tilde{P}_{cp0} \mu \alpha F_2(x); \quad (24a)$$

$$u_{\text{ср}}(x) = v_{i0} \mu \frac{a}{d} F_1(x) + u_{\text{ср}0} \cos \lambda_1 x - \tilde{N}_{i0} \mu \frac{a}{d} F_2(x) - \tilde{P}_{\text{ср}0} \sin \lambda_2 x / \lambda_1; \quad (24б)$$

$$\begin{aligned} \tilde{N}_i(x) = & v_{i0} a (\sin \lambda_2 x / \lambda_2 + \mu^2 \alpha F_2(x)) - u_{\text{ср}0} \mu \alpha d \sin \lambda_1 x / \lambda_1 + \\ & + \tilde{N}_{i0} \cos \lambda_2 x - \tilde{P}_{\text{ср}0} \mu \alpha F_1(x); \end{aligned} \quad (24в)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{\text{ср}}(x) = & v_{i0} \left(\mu a \sin \lambda_1 x / \lambda_1 + \mu \frac{a^2}{d} (1 - \mu^2 \alpha) F_2(x) \right) + \\ & + u_0 d \sin \lambda_1 x / \lambda_1 - \tilde{N}_{i0} \mu \frac{a}{d} F_1(x) + \tilde{P}_{\text{ср}0} \cos \lambda_1 x. \end{aligned} \quad (24г)$$

Отметим, что данное решение может быть получено непосредственно из (5) в граничном переходе при $d \gg a$.

Проанализируем выражения (24) для прямой трубы. Гидродинамические компоненты $u_{\text{ср}}$ и $\tilde{P}_{\text{ср}}$ подставим в выражения (24а), (24в) для трубных компонент. Амплитудные значения v_i и \tilde{N}_i подставим в (24б) и (24г) и получим, что гидродинамические компоненты из-за влияния трубных компонент через эффект Пуассона изменяются незначительно (порядка $\mu^2 \alpha a / \lambda_1$). Аналогичный порядок погрешности получен для трубных компонент. Таким образом, решение можно разбить на две части: уравнения для колебаний транспортируемой среды (24б), (24г) и для механических продольных колебаний трубопровода (24а), (24в). При этом частоты гидродинамических колебаний остаются неизменными, частоты механических продольных колебаний несколько изменяются в соответствии с выражением (23б).

Однако для решения реальных задач целесообразно использовать уравнения (18), (21) либо (24), в полной мере учитывающие взаимное влияние механических и гидродинамических параметров через эффект Пуассона, так как в фитингах и на гibaх труб данные параметры оказывают существенное влияние друг на друга. Следовательно, пуассоновым эффектом на прямых трубах пренебречь нельзя.

Заметим, что параметр $c = \sqrt{d} / \omega$ представляет собой величину, обратную скорости распространения волны гидроудара в среде, и описывается известным выражением, полученным Н. Е. Жуковским. При этом, если деформацией $W_{\text{тр}}$ поперечного сечения под действием давления можно пренебречь (например, при большой жесткости стенок трубы или относительно малой объемной упругости $K_{\text{ср}}$), скорость гидроудара будет равна скорости звука в среде, и соответственно выражение для d упростится. Для c получим следующее тривиальное выражение:

$$c = \frac{1}{V_{\text{ср}}} = \sqrt{\frac{\rho_{\text{ср}}}{K_{\text{ср}}}}. \quad (25)$$

3. Краевые условия для гидродинамических колебаний, моделирование связанных гидромеханических колебаний. Основные уравнения в виде (18), (21) либо (24) необходимо дополнить краевыми условиями и условиями непрерывности между сечениями элементов для прямых труб и криволинейных элементов.

Условие непрерывности для перемещений трубы в точке соединения нескольких трубопроводных элементов очевидное, оно хорошо известно и описано во многих литературных источниках.

Уравнение для давления в точке соединения элементов тривиальное и основано на условии непрерывности давления в точке:

$$P_{\text{ср}}^1 = P_{\text{ср}}^2 = P_{\text{ср}}^3 = \dots \quad (26a)$$

Отметим, что условие (26a) справедливо как для узла соединения прямых труб, так и для поворотного элемента как места поворота локальных осей координат [6], [9].

