2. Геєць В. М. Інноваційний шлях розвитку та економічного зростання / В. М. Геєць // Утвердження інноваційної моделі розвитку економіки України. Мат-ли наук-практ. конф. – К : НТТУ «КПІ», 2003. – С 38-56.
3. Амоша А. И. Неоиндустриализация и новая промышленная политика Украины / А. И. Амоша, В. П. Вишневский, Л. А. Збаразская // Економіка промисловості. – 2012. – № 1-2. – С. 3-32.
4. Четыре года Украины в ВТО : Кто выиграл, а кто проиграл [Електронний ресурс] / Сайт «Комсомольская правда в Украине». – Режим доступу : http://kp.ua/daily/170512/337974/
5. Мунтиян В. И. Об интеграции Украины в цифрах / В. И. Мунтиян // Евразийская экономическая интеграция Научно-аналитический журнал. – 2011. – №3. – С.5-9.
6. European Union – EEAS (European External Action Service) | Ukraine [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://eeas.europa.eu/ukraine/
7. Ивантер В. В. Экспертная оценка возможных макроэкономических эффектов экономического сотрудничества Украины со странами Единого экономического пространства / В. В. Ивантер, В. М. Геец и др. // Економіка і прогнозування. – 2011. – № 4. – С. 9-26.
8. Макогон Ю. В. Глобализация и Украина в мировой экономике / Ю. В. Макогон, Т. В. Орехова // Донецк: ДонНУ, 2004. – 478 с.
9. European Union - Eurostat | CIS-EU – trade in goods [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://epp.eurostat.ec.europa.eu/statistics_explained/index.php/CIS-EU_trade_in_goods
10. Довгаль Е. А. Развитие международного сотрудничества регионов в процессе глобализации / Е. А. Довгаль // Вчені записки Харківського гуманітарного інституту "Народна українська академія" : научное издание. Т. 14. – Харків : НУА, 2008. – 618 с.
11. Пирожков С. І. Глобалізація та інноваційна діяльність в Україні / С.І. Пирожков // Утвердження інноваційної моделі розвитку економіки України. Матеріали науково-практичної конференції. – К. : НТУУ «КПІ». – 2003. – С. 143.

Матвеев В.В., Титаренко В.Н., Титаренко Д.В. **УДК 519.863 + 65.012.122**

ДЕКОМПОЗИЦИЯ ПО ВРЕМЕННЫМ ИНДЕКСАМ И ДВУХУРОВНЕВЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИСКРЕТНО-ДИНАМИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Аннотация. *В работе рассмотрен алгоритм решения задачи дискретно-динамической оптимизации с квадратичным критерием качества и линейными ограничениями на переменные состояния и управления методом декомпозиции по временным индексам для систем с блочно-ленточной структурой матрицы Гессе для двойственного функционала.*

Анотація. *У роботі розглянуто алгоритм рішення задачі дискретно-динамічної оптимізації з квадратичним критерієм якості та лінійними обмеженнями на змінні стану та управління методом декомпозиції за індексами часу для систем з блочно-стрічкової структурою матриці Гессе для двоїстого функціоналу.*

Summary. *This paper deals with the algorithm for solving the problem of discrete-dynamical optimization with quadratic quality criteria and linear constraints on state and control variables by decomposition on time indexes method for systems with block-band structure of the Hessian matrix for the dual functional.*

Основная сложность в решении задач дискретно-динамической оптимизации экономических систем связана с «большой размерностью» традиционных алгоритмов и методов решения [3]. Для решения проблемы «размерности» задач дискретно-динамической оптимизации используются методы многоуровневых иерархических систем [1], методы декомпозиции по временным индексам [5].

Цель статьи: В работе предлагается декомпозиция по временным индексам задачи оптимизации с квадратичным критерием и линейными ограничениями и решение ее путем приведения к задаче поиска экстремума двойственного функционала Лагранжа.

Процедуру поиска экстремума двойственного функционала предлагается строить с учетом особенностей блочно-ленточной структуры матрицы Гессе, характерной для линейных многосвязных объектов.

