

# СОЦИОЛОГИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

УДК 303.447.22

**СЕРГЕЙ ДЕМБИЦКИЙ,**

*кандидат социологических наук, младший научный сотрудник отдела методологии и методов социологии НАН Украины*

## **Раздельный анализ подгрупп в метаанализе (на примере данных кросс-национальных исследований)**

### *Аннотация*

*Статья посвящена выявлению факторов гетерогенности в рамках метаанализа посредством раздельного анализа подгрупп. Рассмотрено три соответствующих модели анализа (фиксированных эффектов; случайных эффектов с использованием раздельной оценки  $\tau^2$ ; случайных эффектов с использованием объединенной оценки  $\tau^2$ ) и три метода, каждый из которых может применяться в любой из моделей (Z-тест; Q-тест, основанный на анализе дисперсии; Q-тест гетерогенности).*

*На основе практического примера с применением отношения шансов в качестве величин эффектов продемонстрировано сравнение подгрупп с помощью каждой модели и каждого метода (в качестве эмпирической базы использованы результаты четвертой волны Европейского социального исследования).*

**Ключевые слова:** *метаанализ, модели раздельного анализа подгрупп, методы раздельного анализа подгрупп*

### **Введение**

В своих предыдущих работах я рассмотрел основы базовых вычислений и оценки гетерогенности в рамках метаанализа [Дембицкий, 2012; Дембицкий, 2013]. Оценка гетерогенности в большинстве случаев влечет за собой использование процедур, предназначенных для оценки факторов, потенциально влияющих на изучаемую взаимосвязь (так называемые переменные-посредники). К таким процедурам относятся раздельный анализ подгрупп и метарегрессия.

Они важны в тех случаях, когда различия в результатах анализируемых исследований как связаны со случайными ошибками, так и вызваны существенными причинами (например, различиями в дизайне исследования или определенными характеристиками участников). В таком случае метаанализ позволяет не только выявить среднюю величину эффекта (аналитический метаанализ), но и раскрыть потенциальные источники гетерогенности (эксплораторный метаанализ), указывающие на модификаторы изучаемой взаимосвязи [Song, 2001: p. 127].

Раздельный анализ подгрупп подходит для ситуаций, когда соответствующая переменная-посредник является категориальной (очевидно, что любая переменная может быть приведена к виду категориальной), а метарегрессия — для ситуаций, предполагающих использование непрерывных переменных-посредников.

В рамках данной статьи я остановился на описании оснований выявления источников гетерогенности посредством раздельного анализа подгрупп. Что касается метарегрессии, то ее рассмотрение (в сочетании с рассмотрением основ метааналитических расчетов с помощью одного из компьютерных статистических пакетов) будет осуществлено в отдельной статье.

### ***Модели и методы раздельного анализа подгрупп<sup>1</sup>***

В отличие от вычисления среднего взвешенного величин эффектов, при раздельном анализе подгрупп используется не две модели (фиксированных и случайных эффектов), а три: 1) фиксированных эффектов; 2) случайных эффектов с использованием раздельной оценки  $\tau^2$ ; 3) случайных эффектов с использованием объединенной оценки  $\tau^2$ .

Первая модель подходит для случаев, когда все исследования отображают одну истинную величину эффекта, а наблюдаемые различия вызваны исключительно случайными ошибками. Вообще говоря, использование этой модели выглядит странно, поскольку модель фиксированных эффектов предполагает отсутствие гетерогенности, что делает раздельный анализ подгрупп ненужным. Каких-либо объяснений на этот счет я не нашел. Одна из возможных ситуаций использования этой модели видится в том случае, когда есть опасения относительно условий проведения группы исследований, которые задумывались как идентичные по своим ключевым параметрам, то есть разрабатывались под модель фиксированных эффектов.

Если же предполагается, что в разных группах исследований отображены различные истинные величины эффекта, следует использовать одну из двух моделей случайных эффектов. Первая модель (с раздельной оценкой  $\tau^2$ ) подходит для случаев, когда предполагается, что уровень истинной изменчивости в разных подгруппах исследований различается. Если же предполагается равенство истинной изменчивости в подгруппах, то следует использовать вторую модель (с объединенной оценкой  $\tau^2$ ).

Важно также помнить, что модель с раздельной оценкой  $\tau^2$  предполагает наличие достаточного количества исследований в каждой подгруппе. В противном случае оценочный параметр ( $T^2$ ) не будет достаточно точным.

---

<sup>1</sup> Основной материал, касающийся теории и основных расчетов при раздельном анализе подгрупп в метаанализе, взят из: [Borenstein et al., 2009: p. 149–183].

Следовательно, при малых объемах выборки (пять и менее исследований в каждой подгруппе) следует использовать вторую модель в любом случае.

Логика выбора между тремя моделями обобщена ниже (см. рис. 1).

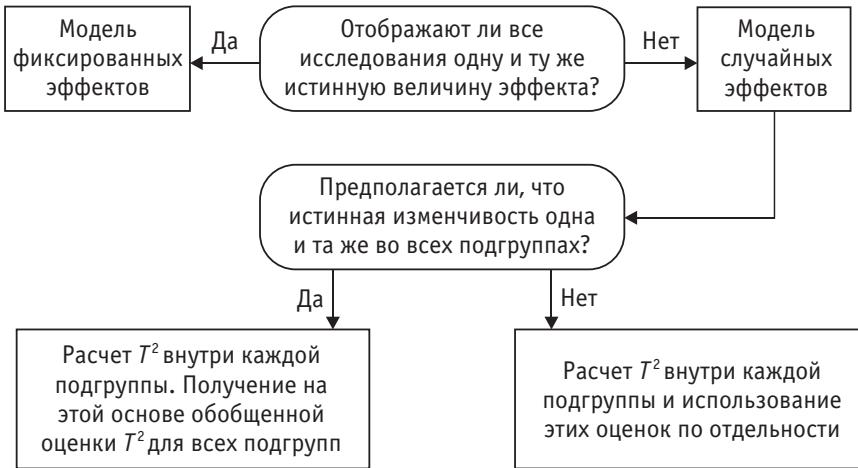


Рис. 1. Выбор модели раздельного анализа подгрупп в метаанализе

Для каждой из упомянутых моделей доступно три метода сравнения подгрупп: 1)  $Z$ -тест; 2)  $Q$ -тест, основанный на анализе дисперсии; 3)  $Q$ -тест гетерогенности.