Рассматривается модель, в которой транспортируемая среда совершает колебания в продольном направлении (вдоль оси трубопровода) с амплитудой $u_{\text{ср}}$. При этом принимается, что среда полностью принимает форму трубы. Поперечные смещения среды равны таковым трубы, т.е. в нормальных к оси трубы направлениях среда учитывается только как присоединенная масса. На основании условия неразрывности среды в точке с учетом взаимного продольного смещения трубы и среды записывается следующее выражение:

$$\sum_{\text{вх}}^i F_i (u_{\text{ср}}^i - v_t^i) = \sum_{\text{вых}}^j F_j (u_{\text{ср}}^j - v_t^j), \quad (26б)$$

где i, j – соответственно параметры концов элементов, “входящие” и “выходящие” из точки во время обхода элементов согласно МНП [8]. Данное выражение справедливо как для узла соединения нескольких трубопроводных элементов (например, в тройниках и патрубках), так и для точки соединения двух труб. В последнем случае, если $F_i = F_j$, то (26б) упрощается к виду

$$u_{\text{ср}}^i = u_{\text{ср}}^j. \quad (26в)$$

Выражения (26a) и (26б), записанные для конца одной трубы, формируют два возможных варианта краевых условий для гидродинамических параметров:

полученное из (26a) условие соответствует случаю, когда к концу трубы присоединен сосуд бесконечного объема, в результате независимо от величины смещения $u_{\text{ср}}$ пульсация давления в этом конечном сечении будет равна нулю,

$$P_{\text{ср}} = 0; \quad (27a)$$

полученное из (26б) условие соответствует закрытой с торца трубе:

$$u_{\text{ср}} - v_t = 0; \quad (27\text{б})$$

для неподвижной трубы слагаемое v_t в (27б) необходимо исключить.

В общем случае краевое условие можно записать в параметрическом виде

$$P_{\text{ср}} + \beta_1(u_{\text{ср}} - v_t) = \chi_1, \quad (27\text{в})$$

где β_1, χ_1 – параметры, задающие соотношения между $P_{\text{ср}}$ и $u_{\text{ср}}$.

Уравнение непрерывности для механических сил в узле соединения нескольких элементов хорошо известно и основано на условии равновесия узла. Для учета пульсации давления $P_{\text{ср}}$ в соответствующих уравнениях вместо осевых сил \vec{N}_x следует записать полную осевую силу $\vec{N}_n = \vec{N}_x + FP_{\text{ср}}\vec{t}$, где \vec{t} – касательный вектор в сечении; слагаемое $FP_{\text{ср}}$ представляет собой усилие “в свету” от внутреннего давления. Таким образом, уравнение равновесия узла с учетом $P_{\text{ср}}$ записывается в следующем виде:

$$\sum_{\text{вх}}^i ((\vec{N}_x^i + F_i P_{\text{ср}}^i \vec{t}_i) + \vec{Q}_y^i + \vec{Q}_z^i) = \sum_{\text{вых}}^j ((\vec{N}_x^j + F_j P_{\text{ср}}^j \vec{t}_j) + \vec{Q}_y^j + \vec{Q}_z^j). \quad (28)$$

Анализ уравнения (28) с учетом (26а) показывает, что дополнительные силы от давления возникают при изменениях площади сечения трубы в местах сопряжения элементов, в том числе в случае закрытого края трубы, и направления вектора касательной \vec{t} , что кроме поворотного элемента имеет место в тройниках.

Отметим, что данное выражение справедливо как для гармонических колебаний среды и трубопровода, так и для их статического состояния.

