ISSN 1028-7507 Акустичний вiсник. 2003. Том 6, N 1. С. 60 – 66

УДК 539.3

# ОБОБЩЕННЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ В ТЕОРИИ ВЯЗКОЙ ПО НАВЬЕ-СТОКСУ УПРУГОЙ СРЕДЫ

**В. Н. САЛТАНОВ[*], Н. В. САЛТАНОВ[**]**

*[*]Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко*
*[**]Институт гидромеханики НАН Украины, Киев*

*Получено 17.12.2002*

Развиты представления общих решений уравнения Ламе для упругой среды, дополненного вязкими силами по Навье – Стоксу с использованием обобщенных потенциалов. Получены уравнения для обобщенных потенциалов и выражения для смещений. Записан аналог представления Дебая – Морса – Фешбаха, переходящий при отсутствии вязких сил в классическое представление Дебая – Морса – Фешбаха. Получены выражения для декрементов затухания упругих колебаний в бесконечном цилиндре и шаре.

Розвинуті представлення загальних розв'язків рiвняння Ламе для пружного середовища, доповненого в'язкими силами за Нав'є – Стоксом з використанням узагальнених потенцiалiв. Одержанi рiвняння для узагальнених потенцiалiв i вирази для змiщень. Записаний аналог представлення Дебая – Морса – Фешбаха, який при вiдсутностi в'язких сил переходить у класичне представлення Дебая – Морса – Фешбаха. Отриманi вирази для декрементiв затухання пружних коливань у нескiнченному цилiндрi й кулi.

Presentations of general solutions of the Lame equations for elastic medium supplemented with the Navier – Stokes viscous forces are developed using the generalized potentials. The equations for generalized potentials and the expressions for displacements are obtained. The analog of the Debay – Morse – Feshbach presentation, transferring into classical Debay – Morse – Feshbach presentation, is written. The expressions for decrements of attenuation of elastic oscillations are obtained for an infinite cylinder and a spherical solid.

## ВВЕДЕНИЕ

В линейных и нелинейных математических моделях, используемых в теории упругости, теории электромагнетизма, гидромеханике и других естественных науках, важное место занимает проблема получения аналитических представлений общих решений соответствующих дифференциальных уравнений на основе различных разрешающих функций [1 – 25]. Исследование указанной проблемы важно как для изучения внутренней структуры и особенностей исходных систем уравнений, так и для решения прикладных задач.

В теории упругости к числу наиболее распространенных разрешающих функций относятся потенциалы Гельмгольца – Стокса – Грина – Ламе, Дебая – Морса – Фешбаха, Папковича – Нейбера, Галеркина, Юнгдала и другие. В теории электромагнетизма фундаментальное значение имеют электрический и магнитный потенциалы, а также электрический и магнитный потенциалы Герца. В гидромеханике широко применяются потенциалы скорости и ускорения, разрешающие функции Клебша и Соболева, разрешающие функции газодинамических течений в переменных годографа и спидографа, разрешающие функции Ламба и Хаппеля – Бреннера в теории стоксовых течений. Особо следует отметить также разрешающую функцию частицы в теории однопараметрических нестационарных течений газа, а также функцию тока в теориях двухпараметрических стационарных течений газа и двухпараметрических стационарных и нестационарных течений несжимаемой жидкости. Для трехмерных течений газа в стационарном случае существуют две разрешающие функции Гиза – Скобелкина [21, 24, 25], с помощью которых определяются компоненты скорости и расход газа через трубку тока. В нестационарном трехмерном случае вводятся три разрешающие функции Давыдова – Йи [6, 25], через которые выражаются плотность и компоненты скорости.

Учитывая указанное выше многообразие разрешающих функций (в том числе собственно потенциалов), авторы данной статьи используют термин "обобщенный потенциал", понимая его в весьма широком смысле.

В ряде случаев применение обобщенных потенциалов (например, функции частицы, функции тока, обобщенного потенциала в случае однородных винтовых течений и других) приводит к понижению порядка исходной системы уравнений. Это особенно важно с точки зрения численных методов. Зачастую использование обобщенных потенциалов дает возможность использовать вариационные принципы. В частности, такой подход расширяет возможности применения прямых методов (Ритца, Канторовича, конечных элементов и других) к анализу задач математической физики.