В общем виде математическая модель последовательного технологического процесса может быть представлена балансовым уравнением

$$Y(S+1)=A\cdot Y(S)+B\cdot Q(S)+C\cdot\mu(S) \quad (1)$$

с ограничением на переменные состояния и управления

$$Y_i \min \le Y_i(S) \le Y_i \max \quad (2)$$

$$Q_i \min \le Q_i(S) \le Q_i \max \quad (3)$$

где вектор $Y(S)$ - переменные состояния, компоненты $Y_i(S)$ которого являются запасами ресурса в i -ой подсистеме в момент времени $S=1,2,...,T$ вектор $Q(S)$ - переменные управления, имеющие смысл передачи ресурса в момент времени S в i -ую подсистему, $i=1,2,...,M$

А - диагональная матрица размерности $N \times N$, значения a_{ii} - КПД i -ой подсистемы
В - матрица $N \times M$ с элементами:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если ресурс } Q_j \text{ поступил в } i\text{-ую подсистему} \\ -1, & \text{если ресурс } Q_j \text{ выбыл из } i\text{-ой подсистемы} \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (4)$$

С - матрица $N \times K$

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu_j \text{ прогнозное поступление ресурса в } i\text{-ую подсистему} \\ -1, & \text{если } \mu_j \text{ прогнозный отток ресурса из } i\text{-ой подсистемы} \end{cases} \quad (5)$$

Критерий оптимальности функционирования динамической системы есть квадратичная форма отклонений показателей эффективности от плановых значений, заявленных или технологически целесообразных значений переменных состояния и управления:

$$I = \left(Y(T+1) - \overline{Y}(T+1)\right)^T \cdot V(T+1) \cdot \left(Y(T+1) - \overline{Y}(T+1)\right) + \sum_{S=0}^{T} \left\{ \begin{array}{l} \left(Y(S) - \overline{Y}(S)\right)^T \cdot V(S) \cdot \left(Y(S) - \overline{Y}(S)\right) + \\ + \left(Q(S) - \overline{Q}(S)\right)^T \cdot R(S) \cdot \left(Q(S) - \overline{Q}(S)\right) \end{array} \right\} \quad (6)$$

где $\overline{Y}(S), \overline{Q}(S)$ - соответственно векторы "желательных" значений переменных состояния и управления,

$V(S)$ - положительно определенная, диагональная матрица $N \times N$,
$R(S)$ - положительно определенная, диагональная матрица $M \times M$,

Элементы матриц V и R имеют смысл коэффициентов штрафа за отклонение переменных состояния и управления от "желательных" значений.

Замена переменных

$$Z(S) = Y(S) - \overline{Y}(S) \quad (7)$$
$$U(S) = Q(S) - \overline{Q}(S)$$

В новых переменных задача формулируется: найти

$$\min_{Z(S),U(S)} J = Z^T(T+1) \cdot V(T+1) \cdot Z(T+1) + \sum_{S=0}^{T} \left(Z^T(S) \cdot V(S) \cdot Z(S) + U^T(S) \cdot R(S) \cdot U(S) \right) \quad (8)$$

при ограничениях:

$$Z(S+1) = A \cdot Z(S) + B \cdot U(S) + C \cdot \mu(S) - D(S) \quad (9)$$

где:

$$D(S) = \overline{Y}(S+1) - A \cdot \overline{Y}(S) - B \cdot \overline{Q}(S) \quad (10)$$

В работе рассматривается решение задачи оптимизации без учета простых двусторонних ограничений на переменные состояния и управления, в предположении, что в процессе нормального функционирования системы эти условия выполняются.

Лагранжиан задачи имеет вид:

$$L = Z^T(T+1) \cdot V(T+1) \cdot Z(T+1) + \sum_{S=0}^{T} \left\{ \begin{array}{l} Z^T(S) \cdot V(S) \cdot Z(S) + U^T(S) \cdot R(S) \cdot U(S) + \\ + \Lambda^T(S) \cdot \left(Z(S+1) - A \cdot Z(S) - B \cdot U(S) - C \cdot \mu(S) + D(S) \right) \end{array} \right\} \quad (11)$$

где $\Lambda(S)$ - вектор множителей Лагранжа.