Исследуем взаимодействие трубы со средой на поворотных элементах. Учитывая, что среда характеризуется только давлением (силой) и перемещением, уравнения для углов поворота и моментов останутся без изменений, т.е. в виде (6) [9]. Сначала рассмотрим уравнения равенства сил. Итак, прирост механических сил $\vec{Q}_{\text{тр}}$ и силы Q от давления будет

$$\Delta \vec{Q} = \left(\frac{d\vec{Q}_{\text{тр}}}{ds} + P_{\text{ср}} F \vec{t}(s) \right) R \Delta \theta = 0. \quad (29)$$

Поскольку давление не зависит от координаты (считается, что поворотный элемент имеет бесконечно малую длину), система (29) сводится к системе вида (5) [9], за исключением второго уравнения:

$$dQ_n/d\theta + Q_t - \eta Q_k + P_{\text{ср}} F = 0. \quad (30)$$

Решением системы (5) [9] с учетом (30) будет модифицированное решение (6) [9]:

$$\left\{ \begin{aligned} Q_n(\theta) &= Q_{n,0} \cos m\theta + \frac{\eta Q_{k,0} - Q_{t,0} - P_{cp}F}{m} \sin m\theta; \\ Q_t(\theta) &= \frac{\eta^2 Q_{t,0} + \eta Q_{k,0} - P_{cp}F}{m^2} + \frac{Q_{n,0}}{m} \sin m\theta + \\ &+ \frac{Q_{t,0} - \eta Q_{k,0} + P_{cp}F}{m^2} \cos m\theta; \\ Q_k(\theta) &= -\frac{\eta Q_{n,0}}{m} \sin m\theta - \frac{\eta(Q_{t,0} - \eta Q_{k,0} + P_{cp}F)}{m^2} \cos m\theta + \\ &+ \frac{\eta Q_{t,0} + Q_{k,0} + \eta P_{cp}F}{m^2}, \end{aligned} \right. \quad (31)$$

где для краткости записи введено обозначение $m = \sqrt{1 + \eta^2}$.

В частности, для плоского криволинейного элемента $\eta = 0$ имеем

$$Q_{y1} = Q_{y0} \cos \theta - N_0 \sin \theta - P_{cp}F \sin \theta; \quad (32a)$$

$$N_1 = N_0 \cos \theta + Q_{y0} \sin \theta - P_{cp}F(1 - \cos \theta). \quad (32b)$$

Выражения (31) и (32) записаны в форме, позволяющей их непосредственное использование при заполнении разрешающей матрицы поворотного элемента.

Взаимодействие трубы со средой проявляется для перемещений среды на поворотных элементах. Уравнение (26б) описывает влияние смещения трубопровода на смещение среды в местах соединения элементов. Для получения соответствующих зависимостей рассмотрим обобщенное векторное смещение жидкости, которое записывается таким образом:

$$\vec{\Pi}_{cp} = u_{cp} \vec{i} + W_{n,cp} \vec{n} + W_{k,cp} \vec{k}. \quad (33)$$

Полагаем, что дифференциал этого выражения по длине поворотного элемента также равен нулю. Кроме того, нормальные перемещения среды равны нормальным перемещениям трубы. С учетом этого продифференцируем выражение (33) по элементу дуги dS поворотного элемента [9]. В соответствии с правилами дифференцирования выражений вида (29) [9] получим

$$du_{cp} - W_n(\theta)d\theta = 0, \quad (34)$$

где $W_n(\theta)$ – перемещение трубы.

Проинтегрировав данное выражение с использованием зависимости между W_n и v_t на концах поворотного элемента [9], получим следующее выражение для смещения среды:

$$u_{cp1} - u_{cp0} = v_{t1} - v_{t0}, \quad (35)$$

где индекс 0 обозначает, что значение v_t используется для начального сечения поворотного элемента, 1 – для конечного.

Моделирование гидродинамических колебаний осуществляется путем добавления в МНП для механических колебаний двух неизвестных параметров для каждого сечения, двух уравнений связи для каждого элемента, по два уравнения непрерывности параметров для каждой границы между элементами и краевых условий. При этом расчетная схема и способ построения математической модели остаются неизменными. Поскольку все 14 параметров напряженно-деформированного состояния среды и трубы (12 механических и два гидродинамических) связаны между собой, связанные ГМК следует моделировать “в целом”, а не разбивать анализ колебаний на подзадачи.