Нередко оказывается удобным [1 – 3, 8, 9, 17] использование редукции основной начально-краевой задачи к скалярной задаче для одного уравнения, определяющего обобщенный суперпотенциал. Как отмечено в работе [3], в наибольшей степени преимущества, предоставляемые таким подходом, проявляются при использовании численных методов. Это проявляется в сокращении количества искомых функций до одной скалярной (обобщенного суперпотенциала), что приводит к значительной экономии машинного времени и ресурса используемых ЭВМ [1, 3, 8].

Цель данной статьи – развитие представлений общих решений уравнения Ламе, дополненного вязкими силами по Навье – Стоксу, с использованием обобщенных потенциалов типа упомянутых в [13, 15, 17], а также рассмотрение с помощью построенных представлений некоторых примеров затухания колебаний, обусловленных вязким трением.

## 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОБОБЩЕННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ В ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКОМ НЕСТАЦИОНАРНОМ СЛУЧАЕ

Зачастую скорость макроскопического движения в упругом теле невелика, так что диссипация энергии оказывается весьма малой. В таких случаях движение может быть описано посредством обычных уравнений движения, в которых к действующим в теле силам следует добавить вязкую силу, являющуюся линейной функцией пространственных производных от скоростей [20, 26, 27]. Оставаясь в рамках этих допущений, обратимся к уравнению Ламе, дополненному вязкой силой по аналогии с уравнением Навье – Стокса [20, 26, 27]:

$$\begin{gathered}
\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} - \varepsilon\left[\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u} + \frac{\partial^2\vec{u}}{\partial\tau^2} + \right. \\
\left. +(a\operatorname{rot}\operatorname{rot} - b\operatorname{grad}\operatorname{div})\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau}\right] = 0, \\
\varepsilon = \frac{c_s^2}{c_l^2}, \qquad d\tau = c_s dt, \qquad k_* = \frac{\omega_*}{c_s}, \\
a = \frac{\eta}{\rho c_s}, \qquad b = \frac{\zeta}{\rho c_s} + \frac{4\eta}{3\rho c_s}.
\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $\vec{u}$ – динамическая составляющая перемещения (смещение); $c_s$ и $c_l$ – скорости распространения волн сдвига и сжатия соответственно; $\rho$ – плотность среды; $\eta$ и $\zeta$ – динамические коэффициенты вязкости. Для удобства дальнейшего рассмотрения придадим рассматриваемому уравнению несколько более компактную форму:

$$\begin{gathered}
D_\tau^b \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} - \varepsilon\left(D_\tau^a \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u} + \frac{\partial^2\vec{u}}{\partial\tau^2}\right) = 0, \\
D_\tau^a \equiv 1 + a\frac{\partial}{\partial\tau}, \qquad D_\tau^b \equiv 1 + \varepsilon b\frac{\partial}{\partial\tau}.
\end{gathered} \tag{2}$$

Смещение $\vec{u}$ представим в виде [13, 15, 16]:

$$\vec{u} = \nabla\Phi_S + \operatorname{rot}(q\chi\vec{e}_1) + qS\vec{e}_1, \qquad q = q(x_1). \tag{3}$$

Здесь $\Phi_S$, $\chi$ и $S$ – обобщенные потенциалы; $\vec{e}_1$ – единичный вектор к касательной координатной линии $x_1$. Множитель $q(x_1)$ считается заданной функцией своего аргумента. Подставим выражение (3) в уравнение (1) и потребуем, чтобы получившееся при этом соотношение имело структуру правой части выражения (3). В результате придем к следующим условиям для коэффициентов Ламе:

$$h_1 = 1, \qquad \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{h_2}{h_3} = 0. \tag{4}$$

Пусть условия (4) выполнены. Тогда из соотношения, полученного после подстановки выражения (3) в уравнение (1), следует

$$\begin{gathered}
\left(D_\tau^b\Delta - \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\Phi_S + \\
+\left[D_\tau^b\kappa_h + \left(D_\tau^b - \varepsilon D_\tau^a\right)\frac{\partial}{\partial x_1}\right]qS = 0, \\
\kappa_h \equiv \frac{1}{h_3^2}\frac{\partial h_3^2}{\partial x_1},
\end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered}
\left(D_\tau^a\Delta^* - \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\left\{q\chi, qS\right\} = 0, \\
\Delta^* \equiv \Delta - \kappa_h\frac{\partial}{\partial x_1}.
\end{gathered} \tag{6}$$