$Z$ -тест подходит для случаев, когда количество сравниваемых подгрупп равно двум. Если же количество сравниваемых подгрупп превышает две, следует использовать один из  $Q$ -тестов.  $Q$ -тест, основанный на анализе дисперсии, является аналогом дисперсионного анализа (ANOVA). Что касается  $Q$ -теста гетерогенности, то при его использовании каждая из подгрупп рассматривается как отдельное исследование, а уже для оценки их (подгрупп как отдельных исследований) гетерогенности используются формулы, аналогичные формулам статистической проверки с помощью  $Q$ -теста, рассмотренные в моей предыдущей статье (формулы 1.1 и 1.2) [Дембицкий, 2013: с. 155–156]. В математическом смысле все три метода сравнения подгрупп являются эквивалентными.

Далее для демонстрации расчетов используются те же данные, что и в предыдущих статьях, а именно — данные четвертой волны Европейского социального исследования, посвященные связи пола респондента с тем, работал ли он за границей за последние 10 лет.

В качестве фактора, на основании которого осуществляется разбивка на подгруппы, выбран регион Европы — Западный или Восточный. К Восточному региону Европы отнесены все постсоциалистические страны, к Западному — все остальные, за исключением Израиля и Турции (они удалены из базы данных)<sup>1</sup>. Такая группировка осуществлена на основании гипотезы о том, что в странах с большим опытом демократии различия в опыте трудо-

<sup>1</sup> Решение не учитывать данные Турции и Израиля основывается на том, что культуры этих стран являются весьма специфичными с точки зрения европейских ценностей. Вместе с тем данные этих стран, в случае их включения, только бы подчеркнули различия между двумя регионами.

вой деятельности мужчин и женщин меньше. Соответственно, величины эффектов (напомню, они измерены с помощью натурального логарифма отношения шансов) для стран Западной Европы в среднем должны быть ближе к 0, чем аналогичные показатели для стран Восточной Европы.

Как и при традиционном статистическом сравнении подгрупп (например, в  $t$ -тесте Стьюдента или дисперсионном анализе), при сравнении подгрупп в метаанализе необходимо решить две задачи: 1) рассчитать среднюю величину эффекта и дисперсию для каждой подгруппы; 2) сравнить средние эффекты между группами.

### *Расчеты в модели фиксированных эффектов*

Для расчета средних величин эффектов и соответствующих дисперсий для каждой из подгрупп используются те же формулы, что и в модели фиксированных эффектов. Соответствующие формулы рассмотрены в предыдущих статьях по метаанализу [Дембицкий, 2012: с. 168–169<sup>1</sup>; Дембицкий, 2013: с. 156–157<sup>2</sup>]. Исходные данные представлены в таблицах 1 и 2.

Таблица 1

#### Исходные данные для стран Западной Европы

Страны	$\ln OR (Y_i)$	$V_{Y_i}$	$W_i$	$W_i Y_i$	$W_i Y_i^2$	$W_i^2$
1. Бельгия	0,432	0,043	23,38	10,10	4,36	546,62
2. Швейцария	0,412	0,037	26,92	11,09	4,57	724,69
3. Кипр	0,693	0,075	13,36	9,26	6,42	178,49
4. Германия	0,765	0,052	19,05	14,57	11,15	362,90
5. Дания	0,182	0,060	16,60	3,02	0,55	275,56
6. Испания	0,000	0,030	33,47	0,00	0,00	1120,24
7. Финляндия	0,501	0,050	20,04	10,04	5,03	401,60
8. Франция	0,610	0,046	21,51	13,12	8,00	462,68
9. Великобритания	0,536	0,036	27,79	14,90	7,98	772,28
10. Греция	0,255	0,054	18,64	4,75	1,21	347,45
11. Ирландия	0,300	0,024	41,94	12,58	3,77	1758,96
12. Голландия	0,806	0,049	20,53	16,55	13,34	421,48
13. Норвегия	0,329	0,278	3,59	1,18	0,39	12,89
14. Португалия	0,372	0,045	22,33	8,31	3,09	498,63
15. Швеция	0,513	0,038	26,54	13,62	6,98	704,37
$\Sigma$	–	–	<b>335,69</b>	<b>143,09</b>	<b>76,84</b>	<b>8588,84</b>

Расчеты для стран Западной Европы:

$$M_{ZE} = \frac{143,09}{335,69} = 0,4263;$$

<sup>1</sup> Формулы 4.1–4.6.

