КРИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СВЕРХПРОВОДНИКОВ В УСЛОВИЯХ СОСУЩЕСТВОВАНИЯ ФАЗ

А.В. Бабич, С.В. Березовский, **Ю.А.** *Касаткин,*
Л.Н. Киценко, В.Ф. Клепиков, А.С. Молев

Институт электрофизики и радиационных технологий НАН Украины,
Харьков, Украина
E-mail: ntcefo@yahoo.com

Исследованы условия сосуществования сверхпроводящей и нормальной фаз в рамках модели Гинзбурга-Ландау. Показано, что при критическом (переходном) значении параметра Гинзбурга-Ландау ($\chi = \chi_c = 1/\sqrt{2}$) вариационные уравнения для параметров порядка обладают особыми свойствами, благодаря которым задача о пространственном распределении параметров порядка может быть сведена к квадратурам.

PACS: 74.20.De, 74.25.-q, 74.25.Ha

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, пространственное распределение потенциалов электромагнитного поля в границах раздела сверхпроводящей и нормальной фазы, а также плотность энергии этих границ существенно зависит от параметра Гинзбурга Ландау - χ [1-4].

Сверхпроводники, для которых χ меньше $\chi_c = 1/\sqrt{2}$, - сверхпроводники I рода (к ним, в основном, относятся чистые металлы). Энергия доменной стенки в таких сверхпроводниках положительна, в противном случае говорят о сверхпроводниках II рода. Для них энергия доменной стенки отрицательна [5-8]. Схематическая зависимость энергии доменной стенки от χ изображена на рис.1. Следует заметить, что при $\chi > \chi_c$, возможно, возникновение нитевидных магнитных структур, поэтому соответствующая зависимость может потерять смысл. В связи с этим она изображена пунктирной линией.

Как известно из теории критических явлений [9-12], системы в критической точке (на линии, поверхности и т.д.), т. е. в такой точке, которая разделяет на фазовой диаграмме состояния с существенно разными свойствами, обладают повышенной симметрией [13-22]. Если формально рассматривать параметр χ как термодинамическую переменную (аналогично тому, как в теории критических явлений размерность пространства считается непрерывно изменяющимся термодинамическим параметром), то можно считать, что точка $\chi = \chi_c = 1/\sqrt{2}$ является аналогом критической точки (точки фазового перехода). Это позволяет ожидать, что система вариационных уравнений для параметра порядка имеет особую симметрию, которой нет как ниже, так и выше точки перехода. Нахождение этой симметрии, а также обсуждение ее свойств и составляет предмет данной работы.

Отметим, что наиболее корректно явления такого рода могут быть описаны с помощью термодинамических потенциалов с высшими производными параметров порядка, которые, по-видимому, необходимо всегда использовать при рассмотрении равновесных фазовых превращений второго рода [21, 22]. В частности, для сверхпроводников такой анализ содержится в модели Неймана-Тьюорда [7]. Компромисс сверхпроводимости и модулированного магнитного порядка, который способен повысить температуры обоих фазовых переходов (магнитного и сверхпроводящего), также возникает благодаря высшим градиентам параметра порядка.

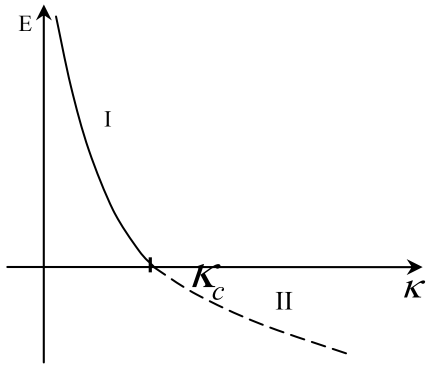

Рис.1. Зависимость энергии доменной стенки от параметра Гинзбурга-Ландау

Однако в простейшем варианте теории и в отсутствие спонтанной намагниченности можно ограничиться рамками стандартной модели Гинзбурга-Ландау. Именно такой случай рассматривается ниже.