Решение сформулированной задачи методами статической оптимизации нежелательно ввиду большой размерности эквивалентной задачи статической оптимизации $(M + 2N) \times (T+1)$).

Использование двухуровневой процедуры оптимизации методом декомпозиции по временным индексам позволяет существенно снизить размерность решаемых задач.

Сущность метода декомпозиции по временным индексам состоит в том, что в Лагранжиане (11) выделяются слагаемые сходной структуры, отличающиеся друг от друга только значениями временных индексов и поэтому обладающие одним и тем же алгоритмом нахождения оптимального решения. Алгоритм оптимизации двухуровневый: на нижнем уровне решается ряд однотипных задач малой размерности при фиксированных значениях вектора $\Lambda(S), S = 0,1,...,T$, на верхнем уровне рассчитываются множители Лагранжа $\Lambda(S), S = 0,1,...,T$, обеспечивающие согласованность задач верхнего уровня.

Фиксируя векторы $\Lambda(S), S = 0,1,...,T$, выделим в (11) группы слагаемых.

1. Для $S = 0$

$$L(0) = Z^T(0) \cdot V(0) \cdot Z(0) + U^T(0) \cdot R(0) \cdot U(0) - -\Lambda^T(0) \cdot \left(A \cdot Z(0) + B \cdot U(0) + C \cdot \mu(0) + A \cdot \overline{Y}(0) + B \cdot \overline{Q}(0) \right) \quad (12)$$

где $Y(0), Z(0)$, -заданы.

2. Для $S=1,2,\dots,T$

$$\begin{aligned} L(S) &= Z^T(S)\cdot V(S)\cdot Z(S)+U^T(S)\cdot R(S)\cdot U(S)- \\ &-\Lambda^T(S)\cdot\left(A\cdot Z(S)+B\cdot U(S)+C\cdot\mu(S)+A\cdot\overline{Y}(S)+B\cdot\overline{Q}(S)\right)+ \\ &+\Lambda^T(S-1)\cdot\left(Z(S)+\overline{Y}(S)\right) \end{aligned} \quad (13)$$

3. Для $S=T+1$

$$L(T+1)=Z^T(T+1)\cdot V(T+1)\cdot Z(T+1)+\Lambda^T(T)\left(Z(T+1)+\overline{Y}(T+1)\right) \quad (14)$$

Из (12)-(14) видно, что из $T+1$ задач $T-1$ (для $0<S<T+1$) имеют одинаковую формальную запись.

Задача алгоритмов нижнего уровня состоит в определении $Z(S)$ и $U(S)$, минимизирующих (8)-(9) при заданном значении $\Lambda(S)$. Из-за сходства оптимизационных моделей, при $S=1,2,\dots,T$ алгоритмы решения задач для всех временных индексов, кроме первого ($S=0$) и последнего ($S=T+1$), являются однотипными, что упрощает решение исходной задачи.

Двухуровневая процедура оптимизации.

Задача нижнего уровня состоит в отыскании локально оптимальных (при фиксированном $\Lambda(S)$) значений U, Z. Задача верхнего уровня - корректировка вектора $\Lambda(S), S=0,1,\dots T+1$ для нахождения оптимального решения исходной задачи (8)-(9).

1. Вычисление локально оптимальных значений векторов Z^*, U^*, V^*, Q^* проводится из условия $\nabla_U L(S)=0$, $\nabla_Z L(S)=0$.

а) Для $S=0$

$$\nabla_{U(0)}L(0)=2R(0)U(0)-B^T\Lambda(0)=0 \quad (15)$$

откуда

$$U^*(0)=\frac{1}{2}R^{-1}(0)B^T\Lambda(0) \quad (16)$$

$$Q^*(0)=\overline{Q}(0)+\frac{1}{2}R^{-1}(0)B^T\Lambda(0) \quad (17)$$

б) Для $S=1,2,\dots,T$

$$\nabla_{U(S)}L(S)=2R(S)U(S)-B^T\Lambda(S)=0 \quad (18)$$

откуда

$$U^*(S)=\frac{1}{2}R^{-1}(S)B^T\Lambda(S) \quad (19)$$

$$Q^*(S)=\overline{Q}(S)+\frac{1}{2}R^{-1}(S)B^T\Lambda(S) \quad (20)$$

$$\nabla_{Z(S)}L(S)=2V(S)Z(S)-A^T\Lambda(S)+\Lambda(S-1)=0 \quad (21)$$

и

$$Z^*(S)=\frac{1}{2}V^{-1}(S)A^T\Lambda(S)-\frac{1}{2}V^{-1}(S)\Lambda(S-1) \quad (22)$$

