ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

12 • 2014

МЕХАНІКА

УДК 517.958:536.12

Л. М. Журавчак, Б. Є. Грицько, О. С. Крук

Чисельно-аналітичний підхід до розрахунку теплових полів з урахуванням термочутливості матеріалу середовища та змішаних крайових умов

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Р. М. Кушніром)

Обгрунтовано ефективність поєднання непрямих методів граничних та приграничних елементів з перетворенням Кірхгофа для побудови чисельно-аналітичного розв'язку нелінійних тривимірних задач теплопровідності з урахуванням залежності теплофізичних коефіцієнтів від температури та інтенсивності внутрішніх джерел. З використанням інтегральних зображень для перетворення Кірхгофа побудовано дискретно-континуальну модель задачі з мішаними умовами першого, другого та третього роду. Здійснено низку обчислювальних експериментів для експоненційної та степеневої залежності коефіцієнта теплопровідності від температури.

Моделювання й оптимізація теплових процесів мають важливе значення для різних галузей економіки і техніки, зокрема, в приладо- і машинобудуванні при проектуванні мікроелектронних пристроїв, при покритті конструкцій та обладнанні вогнезахисними матеріалами. Для більшості вказаних матеріалів їх теплофізичні характеристики залежать від температури внаслідок дії внутрішніх і зовнішніх теплових факторів. Математичні моделі, що враховують вплив температури на ці характеристики (термочутливість), приводять до нелінійних крайових задач математичної фізики, при розв'язуванні яких застосовують аналітичні, аналітично-чисельні та чисельні методи, як правило, для тіл канонічної форми [1–5]. Одним з підходів, до розв'язання таких задач є виділення оператора, що характеризує вплив нелінійності, і застосування до нього ітераційних методів з використання дискретизації області нелінійності [6]. Інший, більш ефективний, шлях розв'язування двовимірних стаціонарних задач полягає у використанні перетворення Кірхгофа, яке зводить нелінійне рівняння до лінійного [1–4, 7].

Математичне моделювання температурних полів у просторових термочутливих об'єктах усуває необхідність проведення тестово-експериментальних випробувань для прогнозування їх міцності й надійності та потребує розвитку відомих і розробки нових обчислювальних методів знаходження теплових полів в областях неканонічної форми та проведення на цій базі грунтовних наукових досліджень.

Формулювання задачі та її часткова лінеаризація за допомогою перетворення Кірхгофа. Розглянемо плоску однозв'язну однорідну область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ з простим замкнутим краєм Γ. Коефіцієнт теплопровідності $\lambda(\theta)$ матеріалу об'єкта та коефіцієнт тепловіддачі з його межі $\alpha(\theta)$ є неперервними функціями від шуканої температури $\theta(x)$ [1–3]:

$$\lambda(\theta) = \lambda_0(1 + \lambda_0(\theta)S_+(\theta - \theta_\lambda)\chi_\theta), \qquad \alpha(\theta) = \alpha_0(1 + \alpha_0(\theta)S_+(\theta - \theta_\lambda)\chi_\theta), \tag{1}$$

де χ_θ — характеристична функція багатозв'язної області Ω_θ, в якій $\theta > \min(\theta_\lambda, \theta_\alpha)$, $S_+(z) = 1$ при $z > 0$, $S_+(z) = 0$ при $z \leqslant 0$, $x = (x_1, x_2, x_3)$.

На частинах $\partial\Omega^s \subset \Gamma$ $(s = 1, 2, 3)$, $\bigcup\limits_{s=1}^{3} \partial\Omega^s = \Gamma$ межі тіла задано, відповідно, поведінку температурного поля, теплового потоку та конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем, температура якого $\theta_c(x)$. Всередині області Ω діє джерело тепла інтенсивністю $\psi(x)$.