СВОЙСТВА УРАВНЕНИЙ ГИНЗБУРГА-ЛАНДАУ В КРИТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

В теории сверхпроводимости неоднородное основное состояние при сосуществовании доменов нормальной и сверхпроводящей фазы описывается системой уравнений Гинзбурга-Ландау, которые получаются при варьировании следующего функционала свободной энергии [2]:

$$F = F_0 \int dv \left[\frac{1}{8\pi} \left| \vec{H} - \vec{H}_a \right|^2 + \alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \right.$$

$$+\mu\left|(i\gamma\nabla+\vec{A})\Psi\right|^2\Bigg]. \qquad (1)$$

Здесь $\vec{A}$ - вектор-потенциал внутреннего магнитного поля; $\vec{H}=rot\vec{A}$; $\vec{H}_a$ - внешнее поле; α и β - функции температуры; μ и γ – константы, смысл которых становится ясен при следующей записи:

$$\mu=\frac{e^{*2}}{\left(2m^*c^2\right)};\ \gamma=\frac{\hbar c}{e^*}, \qquad (2)$$

где e^* и m^* обозначают заряд и массу соответственно тех частиц, которые образуют макроскопическое квантовое состояние «сверхпроводящих электронов» (для электронных пар: $e^*=2\,e$, $m^*=2\,m$).

Из (1) можно получить две характерные длины, определяющие пространственное распределение внутреннего поля и параметра порядка. Проще всего это сделать в одномерном случае, для начала предположив $\Psi=\Psi_0=const$ ($\Psi_0=\sqrt{(-\alpha/\beta)}$ - значение параметра порядка в однородном случае). Для векторного потенциала получается уравнение

$$A''=8\pi\mu A\Psi_0^2, \qquad (3)$$

решение которого имеет вид:

$$A=c\cdot e^{-x/\lambda},\lambda=\sqrt{\frac{\beta}{\left(8\pi|\alpha|\mu\right)}}. \qquad (4)$$

Это означает, что магнитное поле проникает в сверхпроводник на определенную глубину λ. Если наоборот положить *H=0, A=0*, то получается дифференциальное уравнение для Ψ:

$$\alpha\Psi+\beta\Psi=\mu\gamma^2\Psi'', \qquad (5)$$

решение которого при граничном условии Ψ(0)=0 имеет вид:

$$\Psi=\Psi_0 th\left(\frac{x\sqrt{2}}{\xi}\right),\xi=\sqrt{\frac{\mu\gamma^2}{|\alpha|}}. \qquad (6)$$

Величина ξ называется длиной когерентности сверхпроводящих электронов, поскольку она показывает на каком расстоянии от локальной флуктуации с Ψ=0 устанавливается равновесное значение Ψ_0.

Обычно функционал Гинзбурга-Ландау упрощают, вводя безразмерные переменные:

$$h=\frac{H}{\sqrt{2H_c}};\ a=\frac{A}{\lambda H_c\sqrt{2}};\ \Psi=\frac{\Psi}{\Psi_0};\ \tilde{x}=\frac{x}{\lambda}. \qquad (7)$$

В новых переменных выражение (1) примет следующий вид:

$$F=\frac{H_c^2\lambda^3}{4\pi}\int\left[\frac{1}{8\pi}|h-h_a|^2-|\Psi|^2+\frac{1}{2}|\Psi|^4+\right.$$

$$\left.+\left|\left(\frac{i\nabla}{k}+a\right)\Psi\right|^2\right]dv. \qquad (8)$$

В таком выражении для энергии остается всего один существенный параметр – параметр Гинзбурга-Ландау:

$$\chi=\frac{\lambda}{\xi}=\frac{1}{\mu\gamma}\sqrt{\frac{\beta}{8\pi}}. \qquad (9)$$