$$Y^*(S)=\overline{Y}(S)+\frac{1}{2}V^{-1}(S)A^T\Lambda(S)-\frac{1}{2}V^{-1}\Lambda(S-1) \quad (23)$$

в) Для $S=T+1$

$$\nabla_{Z(T+1)}L(T+1)=2V(T+1)Z(T+1)+\Lambda(T)=0 \quad (24)$$

$$Z^*(T+1)=-\frac{1}{2}V^{-1}(T+1)\Lambda(T) \quad (25)$$

$$Y^*(T+1)=\overline{Y}(T+1)-\frac{1}{2}V^{-1}(T+1)\Lambda(T) \quad (26)$$

Подставляя найденные выражения для локально-оптимальных значений векторов $Z(S), U(S)$ и, соответственно, $Y(S)$ и $Q(S)$ $S=0,1,\dots,T+1$ в (12)-(14), получим аналитическое выражение двойственного функционала исходной задачи как функцию вектора Λ. В силу линейности уравнения (9) и выражений для Z^*, U^* относительно вектора Λ, двойственный функционал после подстановки представляет собой квадратичную форму множителей Лагранжа. После подстановки в (12)-(14) и упрощения получим:

$$L^*(0)=Z^T(0)V(0)Z(0)-\frac{1}{4}\Lambda^T(0)B\cdot R^{-1}(0)\cdot B^T\cdot\Lambda(0)-$$
$$-\Lambda^T(0)C\cdot\mu(0)-\Lambda^T(0)A\cdot\overline{Y}(0)-\Lambda^T(0)B\cdot\overline{Q}(0) \quad (27)$$

$$L^*(S)=-\frac{1}{4}\Lambda^T(S)A\cdot V^{-1}(S)\cdot A^T\cdot\Lambda(S)-\frac{1}{4}\cdot\Lambda^T(S-1)\cdot Y^{-1}(S)\cdot\Lambda(S-1)+$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\Lambda^T(S)A\cdot Y^{-1}(S)\Lambda(S-1)-\frac{1}{4}\Lambda^T(S)B\cdot R^{-1}(S)\cdot B^T\Lambda(S)-$$
$$-\Lambda^T(S)\left(C\cdot\mu(S)+A\cdot\overline{Y}(S)+B\cdot\overline{Q}(S)\right)+\Lambda^T(S-1)\overline{Y}(S) \quad (28)$$

$$L^*(T+1)=-\frac{1}{4}\Lambda^T(T)\cdot V^{-1}(T+1)\cdot\Lambda^T+\Lambda^T(T)\cdot\overline{Y}(T+1) \quad (29)$$

$$L^*=L^*(0)+\sum_{S=1}^{T}L^*(S)+L^*(T+1) \quad (30)$$

Максимизация двойственного функционала

Согласно теореме Куна - Таккера, оптимальному решению (8)-(9) соответствует максимум двойственного функционала (11). Ввиду большой размерности (12)-(14) для поиска оптимального вектора Λ, доставляющего максимум функционалу (11), применим итеративную процедуру типа Флетчера – Ривса [4], обеспечивающую достижение экстремума за конечное число шагов оптимизации. Привлекательность метода состоит в том, что не требуется проводить операции обращения матриц большой размерности.

Алгоритм решения задачи

1. Задается произвольное значение $\Lambda^{(0)}(S)$ для $S=0,1,...,T$. В точке $\Lambda^{(0)}$ определяется направление нового поискового шага $S^{(0)}$.

$$S^{(0)}=\nabla_\Lambda L\left(\Lambda^{(0)}\right)$$

где $\nabla_\Lambda L\left(\Lambda^{(0)}\right)$ - градиент двойственного функционала по Λ, в точке $\Lambda^{(0)}$.