Для визначення стаціонарного температурного поля в Ω маємо нелінійне рівняння [1]

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda(\theta)\frac{\partial\theta(x)}{\partial x_j}\right) = -\psi(x)\chi_\psi, \qquad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3, \tag{2}$$

граничні умови першого, другого та третього роду

$$\begin{gathered} \theta(x) = \theta_\Gamma(x), \qquad x \in \partial\Omega^1, \qquad -\lambda(\theta)\frac{\partial\theta(x)}{\partial n(x)} = q_\Gamma(x), \qquad x \in \partial\Omega^2, \\ \alpha(\theta)\theta(x) - \lambda(\theta)\frac{\partial\theta(x)}{\partial n(x)} = \alpha(\theta)\theta_c(x), \qquad x \in \partial\Omega^3. \end{gathered} \tag{3}$$

Тут $n(x) = (n_1(x), n_2(x), n_3(x))$ — зовнішня однозначно визначена нормаль до Γ; $\psi(x)$ — інтенсивність джерел, які діють в $\Omega_\psi \subset \Omega$; χ_ψ — характеристична функція області Ω_ψ, тобто $\chi_\psi = 1$ при $x \in \chi_\psi$, $\chi_\psi = 0$ при $x \notin \chi_\psi$.

Після введення прямого та оберненого перетворення Кірхгофа

$$\vartheta(x) = K(\theta^{(m)}(x)) = \frac{1}{\lambda_0}\int\limits_{\theta^{(0)}}^{\theta(x)} \lambda(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta, \qquad K^{-1}(\vartheta(x)) = \theta(x) \tag{4}$$

для знаходження $\vartheta(x)$ одержимо частково лінеаризовану задачу:

$$\Delta\vartheta(x) = -\psi(x)\chi_\psi, \qquad x \in \Omega, \tag{5}$$

$$\begin{gathered} \vartheta(x) = K(\theta_\Gamma(x)), \qquad x \in \partial\Omega^1, \qquad -\frac{\partial\vartheta(x)}{\partial n(x)} = q_\Gamma(x), \qquad x \in \partial\Omega^2, \\ -\frac{\partial\vartheta(x)}{\partial n(x)} + \alpha(K^{-1}(\vartheta))K^{-1}(\vartheta) = \alpha(K^{-1}(\vartheta))\theta_c(x), \qquad x \in \partial\Omega^3, \end{gathered} \tag{6}$$

де $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{3} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ — оператор Лапласа; $\theta^{(0)}$ — характеристична температура.

Ми бачимо, що перетворення Кірхгофа лінеаризує вихідне рівняння (2) та граничну умову другого роду (3), гранична умова першого роду залишається лінійною, а гранична умова третього роду (3) — нелінійною.

Побудова інтегральних зображень розв'язків лінеаризованого рівняння та дискретно-континуальної моделі. Застосовуємо непрямі методи граничних та приграничних елементів [8, 5]. Введемо на межі Γ області Ω та у зовнішній приграничній до неї смузі $G = B \setminus \Omega$ товщиною h ($\Omega \subset B \subset \mathbb{R}^3$, $\Gamma \bigcap \partial B = \oslash$, ∂B — межа розширеної області B) фіктивні джерела тепла невідомої інтенсивності $\varphi^{(\Gamma)}(x)$, $\varphi^{(G)}(x)$. Внаслідок цього опишемо шукану функцію замість (5) рівнянням

$$\Delta\vartheta^{(\gamma)}(x) = -\varphi^{(\gamma)}(x)\chi_\gamma - \psi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^3, \qquad \gamma \in \{\Gamma, G\}, \tag{7}$$

де $\chi_\gamma(x)$ — характеристична функція γ, тобто $\chi_\gamma(x) = 1$ при $x \in \gamma$, $\chi_\gamma(x) = 0$ при $x \notin \gamma$. Тоді інтегральні зображення перетворення Кірхгофа як розв'язку рівнянь (7) та його похідної за нормаллю мають вигляд:

$$\vartheta^{(\gamma)}(x) = F^\gamma(x, U) + F_\psi(x, U), \qquad -\frac{\partial\vartheta^{(\gamma)}(x)}{\partial n(x)} = F^\gamma(x, Q), \tag{8}$$