В некоторых случаях необходимо провести отдельный анализ гидродинамических колебаний среды без учета влияния смещения трубы на среду. Это легко сделать при использовании уравнений (24), (26), (35), записанных без балочных компонент. Подобный “упрощенный” анализ позволяет находить гидродинамические собственные частоты колебаний среды в трубопроводе заданной конфигурации без учета смещений трубы при колебаниях, что актуально, например, для тестирования МНП и сопоставления полученных результатов с данными, приведенными в литературных источниках.

4. Пример анализа связанных гидромеханических колебаний. Для проверки правильности реализации взаимного влияния гидродинамических и механических колебаний рассмотрен ряд тестовых примеров. В полученных решениях проверялось выполнение всех уравнений связи, граничных условий и условий сопряжения. Так, в [10] исследовалась система, представленная на рис. 2.

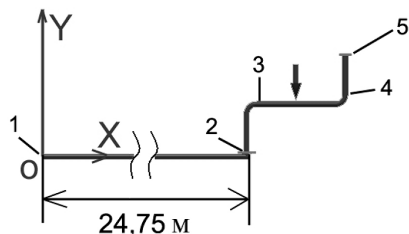


Рис. 2. Модель трубопроводной системы со средой.

Данная трубопроводная система состоит из последовательно соединенных прямолинейного участка длиной 24,75 м, присоединенного к нему под углом 90° прямого участка длиной 1,95 м,гиба с радиусом дуги 0,45 м и углом поворота 90° , прямого участка длиной 3,88 м,гиба и прямого участка длиной 1,95 м. Суммарная длина системы составляет 33,94 м, внешний радиус труб $R_{\text{вн}} = 0,15$ м, толщина стенки $t = 5$ мм, податливость гибов $K = 15,95$, объемная упругость среды $K_{\text{ср}} = 1000$ МПа, плотность среды $\rho_{\text{ср}} = 1000$ кг/м³, плотность металла $\rho = 7800$ кг/м³, модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Без учета деформации сечения скорость распространения волны гидроудара составляет 1000 м/с (скорость звука в жидкости), с учетом деформации – 880,5 м/с. Точки 2 и 5 на прямых участках механически жестко закреплены, гидродинамические краевые условия в т. 1 и 5 следующие:

$P_{\text{ср}} = 0$ (рис. 2). В [10] механические и связанные гидромеханические колебания моделировались только для части трубы от т. 2 до т. 5, а участок от т. 1 до т. 2 является чисто гидродинамическим.

На рис. 2 стрелкой показано место, где трубопровод нагружается парой сил, действующих в направлении осей OX и OY (продольное и поперечное вертикальное направления). Величина сил переменная и зависит от частоты следующим образом: $F_x = F_y = 16H/\sqrt{\nu'}$, где ν' – частота, Гц. Путем численного эксперимента определяли собственные частоты связанных гидромеханических колебаний, амплитуду давлений в т. 3 и 4 (рис. 2) в зависимости от частоты вынуждающих сил. В [10] получены такие значения собственных частот:

- гидродинамические – 14,7; 29,5 Гц;
- механические – 14,8; 26 Гц;
- частоты связанных колебаний – 12,7; 18,04; 26,3 Гц.

Результаты первоначальных расчетов собственных частот с помощью МНП следующие:

- гидродинамические – 12,88; 25,76; 38,63 Гц;
- механические – 14,75 Гц; 26,48 Гц;
- частоты связанных колебаний, полученные с учетом пуассонового взаимодействия – 12,07; 17,79; 27 Гц, и по упрощенным уравнениям (24) без учета такового – 11,73; 17,13; 25,66 Гц.

При этом частоты механических колебаний трубопровода рассчитываются с учетом добавочной массы жидкости (66 кг на погонный метр трубопровода), которая превышает массу металла (36 кг на метр), в соответствии с данными [10].

Различие между гидродинамическими собственными частотами, полученными МНП и в [10], обусловлено тем, что в [10] не учитывалась деформация поперечного сечения трубы под действием давления и, как следствие, уменьшение скорости распространения гидроудара. Подобный подход [10] учитывает пуассоново взаимодействие, но не учитывает изменение скорости гидроудара вследствие деформации $W_{\text{тр}}$, что несколько противоречиво: при отсутствии $W_{\text{тр}}$ не должен возникать и эффект Пуассона.