Здесь $\Delta$ – оператор Лапласа. Таким образом, соотношение (3) выражает смещение $\vec{u}$ через три обобщенных потенциала $\Phi_S$, $\chi$ и $S$, удовлетворяющие трем уравнениям третьего порядка (5), (6). Важно, что среди приведенных в курсе [10] ортогональных систем, в которых переменные в уравнениях вида (5), (6) разделяются, условиям (4) удовлетворяют прямоугольная система ($x_1 = x$, $y$ или $z$), три цилиндрических (круговая, эллиптическая и параболическая, $x_1 = z$), а также сферическая и коническая системы ($x_1 = R$, где $R$ – радиус). Отметим, что обобщенный потенциал

$S$ аналогичен обобщенным газодинамическим потенциалам [12] и обобщенному потенциалу поля Громеки – Жуковского [17]. Кроме того, произвол в выборе функции $q(x_1)$ может быть использован для преобразования и упрощения представления (3), (5), (6). В частности, в декартовой и трех цилиндрических системах координат, указанных выше, $\kappa_h=0$. Полагая $x_1=z$, $q=1$, выражение (3) и уравнения (5), (6) запишем в виде

$$\vec{u}=\nabla\Phi_S+\mathrm{rot}(\chi\vec{e}_z)+S\vec{e}_z,$$

$$\left(D_\tau^b-\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\Phi_S+\left(D_\tau^b-\varepsilon D_\tau^a\right)\frac{\partial S}{\partial z}=0,$$

$$\left(D_\tau^a\Delta-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\Big\{\chi,S\Big\}=0.$$

Для сферической и конической систем координат положим $q=R$. Тогда выражение (3) и уравнения (5), (6) также упрощаются:

$$\vec{u}=\nabla\Phi_S+R\big[\mathrm{rot}(\chi\vec{e}_R)+S\vec{e}_R\big],$$

$$\left(D_\tau^b\Delta-\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\Phi_S+$$
$$+\left[\left(D_\tau^b-\varepsilon D_\tau^a\right)R\frac{\partial}{\partial R}+3D_\tau^b-\varepsilon D_\tau^a\right]S=0,$$

$$\left(\Delta-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\Big\{\chi,S\Big\}=0.$$

## 2. АНАЛОГ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЕБАЯ – МОРСА – ФЕШБАХА

Обратимся к уравнению (5). Положим

$$\Phi_S=\Phi+\frac{\partial q\Psi}{\partial x_1}\,, \qquad (7)$$

где $\Phi$ и $\Psi$ – новые обобщенные потенциалы, причем потенциал $\Phi$ удовлетворяет следующему линейному уравнению в частных производных третьего порядка:

$$\left(D_\tau^b\Delta-\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\Phi=0. \qquad (8)$$

После подстановки выражения (7) в уравнение (5), учтем в получившемся соотношении уравнение (8) и равенство

$$\Delta\frac{\partial q\Psi}{\partial x_1}=\left(\kappa_h+\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\Delta^*\big(q\Psi\big) \qquad (9)$$

(в его справедливости можно убедиться с помощью условий (4)). В результате имеем

$$D_\tau^b\left(\kappa_h+\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\Big(\Delta^*q\Psi+qS\Big)-$$
$$-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_1}\left(D_\tau^a qS+\frac{\partial^2 q\Psi}{\partial\tau^2}\right)=0. \qquad (10)$$

Уравнение (10) будет удовлетворено тождественно, если положить

$$qS=-\Delta^*q\Psi, \qquad (11)$$

$$\left(D_\tau^a\Delta^*-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)q\Psi=0. \qquad (12)$$

Подставим выражения (7) и (11) в представление (3) и воспользуемся соотношением

$$\nabla\frac{\partial(q\Psi)}{\partial x_1}-\Delta^*(qS)\vec{e}_1=\mathrm{rotrot}(q\Psi\vec{e}_1) \qquad (13)$$

(оно также является следствием условий (4)). В результате получаем

$$\vec{u}=\nabla\Phi+\mathrm{rot}(q\chi\vec{e}_1)+\mathrm{rotrot}(q\Psi\vec{e}_1). \qquad (14)$$

Таким образом, соотношение (14) выражает смещение $\vec{u}$ через три обобщенных потенциала $\Phi$, $\chi$ и $\Psi$, удовлетворяющие трем независимым линейным уравнениям в частных производных третьего порядка (6), (8) (12). Как и ранее, произвол в выборе функции $q(x_1)$ может быть использован для упрощения представления (6), (8), (12), (14).