2. На k-ом шаге с помощью процедуры одномерного поиска (определения максимальной длины шага в направлении $S^{(k)}$) находится максимум $L(\Lambda)$, что в свою очередь определяет новую точку $\Lambda^{(k+1)}$:

$$\Lambda^{(k+1)}=\Lambda^{(k)}-\frac{\nabla_\Lambda^T L\left(\Lambda^{(k)}\right)\cdot S^{(k)}}{\left(S^{(k)}\right)^T\nabla_\Lambda^2 L\left(\Lambda^{(k)}\right)\cdot\left(S^{(k)}\right)}\cdot S^{(k)}$$

где $\nabla_\Lambda^2 L\left(\Lambda^{(k)}\right)$ - матрица вторых производных двойственного функционала.

3. Вычисляется $L\left(\Lambda^{(k+1)}\right)$ и $\nabla_\Lambda L\left(\Lambda^{(k+1)}\right)$.

4. Определяется новое направление $S^{(k+1)}$

$$S^{(k+1)}=\nabla_\Lambda L\left(\Lambda^{(k+1)}\right)+\frac{\nabla_\Lambda^T L\left(\Lambda^{(k+1)}\right)\cdot\nabla_\Lambda L\left(\Lambda^{(k+1)}\right)}{\nabla_\Lambda^T L\left(\Lambda^{(k-1)}\right)\cdot\nabla_\Lambda L\left(\Lambda^{(k)}\right)}\cdot S^{(k)} \quad (32)$$

5. Если выполняется неравенство:

$$\left\|S^{(k)}\right\|\le\varepsilon \quad (33)$$

где ε некоторая произвольная константа, то процедура поиска останавливается, иначе, поиск циклически повторяется с п.2 с заменой $\Lambda^{(k)}$ на $\Lambda^{(k+1)}$ и $S^{(k)}$ на $S^{(k+1)}$.

$$\Lambda=\Lambda(0)+\Lambda(1)+...+\Lambda(S)+...+\Lambda(T) \quad (34)$$

Соответственно:

$$\nabla_\Lambda L(\Lambda)=\nabla_{\Lambda(0)}L^*\left(\Lambda(0)\right)+\nabla_{\Lambda(1)}L^*\left(\Lambda(1)\right)+...+\nabla_{\Lambda(T)}L^*\left(\Lambda(T)\right) \quad (35)$$

Как видно из (13)

$$\nabla_{\Lambda(S)}L\left(\Lambda(S)\right)=Z^*(S+1)-A\cdot Z^*(S)-B\cdot U^*(S)-C\mu(S)+D(S) \quad (36)$$

Определение матрицы вторых производных $\nabla_\Lambda^2 L$ (матрицы Гессе)

Из (11) видно, что в Лагранжиан входят перекрестные произведения векторов Λ с разными временными индексами, поэтому матрица Гессе не может быть представлена в виде прямой суммы матриц $\nabla^2_{\Lambda(S)\Lambda(S)}L$, то есть будет содержать не только диагональные блоки $\nabla^2_{\Lambda(S-1)\Lambda(S-1)}L$, $\nabla^2_{\Lambda(S)\Lambda(S)}L$, но и внедиагональные $\nabla^2_{\Lambda(S-1)\Lambda(S)}L$ и $\nabla^2_{\Lambda(S)\Lambda(S-1)}L$.

Таким образом, матрица Гессе имеет блочно-ленточную структуру:

$$\begin{pmatrix} \nabla^2_{\Lambda(0)\Lambda(0)}L & \nabla^2_{\Lambda(0)\Lambda(1)}L & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \nabla^2_{\Lambda(1)\Lambda(0)}L & \nabla^2_{\Lambda(1)\Lambda(1)}L & \nabla^2_{\Lambda(1)\Lambda(2)}L & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \nabla^2_{\Lambda(2)\Lambda(1)}L & \nabla^2_{\Lambda(2)\Lambda(2)}L & \nabla^2_{\Lambda(2)\Lambda(3)}L & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \nabla^2_{\Lambda(T-1)\Lambda(T-2)}L & \nabla^2_{\Lambda(T-1)\Lambda(T-1)}L & \nabla^2_{\Lambda(T-1)\Lambda(T)}L \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \nabla^2_{\Lambda(T)\Lambda(T-1)}L & \nabla^2_{\Lambda(T)\Lambda(T)}L \end{pmatrix} \quad (37)$$