Тем не менее нами были получены упрощенные уравнения вида (18), (21), не учитывающие радиальную деформацию стенки трубы. При моделировании без учета пуассонового взаимодействия в уравнениях (24) также использовалось упрощенное выражение (26). Расчеты, проведенные такими модификациями МНП, показывают более близкие к полученным в [10] результаты:

- гидродинамические частоты – 14,63; 29,25; 43,89 Гц;
- частоты связанных колебаний, полученные с учетом пуассонового взаимодействия – 12,76; 18,14; 26,43 Гц, и по упрощенным уравнениям (24) без учета такового – 12,69; 18,1; 26,43 Гц.

Отметим, что для приведенных параметров среды и трубы различие в результатах, полученных по модели, учитывающей эффект Пуассона, и упрощенной, незначительное. Однако целесообразно всегда учитывать данный эффект и использовать полные уравнения (18), (21), что позволит исключить анализ соотношений между a и d , а также между ν_t и $u_{\text{ср}}$, который усложняет практические расчеты.

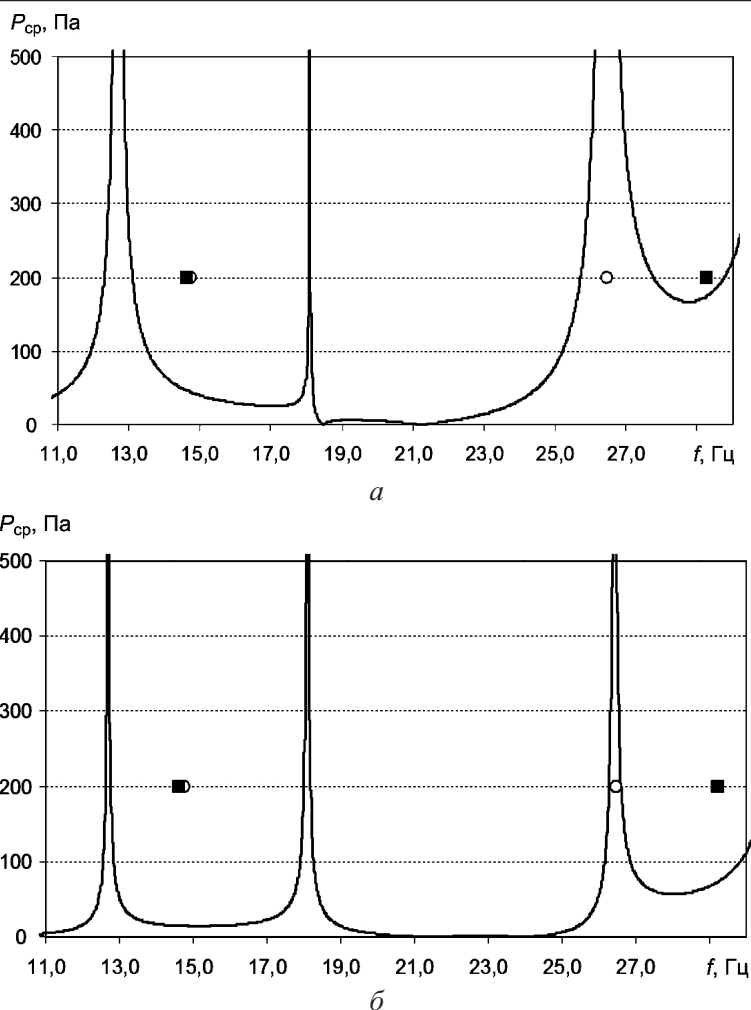


Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики для давления в т. 3 (а) и 4 (б). Темные точки – собственные гидродинамические частоты; светлые – собственные механические частоты.

На рис. 3 приведены амплитудно-частотные характеристики для давления в т. 3 и 4 (рис. 2), которые близки к полученным в [10]. Заметим, что из-за сложного взаимного влияния гидродинамических и механических колебаний значения собственных частот связанных колебаний (резонансные всплески на графиках давлений) не совпадают со значениями гидродинамических и механических частот и не являются средними между ними.