В частности, в декартовой и указанных трех цилиндрических системах координат, полагая $x_1=z$, $q=1$, выражение (14) и уравнения (6), (12) запишем в виде

$$\vec{u}=\nabla\Phi+\mathrm{rot}(\chi\vec{e}_z)+\mathrm{rot\,rot}(\Psi\vec{e}_z),$$

$$\left(D_\tau^a\Delta-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\Big\{\chi,\Psi\Big\}=0.$$

Заметим, что вид уравнения (8) не меняется.

В случае сферической и конической систем координат положим $q=R$. Тогда выражение (14) и уравнения (6), (12) также упрощаются:

$$\vec{u}=\nabla\Phi+R\mathrm{rot}(\chi\vec{e}_R)+\mathrm{rot\,rot}(R\Psi\vec{e}_R),$$

$$\left(D_\tau^a\Delta-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\Big\{\chi,\Psi\Big\}=0.$$

Уравнение (8) не изменяется.

При отсутствии сил вязкости ($a=0$, $b=0$) уравнения (6), (8), (12) принимают вид

$$\left(\Delta-\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\Phi=0, \qquad (15)$$

$$\left(\Delta^* - \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\left\{q\chi, q\Psi\right\} = 0. \qquad (16)$$

В декартовой и цилиндрических системах координат при $q=1$, а в сферических и конических системах при $q=R$ уравнения (16) записываются так:

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\left\{\chi, \Psi\right\} = 0. \qquad (17)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае все три обобщенных потенциала $\Phi$, $\chi$ и $\Psi$ удовлетворяют независимым волновым уравнениям (15) и (17). Представление (14), (15), (17) является классическим представлением Дебая – Морса – Фешбаха [7, 10].

## 3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОБОБЩЕННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ В ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОМ НЕСТАЦИОНАРНОМ СЛУЧАЕ

Обратимся к уравнению (2). Рассмотрение проведем в ортогональной системе координат $(x_1, x_2, x_3)$. При этом смещение $\vec{u}$ и коэффициенты Ламе $h_m$ ортогональной системы координат полагаем не зависящими от координаты $x_3$:

$$\frac{\partial\{\vec{u}, h_m\}}{\partial x_3} = 0, \qquad m = 1, 2, 3. \qquad (18)$$

Смещение $\vec{u}$ представим в виде

$$\vec{u} = \nabla\Phi + \mathrm{rot}\left(\Psi\frac{\vec{e}_3}{h_3}\right) + q_3\frac{\vec{e}_3}{h_3}, \qquad q_3 \equiv h_3 u_3. \quad (19)$$

Здесь $\Phi$ – обобщенные потенциалы; $u_3$ – третья компонента смещения. Подставляя выражение (19) в левую часть уравнения (2) и учитывая условия (18), убеждаемся, что левая часть получившегося соотношения имеет структуру правой части выражения (19). Приравнивая к нулю стоящие под знаком градиента и ротора выражения из левой части полученного соотношения и выражение, являющееся множителем при $\vec{e}_3$, запишем

$$\left(D^b_\tau\Delta - \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\Phi = 0, \qquad (20)$$

$$\left(D^a_\tau D - \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\left\{\Psi, q_3\right\} = 0,$$
$$D \equiv \frac{h_3}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{h_2}{h_3 h_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{h_1}{h_3 h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right). \qquad (21)$$

Таким образом, с учетом предположений (18) уравнение (2) сведено к решению трех независимых линейных уравнений в частных производных третьего порядка (20) и (21), служащих для определения трех величин $\Phi$, $\Psi$ и $q_3$. Если эти величины найдены, то смещение $\vec{u}$ определяется с помощью выражения (19).

## 4. ВЯЗКОЕ ЗАТУХАНИЕ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ И КОЛЕБАНИЙ С ДИЛАТАЦИЕЙ В БЕСКОНЕЧНОМ ЦИЛИНДРЕ

Рассмотрение указанных примеров проведем в цилиндрической системе координат $(z, r, \varphi)$, ось $z$ которой совпадает с осью цилиндра. При этом предполагается наличие азимутальной симметрии $(\partial/\partial\varphi \equiv 0)$.