<sup>2</sup> Формулы 1.2–1.4.

$$V_M = \frac{1}{335,69} = 0,0030;$$

$$SE_M = \sqrt{0,003} = 0,0546;$$

$$C.i. = 0,4263 \pm 1,96 \times 0,055 = 0,4263 \pm 0,1070;$$

$$Z = \frac{0,4263}{0,055} = 7,8077;$$

$$p(Z) < 0,0001;$$

$$Q = 76,84 - \frac{143,09^2}{335,69} = 15,8470;$$

$$p(Q = 15,85; df = 14) = 0,3228;$$

$$C = 335,69 - \frac{8588,84}{335,69} = 310,1044;$$

$$T^2 = \frac{15,8470 - 14}{310,1044} = 0,0060;$$

$$I^2 = \left( \frac{15,8470 - 14}{15,8470} \right) \times 100 = 11,66\%.$$

Таблица 2

**Исходные данные для стран Восточной Европы**

Страны	$\ln OR (Y_i)$	$V_{Y_i}$	$W_i$	$W_i Y_i$	$W_i Y_i^2$	$W_i^2$
1. Болгария	0,207	0,043	23,32	4,83	1,00	543,82
2. Чехия	0,255	0,036	27,94	7,12	1,82	780,64
3. Эстония	1,264	0,040	25,27	31,94	40,37	638,57
4. Хорватия	0,761	0,061	16,51	12,56	9,56	272,58
5. Венгрия	0,642	0,066	15,17	9,74	6,25	230,13
6. Литва	0,647	0,038	26,12	16,90	10,93	682,25
7. Латвия	0,854	0,040	25,22	21,54	18,39	636,05
8. Польша	0,718	0,049	20,58	14,78	10,61	423,54
9. Румыния	0,307	0,051	19,60	6,02	1,85	384,16
10. Россия	1,670	0,131	7,62	12,73	21,25	58,06
11. Словения	0,713	0,114	8,80	6,27	4,47	77,44
12. Словакия	0,978	0,034	29,50	28,85	28,22	870,25
13. Украина	0,723	0,043	23,00	16,63	12,02	529,00
$\Sigma$	–	–	<b>268,65</b>	<b>189,91</b>	<b>166,74</b>	<b>6126,49</b>

Расчеты для стран Восточной Европы:

$$M_{BE} = \frac{181,91}{268,65} = 0,7069;$$

$$V_M = \frac{1}{268,65} = 0,0037;$$

$$SE_M = \sqrt{0,0037} = 0,0610;$$

$$C.i. = 0,7069 \pm 1,96 \times 0,0610 = 0,7069 \pm 0,1196;$$

$$Z = \frac{0,7069}{0,0610} = 11,5885;$$

$$p(Z) < 0,0001;$$

$$Q = 166,74 - \frac{189,91^2}{268,65} = 32,4917;$$

$$p(Q = 32,4917; df = 12) = 0,0012;$$

$$C = 268,65 - \frac{6129,49}{268,65} = 245,8453;$$

$$T^2 = \frac{32,4917 - 12}{245,8453} = 0,0834;$$

$$I^2 = \left( \frac{32,4917 - 12}{32,4917} \right) \times 100 = 63,07\%.$$

Для того, чтобы найти величину эффекта для всего массива, надо просто объединить суммы из двух таблиц и повторить расчеты (см. табл. 3). С целью краткости далее приведены только результаты для расчетов по всему массиву в сопоставлении с результатами для обеих подгрупп (см. табл. 4).

Таблица 3

### Исходные данные для расчета величины эффекта по всем странам

Группы стран	$W_i$	$W_i Y_i$	$W_i Y_i^2$	$W_i^2$
Западная Европа ( $\Sigma$ )	335,69	143,09	76,84	8588,84
Восточная Европа ( $\Sigma$ )	268,65	189,91	166,74	6126,49
$\Sigma$	<b>604,34</b>	<b>333,00</b>	<b>243,58</b>	<b>14715,33</b>

Таблица 4

### Итоговые статистики для модели фиксированных эффектов

Показатели	Западная Европа	Восточная Европа	Вместе
$M$	0,4263	0,7069	0,5510
$V_M$	0,0030	0,0037	0,0017
$SE_M$	0,0546	0,0610	0,0412
$C.i.$	$0,4263 \pm 0,1070$	$0,7069 \pm 0,1196$	$0,55 \pm 0,0808$
$Q$	15,8470	32,4917	60,0922
$T^2$	0,0060	0,0834	0,0571
$I^2$	11,66%	63,07%	55,07%

Теперь сравним величины эффектов между подгруппами, используя упомянутые выше методы.

*Z-тест*

Поскольку в нашем примере только две подгруппы, мы можем работать непосредственно с различием средних значений. Далее приведены соответствующие формулы:

$$1.1. Diff = M_1 - M_2 ;$$

$$1.2. Z_{Diff} = \frac{Diff}{SE_{Diff}} ;$$

$$1.3. SE_{Diff} = \sqrt{V_{M_1} + V_{M_2}} ;$$

$$1.4. p = 2[1 - (\Phi(|Z|))],$$

где  $\Phi(Z)$  — нормальное кумулятивное распределение.

Соответствующие расчеты будут иметь следующий вид:

$$Diff = 0,7069 - 0,4263 = 0,2806 ;$$

$$SE_{Diff} = \sqrt{0,0037 + 0,0030} = 0,0819 ;$$

$$Z_{Diff} = \frac{0,2806}{0,0819} = 3,4261 ;$$

$$p = 2[1 - (\Phi(|3,4261|))] = 0,0006.$$

Реализация выражения  $2(1 - (\Phi(|3,4261|)))$  в программе Microsoft Excel будет иметь следующий вид:  $= (1 - (НОРМСТРАСП(ABS(3,4261)))) \times 2$ . В целом результаты сравнения говорят о том, что подгруппы отличаются по степени выраженности изучаемого показателя.

*Q-тест, основанный на анализе дисперсии*

В традиционных исследованиях соответствующий подход заключается в разделении всей дисперсии на две составляющие — внутригрупповую и межгрупповую, после чего они проверяются на статистическую значимость с целью выявления различий между группами<sup>1</sup>. В метаанализе используется схожая логика. При этом рассчитываются такие параметры: 1)  $Q_1$  — взвешенная сумма квадратов отклонений значений для всех исследований в первой группе от соответствующего среднего значения; 2)  $Q_2$  — аналогичный показатель для второй группы; 3)  $Q_{within}$  — сумма  $Q_1$  и  $Q_2$  (в более общем виде  $Q_{within} = \sum Q_i$ ); 4)  $Q_{bet}$  — взвешенная сумма квадратов отклонений средних значений всех подгрупп от общего среднего значения (среднего значения по всему массиву); 5)  $Q$  — взвешенная сумма квадратов отклонений значения для всех исследований от общего среднего значения ( $Q = Q_{within} + Q_{bet}$ ).