Специфику вычисления имеют только элементы первого и последнего столбцов блочной матрицы (37). В силу идентичности структуры выражений для функционала при $S = 1, 2, ..., T-1$ получим однотипные выражения для элементов (блоков) матрицы Гессе:

$$\nabla^2_{\Lambda(S-1)\Lambda(S)}L = \frac{1}{2}A \cdot V^{-1}(S-1) \quad (38)$$

$$\nabla^2_{\Lambda(S)\Lambda(S)}L = -\frac{1}{2}B \cdot R^{-1}(S)B^T - \frac{1}{2}V^{-1}(S+1) - \frac{1}{2}A \cdot V^{-1}(S)A^T \quad (39)$$

$$\nabla^2_{\Lambda(S+1)\Lambda(S)}L = \frac{1}{2}V^{-1}(S+1) \cdot A^T \quad (40)$$

Для $S = 0$, с учетом слагаемых содержащих $\Lambda(0)$ при $\Lambda(S), S = 1$, имеем:

$$\nabla^2_{\Lambda(0)\Lambda(0)}L = -\frac{1}{2}BR^{-1}(0)B^T - \frac{1}{2}V^{-1}(1) \quad (41)$$

$$\nabla^2_{\Lambda(1)\Lambda(0)}L = \frac{1}{2}V^{-1}A^T \quad (42)$$

Для $S = T$

$$\nabla^2_{\Lambda(T)\Lambda(T)}L = -\frac{1}{2}BR^{-1}(T)B^T - \frac{1}{2}V^{-1}(T+1) - \frac{1}{2}AV^{-1}(T)A^T \quad (43)$$

$$\nabla^2_{\Lambda(T-1)\Lambda(T)}L = AV^{-1}(T-1) \quad (44)$$

Блочно-ленточная структуры матрицы Гессе позволяет существенно упростить и уменьшить размерность вычислений в процедуре поиска экстремума двойственного функционала, так в (31) упрощается вычисление квадратичной формы:

$$\left(S^{(k)}\right)^T \cdot \nabla^2_{\Lambda}L\left(\Lambda^k\right) \cdot S^{(k)} = \sum_{S=0}^{T}\left(S^{(k)}(S)\right)^T \cdot \nabla^2_{\Lambda(S)\Lambda(S)}L\left(\Lambda^k(S)\right) \cdot \left(S^{(k)}(S)\right) + \quad (45)$$
$$+2\sum_{S=0}^{T}\left(S^{(k)}(S)\right)^T \cdot \nabla^2_{\Lambda(S)\Lambda(S+1)}L\left(\Lambda^k(S), \Lambda^k(S+1)\right) \cdot \left(S^{(k)}(S)\right)$$

Выводы: В данной работе, алгоритм решения задачи дискретно-динамической оптимизации с декомпозицией по временным индексам построен без предположения диагональности матрицы B в ограничениях (9) и матрицы Гессе, которая в данном случае имеет блочно-ленточную структуру. Полученный алгоритм может применяться для решения более широкого класса задач оптимального оперативного планирования и управления многосвязными, линейными, дискретно-динамическими системами, с квадратичным функционалом качества.

Источники и литература:

1. Месарович М., Мако Д., Такахара И. Теория иерархических многоуровневых систем / М. Месарович , Д. Мако, И. Такахара. – М. : Мир, 1975 – 344с.
2. Хэмди А. Таха. Введение в исследование операций, 6-е издание / А. Таха Хэмди. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2001. – 912 с.
3. Лэсдон Л. С. Оптимизация больших систем / Л.С. Лэсдон – М. : Наука, 1975 – 432 с.
4. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау. – М. : Мир, 1975 – 534 с.
5. Tamura H. Decentralized optimization of discrete systems with distributed delays / H. Tamura // Pergamon Press, Great Britain, Automatica – 1975 – Vol.11. – P. 593-602.