Рассмотрим затухание крутильных колебаний. При $\Phi=0$ и $\Psi=0$ уравнения (20) для $\Phi$ и (21) для $\Psi$ удовлетворяются тождественно. Уравнение (21) для величины $q_3$ принимает следующий вид:

$$\left[\left(1 + a\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\left(r\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right]q_\varphi = 0,$$
$$q_\varphi \equiv q_3, \qquad q_\varphi = r u_\varphi. \qquad (22)$$

Частное решение уравнения (22), ограниченное при $r=0$, получаемое методом разделения переменных, записывается как

$$q_\varphi = q^0_\varphi r J_1(k_\perp r)\sin k_z z e^{-\gamma_s t}\cos\omega_s t,$$
$$\gamma_s = c_s a k^2/2, \qquad \omega_s = c_s k\sqrt{1 - a^2k^2/4}, \qquad (23)$$
$$k^2 = k^2_\perp + k^2_z.$$

Здесь $q^0_\varphi$ – постоянная; $J_1$ – функция Бесселя первого порядка; $k^2$ – положительная постоянная разделения; $k_z$ и $k_\perp$ – продольные и поперечные к оси $z$ составляющие волнового вектора.

Пусть поверхность цилиндра "зажата":

$$r = r_0, \qquad q_\varphi = 0, \qquad (24)$$

где $r_0$ – радиус цилиндра. Подставляя в условие (24) выражение (23) для $q_\varphi$, получаем

$$k_\perp = \mu_m/r_0, \qquad m = 1, 2, \ldots, \qquad (25)$$

где $\mu_m$ – корни уравнения $J_1(\mu_m)=0$. В частности, $\mu_1=3.832$. С учетом вида (1) для величины $a$, а также выражений (23) для $k^2$ и (25) для $k_\perp$, из соотношения (23) для $\gamma_s$ имеем

$$\gamma_s = \frac{\eta}{2\rho}\left(\frac{\mu^2_m}{r^2_0} + k^2_z\right) \qquad (26)$$

Декремент затухания колебаний $\gamma_s$, обусловленный вязкостью, является нарастающей функцией

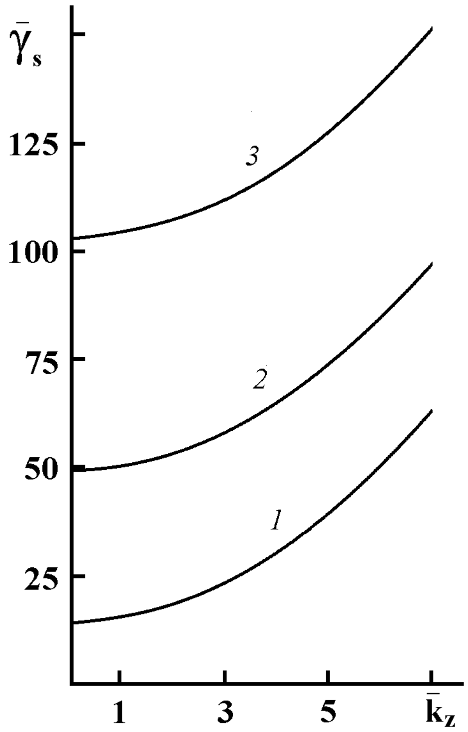


Рисунок. Зависимость декремента вязкого затухания крутильных колебаний в бесконечном цилиндре от продольного волнового числа при различных поперечных волновых числах:
$1$ – $\mu_1=3.832$, $2$ – $\mu_2=7.016$, $3$ – $\mu_3=10.173$

величин $\mu_m$ и $k_z$ и убывающей функцией радиуса $r_0$. В безразмерном виде соотношение (26) записывается как

$$\bar\gamma_s=\mu_m^2+\bar k_z^2,$$
$$\bar\gamma_s\equiv\frac{2\rho r_0^2\gamma}{\eta},\qquad \bar k_z\equiv k_z r_0. \tag{27}$$

Зависимости $\bar\gamma_s=\bar\gamma_s(\bar k_z)$ для $m=1,2,3$ представлены на рисунке.