Теперь рассмотрим расчеты:

$$Q_{within} = 15,8470 + 32,4917 = 48,3387 ;$$

$$Q_{bet} = Q - Q_{within} = 60,0922 - 48,3387 = 11,7535.$$

Каждая  $Q$ -статистика проверяется на значимость в соответствии с количеством степеней свободы. Для  $Q$  количество степеней свободы равно количеству всех величин эффекта минус 1, для  $Q_i$  — количеству величин эф-

<sup>1</sup> См., например: [Хили, 2005: с. 293–314].

фактов в соответствующей подгруппе минус 1, для  $Q_{within}$  — количеству всех величин эффектов минус количество подгрупп, для  $Q_{bet}$  — количеству подгрупп минус 1. Следовательно:

$$df_{within} = 28 - 2 = 26;$$

$$df_{bet} = 2 - 1 = 1.$$

Для определения статистической значимости в программе Microsoft Excel следует применить следующее выражение: =ХИ2РАСП(Q; df). В таблице 5 представлена обобщенная таблица для Q-статистик.

Таблица 5

## Итоговые Q-статистики

Показатели	Q	df	p
Западная Европа	15,8470	14	0,3228
Восточная Европа	32,4917	12	0,0012
Внутригрупповая изменчивость	48,3387	26	0,0049
Межгрупповая изменчивость	11,7535	1	0,0006
Общая изменчивость	60,0922	27	0,0003

На основании этой таблицы можно сделать несколько выводов. Во-первых, данные первой подгруппы (Западная Европа) являются гомогенными, в то время как данные для второй (Восточная Европа) — остались гетерогенными. Именно за счет второй группы внутригрупповая изменчивость является статистически значимой. Во-вторых, можно сделать вывод об отличии подгрупп. На это указывает показатель статистической значимости для межгрупповой изменчивости (собственно, определение этого и было нашей главной задачей). В идеале статистическая значимость, показываемая разными методами, должна быть одинаковой. В данном же случае мы наблюдаем минимальные различия (в 0,0002), обусловленные погрешностями расчетов. Наконец, общая изменчивость также указывает на гетерогенность результатов.

## Q-тест гетерогенности

Преыдуший метод может быть реализован и по-другому. Можно рассматривать средние значения эффективных размеров в двух подгруппах как два отдельных исследования (см. табл. 6), после чего проверить их на гетерогенность с помощью Q тем же способом, который описан в моей предыдущей статье [Дембицкий, 2013: с. 156].

Таблица 6

Исходные данные  
(подгруппы как исследования)

“Исследования”	$Y_i$	$V_{Y_i}$	$W_i$	$W_i Y_i$	$W_i Y_i^2$
Западная Европа	0,4263	0,0030	333,33	142,10	60,58
Восточная Европа	0,7069	0,0037	270,27	191,05	135,06
$\Sigma$	—	—	<b>603,60</b>	<b>333,15</b>	<b>195,63</b>



В данном случае мы начинаем с двух “исследований” с величинами эффектов — 0,4263 и 0,7069, а также дисперсиями — 0,0030 и 0,0037. Далее к этим данным применяются обычные метааналитические расчеты.

$$M = \frac{333,15}{603,60} = 0,5519;$$

$$V_M = \frac{1}{603,60} = 0,0017;$$

$$Q = 195,63 - \frac{333,15^2}{603,60} = 11,7517;$$

$$p(Q = 11,7517; df = 1) = 0,0006.$$

Таким образом, мы опять получаем подтверждение статистически значимого различия между группами.

### *Величина различий*

Вместе с тем рассмотренные нами результаты проверки (в данном случае речь идет о всех трех методах) говорят исключительно о статистической, но не практической значимости различий. Поэтому следует также построить доверительный интервал для величины различий между соответствующими средними величинами эффектов (*Diff*, формула 1.1):

$$1.5. \text{C.i.}_{Diff} = Diff \pm 1,96 \times SE_{Diff}.$$

Параметры *Diff* и *SE<sub>Diff</sub>* найдены нами ранее. Исходя из этого, 95-процентный доверительный интервал различий между группами равен:

$$\text{C.i.}_{Diff} = 0,2806 \pm 1,96 \times 0,0819 = 0,2806 \pm 0,1605.$$

Следовательно, с указанной вероятностью величина различий попадает в интервал от 0,1201 до 0,4411. При этом следует помнить, что все рассматриваемые здесь величины эффектов, как и все производные от них значения, представлены в шкале натурального логарифма. В шкале отношения шансов границы интервала будут равны 1,1276 и 1,5544 соответственно<sup>1</sup>.

### ***Расчеты в модели случайных эффектов с использованием раздельной оценки $\tau^2$***

Если в модели фиксированных эффектов дисперсия величин эффектов включала исключительно внутригрупповую изменчивость ( $V_{Y_i}$ ), то здесь она дополнительно включает межгрупповую изменчивость ( $V_{Y_i}^* = V_{Y_i} + T^2$ ). Поскольку оба компонента известны из предыдущих расчетов, можно определить веса исследований и другие параметры (см. табл. 7–8).

Еще одно отличие касается расчета *Q*-статистики. В данном случае осуществляется ее пересчет на основании новых исходных данных ( $W_i^*$ ,  $W_i^* Y_i$  и  $W_i^* Y_i^2$ ). При этом соответствующий параметр ( $Q^*$ ) необходим для расчетов с помощью второго и третьего методов и не используется для проверки нуле-

<sup>1</sup> Чтобы вернуться к оригинальной шкале, надо найти экспоненту для каждого из значений. В Microsoft Excel данная процедура реализуется следующим образом: = **EXP(X)**.