Выводы

1. Введение двух дополнительных переменных (параметры смещения среды и пульсации давления) в МНП позволяет учитывать колебания транспортируемой среды при анализе вибрации трубопроводов. При этом метод расчета и способ построения моделей не изменились. Взаимное влияние среды и трубы учитывается путем модификации существующих уравнений связи неизвестных параметров между элементами.

2. Для учета пуассонового взаимодействия при совместных колебаниях транспортируемой среды и трубопровода получены дифференциальные уравнения, аналогичные уравнениям Скалака. Получены решения этих уравнений в форме, пригодной для программирования в МНП. Преимуществом таких решений перед аналогичными является то, что система уравнений не вырождается при всех параметрах среды, трубы и коэффициенте Пуассона μ . Кроме того, данные выражения весьма удобны для практического использования.

3. Метод проверен на ряде тестовых моделей как чистых гидродинамических колебаний среды, так и смешанных.

Резюме

Представлено модифікацію методу початкових параметрів, який використовується для врахування гармонічних коливань середовища, що транспортується трубопроводом. До існуючих параметрів, що описують механічні коливання трубопроводу, додано параметри зміщення середовища та пульсації його тиску. Для даних гідродинамічних параметрів отримано рівняння зв'язку в межах розрахункових елементів та спряження параметрів на границях між елементами. Записані рівняння спряження гідродинамічних і механічних параметрів дозволяють враховувати їх вплив один на одного та аналізувати зв'язані гідромеханічні коливання. У цілому алгоритм методу початкових параметрів та метод побудови розрахункової моделі лишаються без зміни. На ряді прикладів показано точність запропонованих методів, що використовуються для аналізу власних і вимушених коливань середовища в трубопроводі як з урахуванням взаємного впливу середовища та труби, так і без.

1. *Lavooij C. S. and Tijsseling A. S.* Fluid-structure interaction in liquid-filled piping systems // *J. Fluids Struct.* – 1991. – **5**. – P. 573 – 595.
2. *Kratz J., Munch W., and Ungar K.* The influence of fluid-structure interaction on pipe system loads // *SMiRT-17*. – 2003. – P. 5 – 10.
3. *Skalak R.* An extension of the theory of waterhammer // *Trans. ASME*. – 1956. – **78**. – P. 105 – 116.
4. *Tijsseling A. S.* Fluid-structure interaction in liquid-filled pipe systems: A review // *J. Fluids Struct.* – 1996. – **10**. – P. 109 – 146.
5. *De Jong C. A. F.* Analysis of Pulsations and Vibrations in Fluid-Filled Pipe Systems: Ph.D. Thesis. – Eindhoven University of Technology, Department of Mechanical Engineering. – 1994. – 170 p.
6. *Орыняк И. В., Радченко С. А., Батура А. С.* Расчет собственных и вынужденных колебаний трубопроводной системы. Сообщ. 1. Анализ колебаний пространственной стержневой системы // *Пробл. прочности*. – 2007. – № 1. – С. 79 – 93.
7. *Орыняк И. В., Радченко С. А., Батура А. С.* Расчет собственных и вынужденных колебаний трубопроводной системы. Сообщ. 2. Динамическая жесткостьгиба трубы // *Там же*. – № 2. – С. 52 – 71.

8. Орыняк И. В., Торон В. М., Ромащенко В. А., Жураховский С. В. Расчет пространственного разветвленного трубопровода в программном комплексе оценки прочности оборудования АЭС // Там же. – 1998. – № 2. – С. 87 – 100.
9. Орыняк И. В., Батура А. С., Радченко С. А. Применение метода начальных параметров к анализу связанных гидромеханических колебаний трубопроводных систем. Сообщ. 1. Вибродиагностика трубопроводов при механических колебаниях // Там же. – 2011. – № 6. – С. 58 – 70.
10. Moussou P., Vaugrante P., Guivarch M., and Seligmann D. Coupling effects in a two elbows piping system // Flow Induced Vibrations. – Rotterdam, 2000. – P. 579 – 586.

Поступила 11. 01. 2010