Рассмотрим затухание колебаний с дилатацией. При $\Psi=0$ и $q_3=0$ уравнения (21) удовлетворяются тождественно. Уравнение (20) в цилиндрической системе координат принимает следующий вид:

$$\left[\left(1+b\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right]\Phi=0. \tag{28}$$

Ограниченное при $r=0$ частное решение уравнения (28), получаемое методом разделения переменных, имеет структуру

$$\Phi=\Phi_0 J_0(k_\perp r)\sin k_z z e^{-\gamma_l t}\cos\omega_l t,$$
$$\gamma_l=c_s b k^2/2,\qquad \omega_l=c_s k\sqrt{1-\varepsilon b^2k^2/4}, \tag{29}$$

Здесь $\Phi_0$ – постоянная; $J_0$ – функция Бесселя нулевого порядка; величины $k^2$, $k_z$ и $k_\perp$ имеют тот же смысл, что и в соотношениях (23).

Пусть на поверхности цилиндра выполнено условие

$$r=r_0,\qquad u_r=\frac{\partial\Phi}{\partial r}=0. \tag{30}$$

Подставляя в условие (30) выражение (29) для потенциала $\Phi$, приходим к соотношению (25). С учетом вида (1) для величины $b$, а также выражений (23) для $k^2$ и (25) для $k_\perp$, из соотношения (29) для $\gamma_l$ получаем

$$\gamma_l=\frac{1}{2\rho}\left(\frac{4}{3}\eta+\zeta\right)\left(\frac{\mu_m^2}{r_0^2}+k_z^2\right). \tag{31}$$

В безразмерном виде соотношение (31) имеет вид

$$\bar\gamma_l=\mu_m^2+\bar k_z^2\equiv\frac{6\rho r_0^2\gamma_l}{4\eta+3\zeta}. \tag{32}$$

При этом для величины $\bar k_z$ справедливо выражение (27).

Из выражений (26) и (31) следует, что декремент затухания колебаний с дилатацией в $4/3+\zeta/\eta$ раз больше декремента затухания крутильных колебаний.

## 5. ВЯЗКОЕ ЗАТУХАНИЕ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ И КОЛЕБАНИЙ С ДИЛАТАЦИЕЙ В ШАРЕ

Ограниченное при $R=0$ частное решение уравнения (21) для $q_3$ в сферических координатах $(R,\Theta,\varphi)$, получаемое методом разделения переменных, имеет следующий вид:

$$u_\varphi=\frac{u_\varphi^0}{\sqrt{\bar R}}j_{n+\frac12}(\bar R)P_n^{(1)}(\cos\Theta)e^{-\gamma_s t}\cos\omega_s t,$$
$$q_3=R\sin\Theta u_\varphi\qquad \bar R=kR,\qquad n=0,1,2,\ldots \tag{33}$$

Здесь $u_\varphi^0$ – постоянная; $j_{n+\frac12}$ – сферические функции Бесселя; $P_n^{(1)}$ – присоединенные полиномы Лежандра; $k^2$ – положительная постоянная разделения. Для величин $\gamma_s$ и $\omega_s$ справедливы выражения (23).

Если поверхность шара "зажата" ($R=R_0$, $u_\varphi=0$, где $R_0$ – радиус шара), то с помощью соотношения (33) получаем следующее выражение для безразмерного декремента затухания:

$$\bar\gamma_s=\mu_{nm}^2\equiv(2\rho R_0^2\gamma/\eta). \tag{34}$$

Здесь $\mu_{nm}$ – корни уравнения $j_{n+\frac{1}{2}}(\mu_{nm})=0$. Из выражения (34) видно, что затухание колебаний возрастает как с ростом $n$, так и с ростом $m$.