вой гипотезы о гомогенности результатов (эта гипотеза уже была проверена). Соответственно  $Q^*$  не проверяется на статистическую значимость.

Таблица 7

## Исходные данные для стран Западной Европы

Страны	$\ln OR(Y_i)$	$V_{Y_i}$	$T^2$	$V_{Y_i}^*$	$W_i^*$	$W_i^* Y_i$	$W_i^* Y_i^2$
1. Бельгия	0,432	0,043	0,0060	0,049	20,41	8,82	3,81
2. Швейцария	0,412	0,037	0,0060	0,043	23,26	9,58	3,95
3. Кипр	0,693	0,075	0,0060	0,081	12,35	8,56	5,93
4. Германия	0,765	0,052	0,0060	0,058	17,24	13,19	10,09
5. Дания	0,182	0,060	0,0060	0,066	15,15	2,76	0,50
6. Испания	0,000	0,030	0,0060	0,036	27,78	0,00	0,00
7. Финляндия	0,501	0,050	0,0060	0,056	17,86	8,95	4,48
8. Франция	0,610	0,046	0,0060	0,052	19,23	11,73	7,16
9. Великобритания	0,536	0,036	0,0060	0,042	23,81	12,76	6,84
10. Греция	0,255	0,054	0,0060	0,060	16,67	4,25	1,08
11. Ирландия	0,300	0,024	0,0060	0,030	33,33	10,00	3,00
12. Голландия	0,806	0,049	0,0060	0,055	18,18	14,65	11,81
13. Норвегия	0,329	0,278	0,0060	0,284	3,52	1,16	0,38
14. Португалия	0,372	0,045	0,0060	0,051	19,61	7,29	2,71
15. Швеция	0,513	0,038	0,0060	0,044	22,73	11,66	5,98
$\Sigma$	–	–	–	–	<b>291,12</b>	<b>125,36</b>	<b>67,73</b>

Расчеты для стран Западной Европы:

$$M_{ZE}^* = \frac{125,36}{291,12} = 0,4306;$$

$$V_{M^*} = \frac{1}{291,12} = 0,0034;$$

$$SE_{M^*} = \sqrt{0,0034} = 0,0586;$$

$$C.i.^* = 0,4306 \pm 1,96 \times 0,0586 = 0,4306 \pm 0,1149;$$

$$Z^* = \frac{0,4306}{0,0586} = 7,3481;$$

$$p(Z^*) < 0,0001;$$

$$Q^* = 67,73 - \frac{125,36^2}{291,12} = 13,7484.$$

Таблица 8

## Исходные данные для стран Восточной Европы

Страны	$\ln OR(Y_i)$	$V_{Y_i}$	$T^2$	$V_{Y_i}^*$	$W_i^*$	$W_i^* Y_i$	$W_i^* Y_i^2$
1. Болгария	0,207	0,043	0,0834	0,13	7,91	1,64	0,34
2. Чехия	0,255	0,036	0,0834	0,12	8,38	2,14	0,54
3. Эстония	1,264	0,040	0,0834	0,12	8,10	10,24	12,95
4. Хорватия	0,761	0,061	0,0834	0,14	6,93	5,27	4,01
5. Венгрия	0,642	0,066	0,0834	0,15	6,69	4,30	2,76
6. Литва	0,647	0,038	0,0834	0,12	8,24	5,33	3,45
7. Латвия	0,854	0,040	0,0834	0,12	8,10	6,92	5,91
8. Польша	0,718	0,049	0,0834	0,13	7,55	5,42	3,89
9. Румыния	0,307	0,051	0,0834	0,13	7,44	2,28	0,70
10. Россия	1,670	0,131	0,0834	0,21	4,66	7,79	13,01
11. Словения	0,713	0,114	0,0834	0,20	5,07	3,61	2,58
12. Словакия	0,978	0,034	0,0834	0,12	8,52	8,33	8,15
13. Украина	0,723	0,043	0,0834	0,13	7,91	5,72	4,14
$\Sigma$	–	–	–	–	<b>95,50</b>	<b>68,99</b>	<b>62,42</b>

Расчеты для стран Восточной Европы:

$$M_{BE}^* = \frac{68,99}{95,50} = 0,7224;$$

$$V_{M^*} = \frac{1}{95,50} = 0,0105;$$

$$SE_{M^*} = \sqrt{0,0105} = 0,1023;$$

$$C.i.^* = 0,7224 \pm 1,96 \times 0,1023 = 0,7224 \pm 0,2006;$$

$$Z^* = \frac{0,7224}{0,1023} = 7,0616;$$

$$p(Z^*) < 0,0001;$$

$$Q^* = 62,24 - \frac{68,99^2}{95,50} = 12,5811.$$

Как и в модели фиксированных эффектов, при нахождении средней величины эффекта для всего массива, надо объединить суммы из двух таблиц и повторить расчеты (см. табл. 9). С целью краткости далее приведены только результаты для расчетов по всему массиву в сопоставлении с результатами для обеих групп (см. табл. 10).

Таблица 9

## Исходные данные для расчета величины эффекта по всем странам

Группы стран	$W_i^*$	$W_i^* Y_i$	$W_i^* Y_i^2$
Западная Европа ( $\Sigma$ )	291,12	125,36	76,84
Восточная Европа ( $\Sigma$ )	95,50	68,99	166,74
$\Sigma$	<b>386,62</b>	<b>194,35</b>	<b>130,15</b>

Таблица 10

## Итоговые статистики для модели случайных эффектов

Показатели	Западная Европа	Восточная Европа	Вместе
$M^*$	0,4306	0,7224	0,5027
$V_M^*$	0,0034	0,0105	0,0026
$SE_M^*$	0,0586	0,1023	0,0509
$C.i.^*$	$0,4306 \pm 0,1149$	$0,7224 \pm 0,2006$	$0,55 \pm 0,0997$
$Q^*$	13,7484	12,5811	32,4522

Теперь сравним величины эффектов между подгруппами с помощью каждого из методов. Структура формул во всех случаях остается та же, что и раньше.