Для анализа поведения доменных границ рассмотрим свободную энергию в случае, когда направление нормали к стенке будет совпадать с осью *x*, вектор-потенциал *a* направлен по оси *z*, при этом $h=a'=da/dx$, энергия на единицу поверхности будет иметь следующий вид:

$$E_{SN}=\frac{H_c\lambda}{4\pi}\int dx\left[\left(h-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\Psi^2+\frac{\Psi^4}{4}+\frac{\Psi'^2}{\chi^2}+\left(a\Psi\right)^2\right], \qquad (10)$$

где $\Psi(x)$ - параметр порядка; *a* – векторный потенциал внутреннего магнитного поля; $h=da/dx=\left|\vec{H}_y\right|/H_c$; H_c – критическое поле (доменная граница является плоской и перпендикулярной оси *OX*).

Границы раздела фаз в сверхпроводниках описываются двумя полями $\Psi(x)$ и *a(x)* с различными граничными условиями. Варьируя функционал (2) по $\Psi(x)$ и *a(x)*, получаем систему двух уравнений второго порядка, описывающую границу между сверхпроводящим ($h=0,\Psi=1$) и нормальным ($h=1/\sqrt{2},\Psi=0$) доменами (схематическое изображение зависимостей $h(x)$ и $\Psi(x)$ вблизи границы доменов приведено на рис.2):

$$\begin{aligned}&-\chi^{-2}\Psi''+a^2\Psi-\Psi+\Psi^3=0,\\&-a''+a\Psi^2=0.\end{aligned} \qquad (11)$$

Граничные условия для уравнений (3) имеют вид:

$$\begin{aligned}&\Psi(+\infty)=1,h(+\infty)=a(+\infty)=0,\\&\Psi(-\infty)=0,h(-\infty)=\frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned} \qquad (12)$$

Система уравнений (11) в общем случае не решается, однако уравнения (11) могут быть проанализированы в предельных случаях $\chi \ll 1, \chi \gg 1$.

В случае $\chi \ll 1$ глубина проникновения магнитного поля много меньше корреляционной длины, так что можно считать, что магнитное поле меняется скачком. Полагая $h=1/\sqrt{2},\Psi=0$ для *x<0* и $h=a=0$ для *x>0,* можно показать, что выражение для параметра порядка дается выражением (6). После подстановки в (8) получается выражение для свободной энергии:

$$E_{SN}=\frac{H_c\lambda\sqrt{8}}{12\chi}. \qquad (13)$$

В случае $\chi >> 1$ можно в (11) пренебречь членом $\chi^{-2}\Psi''$. С учетом граничных условий решение для *a* примет вид:

$$a(x)=-\frac{\sqrt{2}}{ch(x+c)},\ c=arch\sqrt{2}. \qquad (14)$$

После подстановки (14) в выражение для энергии стенки получаем:

$$E_{SN} = \frac{\lambda H_c^2}{3}\left(\sqrt{2}-1\right). \qquad (15)$$

Видно, что для больших χ энергия отрицательна. Это позволяет заключить, что энергия стенки при определенном значении χ должна менять знак. Можно показать, что это происходит только при значении $\chi = \chi_c = 1/\sqrt{2}$.

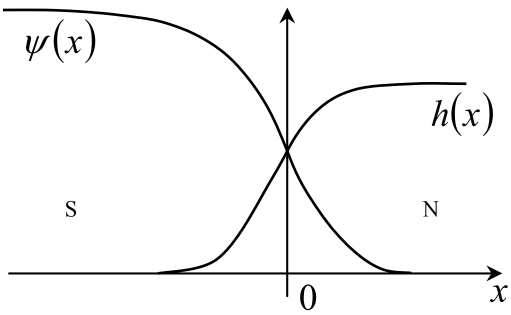

Рис.2. Схематическая зависимость $h(x)$ и $\Psi(x)$ в переходном S-N-слое

Для дальнейшего анализа удобно перейти к новым переменным *p(x)* и *q(x)*, выражающимся только через наблюдаемые величины – плотность вероятности $\Psi^2(x)$ и внутреннее поле $h(x)$, и имеющим одинаковые граничные условия:

$$\begin{aligned} &p(x) = 2\Psi^2\left(x\right)-1, q(x) = 1-2\sqrt{2}h(x), \\ &p(\pm\infty) = q(\pm\infty) = \pm 1. \end{aligned} \qquad (16)$$