Рассмотрим затухание колебаний с дилатацией. Ограниченное при $R=0$ частное решение уравнения (20), получаемое методом разделения переменных, имеет следующий вид:

$$\Phi = \frac{\Phi_0}{\sqrt{\bar{R}}} j_{n+\frac{1}{2}}(\bar{R}) P_n(\cos\Theta) e^{-\gamma_l t} \cos\omega_l t, \qquad (35)$$

Здесь $\Phi_0$ – постоянная; $j_{n+\frac{1}{2}}$ – сферические функции Бесселя; $P_n$ – полиномы Лежандра; величина $\bar{R}$ определяется согласно выражения (33); величины $\gamma_l$ и $\omega_l$ определяются согласно выражений (29). Пусть на поверхности шара выполнено условие

$$R = R_0, \qquad u_R = \frac{\partial\Phi}{\partial R} = 0. \qquad (36)$$

Подставляя в условия (36) выражение (35) для потенциала $\Phi$, приходим к уравнению

$$\frac{n}{R_0} j_{n+\frac{1}{2}}(\bar{R}_0) - j_{n+\frac{3}{2}}(\bar{R}_0) = 0, \qquad \bar{R}_0 \equiv kR_0. \qquad (37)$$

В результате для величины $k$ имеем

$$k = \frac{\nu_{nm}}{R_0}, \qquad m = 1, 2, \ldots \qquad (38)$$

Здесь $\nu_{nm}$ – корни уравнения (37). Далее, с помощью выражения (29) для $\gamma_l$ получаем следующее выражение для безразмерного декремента затухания колебаний с дилатацией:

$$\bar{\gamma}_l = \left(\frac{4}{3} + \frac{\zeta}{\eta}\right)\nu_{nm}^2, \qquad \bar{\gamma}_l \equiv \frac{2\rho R_0^2 \gamma_l}{\eta} \qquad (39)$$

Сравним декременты затухания крутильных колебаний и колебаний с дилатацией в шаре при $n=0$. Согласно формулам (34) и (39), для отношения декремента затухания $\bar{\gamma}_l$ к декременту затухания $\bar{\gamma}_s$ справедливо выражение

$$\frac{\bar{\gamma}_l}{\bar{\gamma}_s} = \left(\frac{4}{3} + \frac{\zeta}{\eta}\right)\left(\frac{\nu_{nm}}{\mu_{nm}}\right)^2. \qquad (40)$$

Первые пять корней уравнения $j_{\frac{1}{2}}(\mu_{0m})=0$ таковы: $\mu_{01}=3.1416$; $\mu_{02}=6.2832$; $\mu_{03}=9.4248$; $\mu_{04}=12.566$; $\mu_{05}=15.708$. Первые пять корней уравнения (37) при $n=0$ следующие: $\nu_{01}=4.4934$; $\nu_{02}=7.7253$; $\nu_{03}=10.904$; $\nu_{04}=14.066$; $\nu_{05}=17.221$. Как видно из формулы (40), отношение декрементов для указанных корней всегда больше единицы. При этом наибольшего значения ($> 2.7$) оно достигает при $m=1$.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В специальном классе ортогональных координатных систем (4) с использованием обобщенных потенциалов типа упомянутых в [13, 15, 17] развиты представления общих решений уравнения Ламе для упругой среды, дополненного вязкими силами по Навье – Стоксу. Для определения трех обобщенных потенциалов получены три линейных дифференциальных уравнения третьего порядка в частных производных, два из которых образуют систему, третье является независимым. Получен аналог представления Дебая – Морса – Фешбаха. При этом задача сведена к трем независимым линейным уравнениям в частных производных третьего порядка, служащим для определения трех обобщенных потенциалов. В случае отсутствия вязких сил полученное в работе представление переходит в классическое представление Дебая – Морса – Фешбаха.

Важно отметить, что среди приведенных в монографии [10] ортогональных систем координат, в которых переменные в уравнениях для обобщенных потенциалов разделяются, условиям (4) удовлетворяют прямоугольная система ($x_1=x$, $y$ или $z$), три цилиндрические (круговая, эллиптическая и параболическая, $x_1=z$), а также сферическая и коническая системы ($x_1=R$, где $R$ – радиус).

В двухпараметрической нестационарной задаче ($\vec{u}=\vec{u}(x_1, x_2, t)$) в специальном классе ортогональных систем координат (18) задача сведена к трем независимым линейным дифференциальным уравнениям в частных производных третьего порядка, служащим для определения обычного потенциала $\Phi$, функции тока $\Psi$ и компоненты смещения $u_3$. Важно отметить, что к классу ортогональных координатных систем (18) относится ряд систем, в которых переменные в уравнениях для $\Phi$, $\Psi$ и $u_3$ разделяются.

