Сафонова Н.В.

ПОЗНАНИЕ БЕСКОНЕЧНОСТИ. ВОЗМОЖНО ЛИ ЭТО СРЕДСТВАМИ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ?

КАНТОРОВСКАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ: РЕАЛЬНОСТИ, ПЕРСПЕКТИВЫ.

В настоящее время существование актуально бесконечных множеств превратилось в догму, в которую верит большинство математиков. Более того, математики пытаются внушить веру в эту догму и другим людям. В то же время мы не можем указать какое-либо актуально бесконечное множество в реальном мире – здесь мы имеем дело с конструкцией, расширяющей реальный мир и качественно превосходящей пределы возможностей наших наблюдений. Таким образом, утверждения о бесконечных множествах теряют свое феноменологическое содержание. В результате дальнейшее развитие теории множеств всецело зависит от формальных соображений, которые оказываются единственным надежным поводырем во тьме, сгустившейся вокруг множеств.

Это обстоятельство привело к трудностям уже в самом начале теории множеств. Оказалось, что естественных постулатов канторовской теории множеств недостаточно для решения вопроса об истинности аксиомы выбора. В то же время вопрос стал столь насущным, что совершенно невозможно было ожидать формального подтверждения независимости этой аксиомы. Для нее не было никаких мотивировок, аналогичных мотивировкам предыдущих постулатов. В конце концов, аксиома выбора получила общее признание по чисто формальным причинам – эта аксиома значительно упрощает структуру бесконечных множеств и приводит к некоторым элегантным теоремам. Попытки мотивировать аксиому выбора ее истинностью для конечных множеств были подорваны аксиомой детерминированности, которая может быть мотивирована ее истинностью для конечных множеств, но несовместима с аксиомой выбора.

Сегодня известно заметное количество независимых суждений теории множеств, то есть суждений, не доказуемых и неопровержимых с помощью базисных аксиом. Математики не могут предложить интересных принципов, достаточно сильных для разрешения их истинности. Типичным примером является континуум-гипотеза. Принятие континуум-гипотезы дает некоторые технические преимущества, но и теория множеств с отрицанием континуум-гипотезы также довольно интересна. Итак, нет единой теории множеств, вместо этого имеются различные теории множеств, для которых исходная канторовская теория множеств служит общей основой.

Кроме того, можно сформулировать и другие постулаты для актуально бесконечных множеств и создать, таким образом, теорию актуально бесконечных множеств, отличающуюся от канторовской теории множеств. Например, аксиому о множестве всех подмножеств можно заменить постулатом, гласящим, что каждое бесконечное множество может быть биективно отражено на множество всех натуральных чисел. Вполне вероятно, что получившаяся в результате теория может успешно конкурировать с канторовской теорией множеств.

Попытки математиков до конца постичь актуальную бесконечность оказались безуспешными. Но это не уменьшает важности канторовской теории множеств, которая остается свидетельством стремления человека раздвинуть пределы пространства способом, не имеющим никакой аналогии в истории.

Значение канторовской теории множеств для математики определяется не только ею самой, но и ее положением в математике. Вскоре после возникновения теории множеств стало ясно, что она полезна главным образом по следующим трем причинам.

Все математические объекты, созданные в дотеоретико-множественной математике, могут быть заново построены как структуры в теории множеств. Точнее, эти объекты можно задавать в теории множеств их каноническими моделями так, чтобы изучение оригинальных объектов заменялось изучением соответствующих моделей. В некоторых случаях эта замена влияет на исходные понятия и влечет за собой их модификацию в согласии с рассматриваемой моделью. В качестве примеров можно взять действительные числа, исчисление бесконечно малых и т.д.

В дотеоретико-множественной математике встречались бесконечности различных видов, например, бесконечность как неограниченная возможность конструирования объектов некоторого сорта, бесконечность как некоторое неограниченное количество, бесконечность, где встречаются две параллельные прямые и т.п. Все эти виды бесконечности были сведены к актуальной бесконечности, с которой имеет дело теория множеств. Теория множеств стала общей теорией бесконечности.

Теория множеств дала математике богатейшую в комбинаторном отношении структуру, а именно структуру конечных и актуально бесконечных множеств. Это привело к возникновению новых математических дисциплин. В некоторых из них используются структуры множеств, по крайней мере, частично таковы топология, теория меры и т.п. Другие представляют собой надструктуру на классических структурах, как, например, функциональный анализ и некоторые алгебраические структуры и т.п. Теория множеств представляет собой неисчерпаемое многообразие различных абстрактных структур.

Канторовская теория множеств стала, таким образом, миром, куда вместилась вся математика в целом. Частные математические дисциплины были избавлены от ответственности за свою непротиворечивость, так как эта ответственность была возложена на теорию множеств.

Теория множеств открыла путь к изучению необъятного количества различных структур и к беспрецедентному росту знаний относительно них. Это привело к распылению математики. Кроме того, большинство результатов такого рода приобретает смысл только за счет существования соответствующей структуры в канторовской теории множеств. Математика, основанная на канторовской теории множеств, превратилась в математику канторовской теории множеств.