Тогда система уравнений (2) примет вид:

$$\begin{aligned} &2p''(1+p)-(p'^2+q'^2)+ \\ &+2(\chi^2-\chi_c^2)\left[(1-p)(1+p)^2-q'^2\right]=0, \\ &2q''(1+p)-2p'q'+(1-q)(1+p)^2=0. \end{aligned} \qquad (17)$$

Легко видеть, что при $\chi = \chi_c = 1/\sqrt{2}$ (и только при этом значении χ) система уравнений имеет симметрию:

$$p(x) = q(x) \qquad (18)$$

и вырождается в уравнение:

$$\begin{aligned} &uu''-u'^2+u^2-u^3=0; u(x)=\frac{1}{2}(p+1), \\ &u(+\infty)=1, u(-\infty)=0, \end{aligned} \qquad (19)$$

которое может быть приведено к квадратурам:

$$x\cdot\sqrt{2} = \int\limits_{-\ln 2}^{w} \frac{dw}{\left[\exp(w)-w-1\right]^{1/2}}; w=\ln u . \qquad (20)$$

Можно показать, что в моделях Ψ^{2N} (*N≠2*), отличных от модели Ψ^4 Гинзбурга-Ландау, существуют некоторые $\chi = \chi_c$, для которых энергия междоменной стенки обращается в нуль, однако система вариационных уравнений при этом не вырождается в одно уравнение. Это означает, что симметрия (4) является свойством исключительно модели Гинзбурга-Ландау (1) и нарушается при учете дополнительных слагаемых типа Ψ^{2N} . Этому будет посвящено отдельное сообщение.

Отметим, что скрытые симметрии вариационных уравнений типа уравнений Гинзбурга-Ландау могут быть обусловлены также связью размерности пространства *d* со степенью нелинейности модели *N* и проявляются только при критической температуре T_c. В критической точке модели типа (1) с градиентами произвольного порядка порождают вариационные уравнения вида:

$$\Delta^m\Psi + \lambda\Psi^{2N-1} = 0\,, \qquad (21)$$

где Δ - оператор Лапласа.

Если параметры задачи связаны соотношением

$$2N-1 = \frac{d+2m}{d-2m}\,, \qquad (22)$$

то симметрия вариационного уравнения расширяется до конформной группы *d*-мерного пространства и вариационной масштабной группы [23]. Эти симметрии определяют поведение равновесных физических систем не только в критической точке, но и вне ее, и проявляются также при описании одночастичных возбуждений параметра порядка. В случае анизотропной модуляции параметров порядка критическая размерность становится функцией не только степени нелинейности и порядка градиентов, но и размерности подпространства модуляции [24,25]. Таким образом, при анализе спонтанного нарушения симметрии следует сравнивать между собой симметрию не только лагранжиана и вакуума, но и вариационных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.А. Абрикосов. *Основы теории металлов.* М.: «Наука», 1987, 362 с.
2. Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. *Статистическая физика. Часть 2. Теория конденсированного состояния.* М., 1978, 448 с.
3. P.G. De Gennes. *Superconductivity of metals and alloys.* NY, 1966.
4. Л.П. Горьков // *ЖЭТФ*. 1959, т. 9, с. 1364.
5. А.А. Абрикосов // *ЖЭТФ*. 1957, т. 32, с. 1442.
6. Д. Сан-Жам, Г. Сарма, Е. Томас, *Сверхпроводимость II рода.* М.: «Мир», 1970.
7. L. Nyuman L. Tewordt // *Physik*, 1966, v. 189, s. 55.
8. В.З. Кресин. *Сверхпроводимость и сверхтекучесть.* М., 1978, с. 189.
9. Л.Д. Ландау Е.М. Лифшиц. *Статистическая физика.* Часть 1. М.: «Наука», 1976, 584 с.
10. Ю.А. Изюмов, В.Н. Сыромятников. *Фазовые переходы и симметрия кристаллов*. М.: «Наука», 1984, 248 с.
11. Ш. Ма. *Современная теория критических явлений*. М.: «Мир», 1980, 298 с.
12. J.-K. Toledano, P. Toledano. *Landau Theory of Phase Transition.* M.: «Mir», 1994, 460 p.