Получены выражения для декрементов затухания упругих колебаний в шаре и бесконечном цилиндре. Как оказалось, колебания с дилатацией затухают существенно сильнее, чем крутильные колебания.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят профессора И. Т. Селезова за полезные дискуссии, касающиеся содержания данной статьи.

1. *Амиралиев Г. М.* Исследование разностных схем для квазилинейного уравнения Соболева //

Дифф. ур-ния.– 1987.– **23**, N 8.– С. 1453–1455.

2. *Габов С. А.* Новые задачи математической теории волн.– М.: Наука, 1998.– 448 с.
3. *Габов С. А., Свешников А. Г.* Линейные задачи нестационарных внутренних волн.– М.: Наука, 1990.– 344 с.
4. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.
5. *Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А.* Дифракция упругих волн.– К.: Наук. думка, 1978.– 308 с.
6. *Давыдов Б.* Вариационный принцип и канонические уравнения для идеальной жидкости // Докл. АН СССР.– 1949.– **69**, N 2.– С. 165–168.
7. *Дебай П.* Избранные труды.– Л.: Наука, 1987.– 560 с.
8. *Инербаев М. С.* Обоснование разностных схем с дополнительными неизвестными для квазилинейного уравнения Соболева // Ж. вычисл. мат. и мат. физ.– 1991.– **31**, N 3.– С. 457–461.
9. *Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д., Свешников А. Г.* О нестационарных волнах в средах с анизотропной дисперсией // Ж. вычисл. мат. и мат. физ.– 1999.– 39, N 6.– С. 1006–1022.
10. *Морс Ф., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Том 2.– М.: ИИЛ, 1960.– 896 с.
11. *Новацкий В.* Теория упругости.– М.: Мир, 1975.– 872 с.
12. *Салтанов Н. В.* Аналитическая гидромеханика.– К.: Наук. думка, 1984.– 200 с.
13. *Салтанов Н. В.* К представлению общих решений уравнения Ламе и векторного волнового уравнения // Прикл. мех.– 1990.– **26**, N 7.– С. 108–111.
14. *Салтанов Н. В.* Развитие аналитической механики сплошной среды на основе обобщенных потенциалов / Автореф. дисс. докт. физ.-мат. наук.– К.: Ин-т гидромех. НАН Украины, 1992.– 34 с.
15. *Салтанов Н. В.* Обобщенные потенциалы в магнитной гидродинамике и динамике вращающейся жидкости // Прикл. гидромех.– 2000.– **2(74)**, N 4.– С. 82–98.
16. *Салтанов Н. В.* Обобщенные потенциалы, инварианты Римана и простые волны в аналоге метода годографа Чаплыгина – Седова в магнитной газовой динамике // Прикл. гидромех.– 2002.– **4(76)**, N 3.– С. 59–70.
17. *Салтанов Н. В., Горбань В. А.* Вихревые структуры в жидкости: аналитические и численные решения.– К.: Наук. думка, 1993.– 244 с.
18. *Салтанов Н. В., Салтанов В. Н.* К магнитной гидродинамике вращающейся неоднородной жидкости в стационарном случае // Прикл. гидромех.– 1999.– **1(73)**, N 3.– С. 32–47.
19. *Салтанов Н. В., Шестопал П. А.* Обобщенные потенциалы в теории вращающейся упругой среды // Вестник Херсон. гос. тех. ун-та.– 2000.– **2**, N 8).– С. 201–205.
20. *Селезов И. Т., Селезова Л. В.* Волны в магнитогидроупругих средах.– К.: Наук. думка, 1975.– 164 с.
21. *Скобелкин В. И.* Вариационные принципы в гидродинамике // ЖЭТФ.– 1956.– **31**, вып. 2(8).– С. 317–323.
22. *Улитко А. Ф.* Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости.– К.: Наук. думка, 1979.– 264 с.
23. *Chandrasekharaiah D. S.* A complete solution in elastodynamics // Acta Mechanica.– 1990.– **84**, N 1–4.– P. 185–190.
24. *Giese J.* The stream functions for the three dimensional flows // J. Math. Phys.– 1951.– **30**, N 1.– P. 31–35.
25. *Yih C.-S.* Fonctions de courant dans les ecoulements a trois dimensions // Houlle blanche.– 1957.– **12**, N 3.– P. 445–450.
26. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория упругости.– М.: Наука, 1965.– 204 с.
27. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика.– М.: Наука, 1986.– 736 с.