*Z-тест*

$$Diff^* = 0,7224 - 0,4306 = 0,2918;$$

$$SE_{Diff}^* = \sqrt{0,0034 + 0,0105} = 0,1179;$$

$$Z_{Diff}^* = \frac{0,2918}{0,1179} = 2,4750;$$

$$p = 2[1 - (\Phi(|2,4750|))] = 0,0133.$$

Следовательно, в рамках этой модели первый метод также указывает на статистическую значимость различий между группами. При этом вероятность ошибки возросла (хоть и осталась на приемлемом уровне).

*Q-тест, основанный на анализе дисперсии*

$$Q_{within}^* = 13,7484 + 12,5811 = 26,3295;$$

$$Q_{bet}^* = Q^* - Q_{within}^* = 32,4522 - 26,3295 = 6,1227;$$

$$df_{bet} = 2 - 1 = 1;$$

$$p(Q_{bet}^* = 6,1227; df = 1) = 0,0134.$$

Результаты статистической значимости здесь несколько иные, чем в предыдущем случае (на 0,0001 больше). Здесь и далее это связано с погрешностями вследствие округления.

*Q-тест гетерогенности*

Исходные данные представлены ниже (см. табл. 11).

Таблица 11

**Исходные данные (подгруппы как исследования)**

“Исследования”	$Y_i^*$	$V_{Y_i}^*$	$W_i^*$	$W_i^* Y_i$	$W_i^* Y_i^2$
Западная Европа	0,4306	0,0034	294,12	126,65	54,53
Восточная Европа	0,7224	0,0105	95,24	68,80	49,70
$\Sigma$	–	–	<b>389,36</b>	<b>195,45</b>	<b>104,24</b>

$$M^* = \frac{195,45}{389,36} = 0,5020;$$

$$V_{M^*} = \frac{1}{389,36} = 0,0026;$$

$$Q^* = 104,24 - \frac{195,45^2}{389,36} = 6,1285;$$

$$p(Q^* = 6,1285; df = 1) = 0,0133.$$

Таким образом, мы опять получаем подтверждение статистически значимого различия между группами.

*Величина различий*

$$C.i._{Diff} = 0,2918 \pm 1,96 \times 0,1179 = 0,2918 \pm 0,2311.$$

**Расчеты в модели случайных эффектов с использованием объединенной оценки  $\tau^2$** 

Обобщенная оценка  $\tau^2$  получается следующим образом:

$$2.1. T_{within}^2 = \frac{\sum Q_i - \sum df_i}{\sum C_i},$$

где  $Q_i$ ,  $df_i$  и  $C_i$  – параметры, рассчитанные для соответствующих подгрупп на основании данных в модели фиксированных эффектов (см. расчеты для данных в табл. 1–2).

Данные, необходимые для нахождения объединенной оценки в нашем случае, приведены в таблице 12.

Таблица 12

**Данные для объединенной оценки  $\tau^2$** 

Группы стран	$Q$	$df$	$C$
Западная Европа ( $\Sigma$ )	15,8470	14	310,1044
Восточная Европа ( $\Sigma$ )	32,4917	12	245,8453
$\Sigma$	<b>48,3387</b>	<b>26</b>	<b>555,9497</b>

Таким образом:

$$T^2_{within} = \frac{48,3387 - 26}{555,9497} = 0,0402.$$

Если в предыдущей модели каждая из подгрупп имела свою оценку  $\tau^2$  (0,0060 и 0,0834), то здесь в обеих группах эта оценка равна 0,0402. Соответственно, необходимо повторить расчеты с новым параметром межгрупповой изменчивости (см. табл. 13–14).

Таблица 13

## Исходные данные для стран Западной Европы

Страны	$\ln OR(Y_i)$	$VY_i$	$T^2_{within}$	$V^*_{Y_i}$	$W_i^*$	$W_i^* Y_i$	$W_i^* Y_i^2$
1. Бельгия	0,432	0,043	0,0402	0,0832	12,02	5,19	2,24
2. Швейцария	0,412	0,037	0,0402	0,0772	12,95	5,34	2,20
3. Кипр	0,693	0,075	0,0402	0,1152	8,68	6,02	4,17
4. Германия	0,765	0,052	0,0402	0,0922	10,85	8,30	6,35
5. Дания	0,182	0,060	0,0402	0,1002	9,98	1,82	0,33
6. Испания	0,000	0,030	0,0402	0,0702	14,25	0,00	0,00
7. Финляндия	0,501	0,050	0,0402	0,0902	11,09	5,55	2,78
8. Франция	0,610	0,046	0,0402	0,0862	11,60	7,08	4,32
9. Великобритания	0,536	0,036	0,0402	0,0762	13,12	7,03	3,77
10. Греция	0,255	0,054	0,0402	0,0942	10,62	2,71	0,69
11. Ирландия	0,300	0,024	0,0402	0,0642	15,58	4,67	1,40
12. Голландия	0,806	0,049	0,0402	0,0892	11,21	9,04	7,28
13. Норвегия	0,329	0,278	0,0402	0,3182	3,14	1,03	0,34
14. Португалия	0,372	0,045	0,0402	0,0852	11,74	4,37	1,62
15. Швеция	0,513	0,038	0,0402	0,0782	12,79	6,56	3,37
$\Sigma$	–	–	–	–	<b>169,61</b>	<b>74,70</b>	<b>40,86</b>