13. V.F. Klepikov, V.V. Litvinenko, and V.A. Cherkaskiy // *Ukr. J. Phys*. 2000, v. 45, p. 541.
14. В.Ф. Клепиков. Симметрии в критических точках и фазовые переходы в полевых моделях // *Вісник Харківського університету.* 1999, в. 2(6), № 443, с. 23-25.
15. А. Брус, Р. Каули. *Структурные фазовые переходы.* М.: «Мир», 1984.
16. Ю.А. Иванченко, А.А. Лисянский, А.Э. Филиппов. *Флуктуационные эффекты в системах с конкурирующими взаимодействиями.* Киев: «Наукова думка», 1989, 280 с.
17. V.F. Klepikov. Modulated structures of one-component order parameter // *J. de Phys.* 1988, v. 9, p. 1805.
18. V.F. Klepikov, S.V. Berezovsky // *Condensed Matter Physics*. 1996, v. 8, p. 69-74.
19. V.F. Klepikov, A.I. Olemskoy // *Physics Reports.* 2000, v. 338, p. 571-677.
20. S.V. Brezovsky, V.F. Klepikov, V.Yu. Korda // *Phys. Rev.* 2001, v. 64.
21. A.V. Babich, S.V. Berezovsky, V.F. Klepikov // *Problems of Atomic Science and Technologies.* 2007, № 3(2), с. 353-356.
22. В.Ф. Клепиков *Фазовые переходы (несоизмеримые структуры).* Харьков: ННЦ ХФТИ, 1996, 145 с.
23. В.И. Фушич, В.М. Штенель, Н.И. Серов. *Симметричный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики*. Киев: «Наукова думка», 1989, 336 с.
24. A.V. Babich, S.V. Berezovsky, V.F. Klepikov. Spatial modulation of order parameters and critical dimensions // *International Journal of Modern Physics B*. 2008, v. 22, № 7, p. 851-857.
25. A.V. Babich, S.V. Berezovskiy and V.F. Klepikov. Hidden symmetries and critical dimensions in the theory of modulated structures // *Ukr. J. Phys.* 2009, v. 54, № 8, p. 9.

Статья поступила в редакцию 24.09.2009 г.

КРИТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ НАДПРОВІДНИКІВ В УМОВАХ СПІВІСНУВАННЯ ФАЗ

А.В. Бабіч, С.В. Березовський, Ю.О. Касаткін, Л.М. Кіценко, В.Ф. Клепіков, О.С. Молєв

Досліджені умови співіснування надпровідної та нормальної фази в рамках моделі Гінзбурга-Ландау. Показано, що при критичному (перехідному) значенні параметра Гінзбурга-Ландау ($\chi = \chi_c = 1/\sqrt{2}$) варіаційні рівняння для параметрів порядку мають особливі властивості, завдяки яким задачу про просторовий розподіл параметрів порядку можна звести к квадратурам.

CRITICAL PROPERTIES OF SUPERCONDUCTORS UNDER CONDITION OF PHASES COEXISTENCE

A.V. Babich, S.V. Berezovsky, Yu.A. Kasatkin, L.N. Kitcenko, V.F. Klepikov, A.S. Molev

Conditions of coexistence of the superconductive and the normal phases are investigated. It is shown that if the Ginsburg-Landau parameter is equal to it's critical value ($\chi = \chi_c = 1/\sqrt{2}$) then correspondent variational equations have an special characteristics. These characteristics allow one reduce the problem of spatial distribution of order parameters to the quadratures.