Таким образом, современная математика изучает конструкцию, отношение которой к реальному миру по меньшей мере проблематично. Более того, эта конструкция не единственно возможная, да и на самом деле не самая подходящая с точки зрения самой математики. Это ставит под вопрос роль математики как научного и полезного метода. Математика может быть низведена к простой игре, происходящей в некотором искусственном мире. Это не опасность для математики в будущем, а непосредственный кризис в самой математике. Он проявляется и в том, что часто глубокие и остроумные математические результаты не вызывают никакого интереса не только у людей, которые не являются математиками-профессионалами, но даже у математиков, в настоящее время работающих над проблемами с другим расположением фигур на шахматной доске.

АЛЬТЕРНАТИВНАЯ МАТЕМАТИКА

В настоящее время все более широкое распространение получает идея построения математического анализа на основе конструктивных понятий и принципов. При этом подходе основную роль играют понятие алгорифма и теория алгорифмов. Построение анализа на этой основе существенно лучше, чем традиционное, соответствует постановкам задач вычислительной математики.

На основе рекурсивной арифметики Сколема [4], в которой отсутствует понятие существования и, как следствие, функция определена с помощью рекурсии – (говорят, что функция f(n) определяется с помощью рекурсии, если вместо того, чтобы определить ее явно, дается значение f(0) и f(n+1) выражается как некоторая функция от f(n)), – Р.Л.Гудстейн разрабатывает один из вариантов построения математического анализа при помощи "апроксимативно определенных конструктивных функций" [2 с.23,81].

Кроме подхода, предложенного Гудстейном, разрабатываются и другие подходы. Значительное развитие получил подход, основы которого были разработаны А.А.Марковым [3]. На формирование этого подхода сильное влияние оказало стремление оперировать такими конструктивными аналогами понятий классического математического анализа, которые были бы возможно ближе по форме к их "прообразам".

Конструктивный математический анализ представляет собой особый вариант математического анализа, который специально строится так, чтобы на любом этаже математического "здания" обеспечивалась правильная и отчетливая ориентировка в связях алгорифмического характера между "конкретными информациями", и, в частности, в вопросе о достаточных исходных данных, обеспечивалось корректное введение операций на основе параметрических теорем существования и аналогичных им теорем.

Все это приводит к тому, что переосмысливание какой-либо уже сложившейся математической теории на конструктивной основе является, в общем, сложной задачей, требующей в ряде случаев серьезных технических средств конструктивной математики и часто таящей в себе много неожиданностей. По существу, приходится строить новую теорию с резко выраженной спецификой, а при таком построении исходная теория классической математики может служить лишь приблизительным ориентиром.

МАТЕМАТИКА В КОНСТРУКТИВНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Преимущества конструктивной математики перед теорией классической математики возникают в результате перехода к рассмотрению лишь конструктивно определяемых объектов и одновременного отказа от использования представлений об актуально бесконечных множествах – и приводят к таким усовершенствованиям математических теорий, которые могут облегчить применение математики к задачам прикладного характера.

Направленность какой-либо теории классической математики и ее конструктивного варианта на моделирование одних и тех же связей между реальными предметами (явлениями) приводит к тому, что конструктивный вариант во многих своих частях оказывается внешне похожим на исходную теорию классической математики, но требует переосмысления. Кроме этого, интенсивно развиваются математические теории, формирующиеся под воздействием проблем, специфичных для конструктивной математики:

- теория порождаемых множеств конструктивных объектов (называемая также общей теорией исчислений);
- теория алгоритмов и конструктивная математическая логика – представляют собой ветви математики, не имеющие "близких родственников" в классической математике.

АЛЬТЕРНАТИВНАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

Существует и другой путь выхода математики из кризиса, например, предложенный известным чешским математиком П.Вопенкой. Вслед за Кантом ученый считает, что "математика есть способ преодоления человеческого опыта. Мы используем математику, чтобы выразить мысли, предваряющие наше знание, которые часто в дальнейшем нельзя проверить" ([1] с.15). Требует выхода современной математики из кризиса, но не на феноменологической основе, а предлагает строить математику в новой теории множеств: "Мы будем рассматривать феномен бесконечности в согласии с нашим опытом, то есть как феномен, который встречается при наблюдении больших, необозримых множеств. Мы ни в коем случае не используем понятия актуально бесконечных множеств. Заметим, что исключив актуально бесконечные множества, мы не лишаем математику возможности достаточно хорошо их описывать, если они в будущем окажутся полезными" ([1] с. 15).

МАТЕМАТИКА В АЛЬТЕРНАТИВНОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Данная теория есть общая теория бесконечности. Вопенка полагает, что "наша теория позволяет дать естественную математическую трактовку понятий, которые либо не были определены в математике, либо были определены неудовлетворительным образом. Например, предлагаем главу, посвященную понятию движения. Мы увидим, что развитие математики в альтернативной теории множеств быстро приводит к проблемам, для решения которых в современной математике нет подходящих методов. Таким образом, надо искать новую необычную технику" ([1] с.18).

ЛИТЕРАТУРА

[1] П.Вопенка. Математика в альтернативной теории множеств. М., 1983.
[2] Р.Л.Гудстейн. Рекурсивный математический анализ. М.,1970.
[3] А.А.Марков. Элементы математической логики. М., 1984.
[4] Сколем (Skolem T.) Begründung der elementaren Arithmetic durch die rekurrierendé Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichen Ausdehnungsbereich, Videnskapsselskapets skrifter, 1, Matem. – naturvid. Klasse, no.6 (1923).