Расчеты для стран Западной Европы:

$$M^*_{ZE} = \frac{74,70}{169,61} = 0,4404;$$

$$V^*_{M^*} = \frac{1}{169,61} = 0,0059;$$

$$SE^*_{M^*} = \sqrt{0,0059} = 0,0767;$$

$$C.i.^* = 0,4404 \pm 1,96 \times 0,0767 = 0,4404 \pm 0,1505;$$

$$Z^* = \frac{0,4404}{0,0767} = 5,7419;$$

$$p(Z^*) < 0,0001;$$

$$Q^* = 40,86 - \frac{74,70^2}{169,61} = 7,9605.$$

Таблица 14

## Исходные данные для стран Восточной Европы

Страны	$\ln OR(Y_i)$	$VY_i$	$T^2_{within}$	$V^*_{Y_i}$	$W_i^*$	$W_i^*Y_i$	$W_i^*Y_i^2$
1. Болгария	0,207	0,043	0,0402	0,0832	12,02	2,49	0,52
2. Чехия	0,255	0,036	0,0402	0,0762	13,12	3,35	0,85
3. Эстония	1,264	0,040	0,0402	0,0802	12,47	15,76	19,92
4. Хорватия	0,761	0,061	0,0402	0,1012	9,88	7,52	5,72
5. Венгрия	0,642	0,066	0,0402	0,1062	9,42	6,05	3,88
6. Литва	0,647	0,038	0,0402	0,0782	12,79	8,27	5,35
7. Латвия	0,854	0,040	0,0402	0,0802	12,47	10,65	9,09
8. Польша	0,718	0,049	0,0402	0,0892	11,21	8,05	5,78
9. Румыния	0,307	0,051	0,0402	0,0912	10,96	3,37	1,03
10. Россия	1,670	0,131	0,0402	0,1712	5,84	9,75	16,29
11. Словения	0,713	0,114	0,0402	0,1542	6,49	4,62	3,30
12. Словакия	0,978	0,034	0,0402	0,0742	13,48	13,18	12,89
13. Украина	0,723	0,043	0,0402	0,0832	12,02	8,69	6,28
$\Sigma$	–	–	–	–	<b>142,16</b>	<b>101,75</b>	<b>90,91</b>

Расчеты для стран Восточной Европы:

$$M^*_{BE} = \frac{101,75}{142,16} = 0,7157;$$

$$V^*_{M^*} = \frac{1}{142,16} = 0,0070;$$

$$SE^*_{M^*} = \sqrt{0,0070} = 0,0839;$$

$$C.i.^* = 0,7157 \pm 1,96 \times 0,0839 = 0,7157 \pm 0,1644;$$

$$Z^* = \frac{0,7157}{0,0839} = 8,5304;$$

$$p(Z^*) < 0,0001;$$

$$Q^* = 90,91 - \frac{101,75^2}{142,16} = 18,0832.$$

Опять же, при нахождении средней величины эффекта для всего массива надо объединить суммы из двух таблиц и повторить расчеты (см. табл. 15). С целью краткости далее приведены только результаты для расчетов по всему массиву в сопоставлении с результатами для обеих групп (см. табл. 16).

Таблица 15

## Исходные данные для расчета величины эффекта по всем странам

Группы стран	$W_i^*$	$W_i^* Y_i$	$W_i^* Y_i^2$
Западная Европа ( $\Sigma$ )	169,61	74,70	40,86
Восточная Европа ( $\Sigma$ )	142,16	101,75	90,91
$\Sigma$	<b>311,77</b>	<b>176,45</b>	<b>131,77</b>

Таблица 16

## Итоговые статистики для модели случайных эффектов

Показатели	Западная Европа	Восточная Европа	Вместе
$M^*$	0,4404	0,7157	0,5660
$V_M^*$	0,0059	0,0070	0,0032
$SE_M^*$	0,0767	0,0839	0,0566
$C.i.^*$	0,4404 $\pm$ 0,1505	0,7157 $\pm$ 0,1644	0,57 $\pm$ 0,1110
$Q^*$	7,9605	18,0832	31,9060

Рассмотрим применение каждого из методов для сравнения подгрупп. Формулы те же.

*Z-тест*

$$Diff^* = 0,7157 - 0,4404 = 0,2753;$$

$$SE_{Diff}^* = \sqrt{0,0059 + 0,0070} = 0,1136;$$

$$Z_{Diff}^* = \frac{0,2753}{0,1136} = 2,4234;$$

$$p = 2[1 - (\Phi(|2,4234|))] = 0,0154.$$

По сравнению с предыдущей моделью значение  $Z$  уменьшилось незначительно. Как и в предыдущем случае, оно указывает на статистическую значимость различий между группами.

*Q-тест, основанный на анализе дисперсии*

$$Q_{within}^* = 7,9605 + 18,0832 = 26,0437;$$

$$Q_{bet}^* = Q^* - Q_{within}^* = 31,9060 - 26,0437 = 5,8623;$$

$$df_{bet} = 2 - 1 = 1;$$

$$p(Q_{bet}^* = 5,8623; df = 1) = 0,0150.$$

*Q-тест гетерогенности*

Исходные данные представлены ниже (см. табл. 17).



Таблица 17

## Исходные данные (подгруппы как исследования)

“Исследования”	$Y_i^*$	$V_{Y_i}^*$	$W_i^*$	$W_i^* Y_i$	$W_i^* Y_i^2$
Западная Европа	0,4404	0,0059	169,49	74,64	32,87
Восточная Европа	0,7157	0,0070	142,86	102,24	73,18
$\Sigma$	–	–	<b>312,35</b>	<b>176,89</b>	<b>106,05</b>

$$M^* = \frac{176,89}{312,35} = 0,5663;$$

$$V_{M^*} = \frac{1}{312,35} = 0,0032;$$

$$Q^* = 106,05 - \frac{176,89^2}{312,35} = 5,8737;$$

$$p(Q^* = 5,8737; df = 1) = 0,0154.$$

## Величина различий

$$C.i._{Diff} = 0,2753 \pm 1,96 \times 0,1136 = 0,2753 \pm 0,2227.$$

## Пропорция объясненной дисперсии

Вспомним, что в модели случайных эффектов вся изменчивость образуется из случайных ошибок и истинной или межгрупповой изменчивости (величина второй в процентном соотношении обозначается с помощью  $I^2$ , а в своей оригинальной шкале — с помощью  $T^2$ ). При использовании объединенной оценки  $\tau^2$  можно вычислить, какую пропорцию истинной дисперсии ( $R^2$ ) объясняет фактор, введенный для выделения подгрупп (в нашем случае — регионов Европы).