де

$$F^\gamma(x, \Phi) = \int\limits_\gamma \Phi(x, \xi)\varphi^{(\gamma)}(\xi)\,\mathrm{d}\gamma(\xi); \qquad F_\psi(x, \Phi) = \int\limits_{\Omega_\psi} \Phi(x, \xi)\psi(\xi)\,\mathrm{d}\Omega_\psi(\xi);$$

$U(x, \xi)$ — фундаментальний розв'язок оператора Лапласа, який точно задовольняє рівняння (5) в Ω, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$Q(x, \xi) = -\sum_{j=1}^{3} Q_j(x, \xi) n_j(x), \qquad Q_j(x, \xi) = \frac{\partial U(x, \xi)}{\partial x_j}.$$

Спрямувавши в (8) x з середини області Ω до зовнішньої межі Γ для задоволення умов (3), одержимо граничні інтегральні рівняння (ГІР), які зв'язують невідомі $\varphi^{(\gamma)}(\xi)$ з заданими на зовнішній межі функціями:

$$\begin{aligned}
&F^\gamma(x, U) = K(\theta_\Gamma(x)) - F_\psi(x, U), \qquad x \in \partial\Omega^1,\\
&F^\gamma(x, Q) = q_\Gamma(x) - F_\psi(x, Q), \qquad x \in \partial\Omega^2,\\
&\alpha(K^{-1}(F^\gamma(x, U) + F_\psi(x, U))K^{-1}(F^\gamma(x, U) + F_\psi(x, U)) + F^\gamma(x, Q)) =\\
&\qquad = \alpha(K^{-1}(F^\gamma(x, U) + F_\psi(x, U))\theta_c(x) - F_\psi(x, Q)), \qquad x \in \partial\Omega^3.
\end{aligned} \tag{9}$$

Для знаходження розв'язків системи (9) здійснимо просторову дискретизацію. Дискретизуємо область G та межу Γ на приграничні G_ν та граничні Γ_ν ($\nu = 1, \ldots, V$) елементи і апроксимуємо невідомі функції $\varphi^{(G)}(\xi)$, $\varphi^{(\Gamma)}(\xi)$ в них константами d_ν^G, d_ν^Γ. При цьому $\operatorname{mes} G_\nu = l$, $\bigcup\limits_{\nu=1}^{V} G_\nu = G$, $\bigcup\limits_{\nu=1}^{V_1} (\partial G_\nu \bigcap \Gamma) = \partial\Omega^1$, $\bigcup\limits_{\nu=V_1+1}^{V_2} (\partial G_\nu \bigcap \Gamma) = \partial\Omega^2$, $\bigcup\limits_{\nu=V_2+1}^{V} (\partial G_\nu \bigcap \Gamma) = \partial\Omega^3$, $G_\nu \bigcap G_\omega = \oslash$, $\Gamma_\nu^k \bigcap \Gamma_\omega^k = \oslash$ при, $\nu \neq \omega$, $\bigcup\limits_{\nu=1}^{V} \Gamma_\nu = \Gamma$, $\bigcup\limits_{\nu=1}^{V_1} \Gamma_\nu = \partial\Omega^1$, $\bigcup\limits_{\nu=V_1+1}^{V_2} \Gamma_\nu = \partial\Omega^2$, $\bigcup\limits_{\nu=V_2+1}^{V_1} \Gamma_\nu = \partial\Omega^3$. Зрозуміло, що кожен граничний елемент повинен повністю належати одній з ділянок $\partial\Omega^s$ $(s = 1, 2, 3)$, які дискретизовано відповідно на V_1, K_2, K_3 елементів, при цьому нумерація елементів починається з першої ділянки і продовжується на наступних, тобто $V_2 = V_1 + K_2$, $V = V_1 + K_2 + K_3$.

Після просторової дискретизації одержимо систему нелінійних алгебраїчних рівнянь (СНЛАР). Для її розв'язування застосуємо модифікований метод Ньютона [9]. Суть модифікації полягає в тому, що на кожному кроці методу не потрібно обчислювати матрицю, обернену до матриці Якобі, у відповідній точці, натомість використовується одна й та ж обернена матриця, обчислена у початковій точці. Як початкове наближення розв'язуємо задачу з граничною умовою першого роду, що приводить до СЛАР на першому кроці [7], яку розв'язуємо методом Гауса–Жордана.