Самая общая формула имеет следующий вид:

$$2.2. R^2 = \frac{T_{explained}^2}{T_{total}^2};$$

или

$$2.3. R^2 = 1 - \frac{T_{unexplained}^2}{T_{total}^2}.$$

В случае рассматриваемой нами модели  $T_{within}^2$  как раз и говорит о величине необъясненной истинной дисперсии, то есть определяет числитель для формулы (2.3). Что касается  $T_{total}^2$ , то ее величина равна истинной изменчивости ( $T^2$ ), рассчитываемой в модели фиксированных эффектов (в нашем случае она равна 0,0571, см. столбец “Вместе” в таблице 4). Следовательно, пропорцию объясненной дисперсии можно найти по формуле:

$$2.4. R^2 = 1 - \frac{T_{within}^2}{T_{total}^2}.$$

Найдем  $R^2$ :

$$R^2 = 1 - \frac{0,0402}{0,0571} = 0,2960.$$

Таким образом, почти 30% истинной изменчивости объясняется регионом расположения стран. Чтобы эта цифра была еще более понятной, обратимся к следующему рисунку (см. рис. 2):

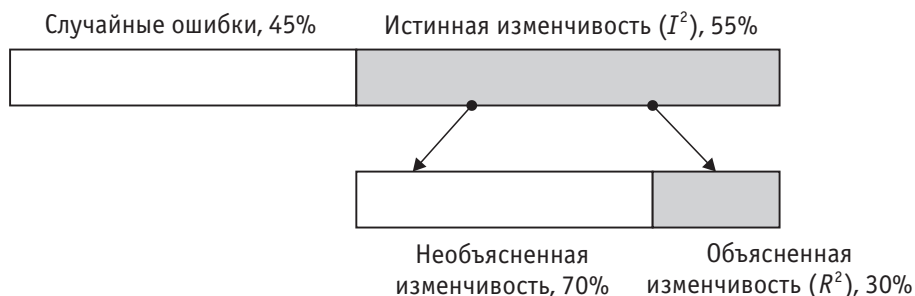


Рис. 2. Изменчивость, объясненная в процессе отдельного анализа подгрупп

Также при расчете  $R^2$  следует помнить два нюанса. Во-первых, несмотря на то, что возможная величина  $R^2$  попадает в интервал от 0 до 1 (или от 0% до 100%), вследствие случайных ошибок полученное значение может выйти за пределы указанного интервала. В таком случае величину  $R^2$  необходимо принять за 0 (если полученное значение меньше 0) или за 1 (если полученное значение больше 1). Во-вторых, использование  $R^2$  имеет смысл только в том случае, когда мы применяем модель случайных эффектов, так как в модели фиксированных эффектов предполагается, что вся изменчивость вызвана исключительно случайными ошибками (то есть истинная изменчивость в любом случае приравнивается к 0).

### Выводы

Раздельный анализ подгрупп является базовым подходом к определению источников гетерогенности в метаанализе. Несмотря на свою очевидную простоту, раздельный анализ, как и любая другая статистическая процедура, требует соблюдения ряда требований: 1) ограничить число подгрупп до минимума (с целью минимизации получения “позитивного” результата вследствие случайности); 2) по возможности планировать раздельный анализ заранее, исходя из концептуальных соображений (с целью минимизации смещений на основании конкретного результата); 3) учитывать тот факт, что на выявленные различия могут влиять и другие неучтенные факторы [Diversity and heterogeneity, s.a.].

В нашем случае, разделение Европы на два региона вполне вписывается в определенные теоретические рамки, что говорит в пользу полученных статистически значимых различий. Так, в странах Западной Европы наблюдается меньше неравенства в шансах иметь работу за рубежом, чем в странах Восточной Европы (такой вывод следует из результатов всех трех моделей, рассмотренных выше).

С другой стороны, результаты отдельно по странам Восточной Европы указывают на внутреннюю неоднородность этой группы стран. Последнее

вполне логично, так как ряд из них продвинулись по пути евроинтеграции значительно дальше остальных, что должно было сказаться и на гендерной детерминации шансов на работу за рубежом.

### ***Источники***

*Дембицкий С.* Метаанализ: ключевые понятия и основы вычислений (на примере данных кросс-национальных исследований) / С. Дембицкий // Социология: теория, методы, маркетинг. — 2012. — № 3. — С. 160–174.

*Дембицкий С.* Оценка гетерогенности в метаанализе (на примере данных кросс-национальных исследований) / С. Дембицкий // Социология: теория, методы, маркетинг. — 2013. — № 1. — С. 154–165.

*Хили Дж.* Статистика. Социологические и маркетинговые исследования / Дж. Хили. — К.: ООО “ДиаСофтЮП”; СПб.: Питер, 2005. — 638 с.

*Borenstein M.* Introduction to Meta-Analysis / M. Borenstein, L. Hedges, J. Higgins, H. Rothstein. — New Jersey: Wiley, 2009.

Diversity and heterogeneity [Electronic source]. — Режим доступа:  
<http://www.cochrane-net.org/openlearning/html/mod13-5.htm>

*Song F.* Methods for Exploring Heterogeneity in Meta-Analysis / F. Song, T. Sheldon, A. Sutton, K. Abrams, D. Jones // Evaluation and the Health Professions. — 2001. — № 2. — P. 126–151.