Одержані розв'язки СНЛАР $\mathrm{d}^{(\gamma K)}$ використаємо для знаходження змінної Кірхгофа та похідної від неї за нормаллю:

$$\vartheta^{(\gamma)}(x) = \sum_{\nu=1}^{V} A_\nu^\gamma(x, U) d_\nu^{\gamma K} + F_\psi(x, U), \quad -\frac{\partial \vartheta^{(\gamma)}(x)}{\partial n(x)} = \sum_{\nu=1}^{V} A_\nu^\gamma(x, Q) d_\nu^{\gamma K} + F_\psi(x, Q), \quad (10)$$

де $A_\nu^\gamma(x, \Phi) = \int\limits_{\gamma_\nu} \Phi(x, \xi)\, \mathrm{d}\gamma_\nu(\xi)$. Інтеграли $A_\nu^G(x, U)$, $A_\nu^G(x, Q)$, $A_\nu^\Gamma(x, U)$ при $\xi = x$ містять усувну особливість, а $A_\nu^\gamma(x, Q)$ обчислені в сенсі Коші.

Далі за допомогою оберненого перетворення Кірхгофа (4) та (10) знайдемо шукані температуру та тепловий потік за формулами:

$$\theta^{(\gamma)}(x) = K^{-1}(\vartheta^{(\gamma)}(x)), \qquad -\lambda(\theta^{(\gamma)}) \frac{\partial \theta^{(\gamma)}(x)}{\partial n(x)} = -\frac{\partial \vartheta^{(\gamma)}(x)}{\partial n(x)}.$$

Числові дослідження. Розглянуто однорідний ізотропний паралелепіпед, віднесений до декартової системи координат x_1, x_2, x_3, який займає область $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3)\colon a_1 < x_1 < a_2, b_1 < x_2 < b_2, c_1 < x_3 < c_2\}$ з межею $\Gamma = \bigcup\limits_{j=1}^{6} \Gamma^{(j)}$, де $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$ — ліва, права, $\Gamma^{(3)}$, $\Gamma^{(4)}$ — нижня, верхня, $\Gamma^{(5)}$, $\Gamma^{(6)}$ — задня, передня грані паралелепіпеда; $a_1 = -1$; $a_2 = 1$; $b_1 = -1$; $b_2 = 1$; $c_1 = -1$; $c_2 = 1$; $h = 0{,}01$.

За допомогою непрямого методу приграничних елементів знайдено розподіли теплового поля з експоненційною та степеневою залежністю коефіцієнта теплопровідності від температури

$$\lambda(\theta) = \lambda_0 \exp\left(\beta_\lambda \frac{\theta - \theta_{\exp}^{(0)}}{\theta_{\exp}^{(0)}}\right), \qquad \lambda(\theta) = \lambda_0 \left(1 + \beta_\lambda \frac{\theta - \theta_{\mathrm{pow}}^{(0)}}{\theta_{\mathrm{pow}}^{(0)}}\right)^{n_\lambda}, \qquad n_\lambda = 2,$$

при $\lambda_0 = 1$, $\theta_{\exp}^{(0)} = 200$, $\theta_{\mathrm{pow}}^{(0)} = 10$, для задачі з крайовою умовою першого роду

$$\theta_\Gamma(x)_{\exp} = 400 + 10x_3, \qquad \theta_\Gamma(x)_{pow} = 100 + x_3, \qquad x \in \Gamma, \qquad (11)$$

та при $\theta_{\mathrm{pow}}^{(0)} = 2$ зі змішаними крайовими умовами першого та третього роду (3)

$$\theta_\Gamma(x) = 3 + x_3, \qquad x \in \Gamma^{(i)}, \qquad i = \overline{3, 6},$$

$$\theta_c(x) = 2, \qquad \alpha(\theta) = 1, \qquad x \in \Gamma^{(j)}, \qquad j = \overline{1, 2},$$

за відсутності внутрішніх джерел. Частину отриманих результатів обчислень наведено на рис. 1.

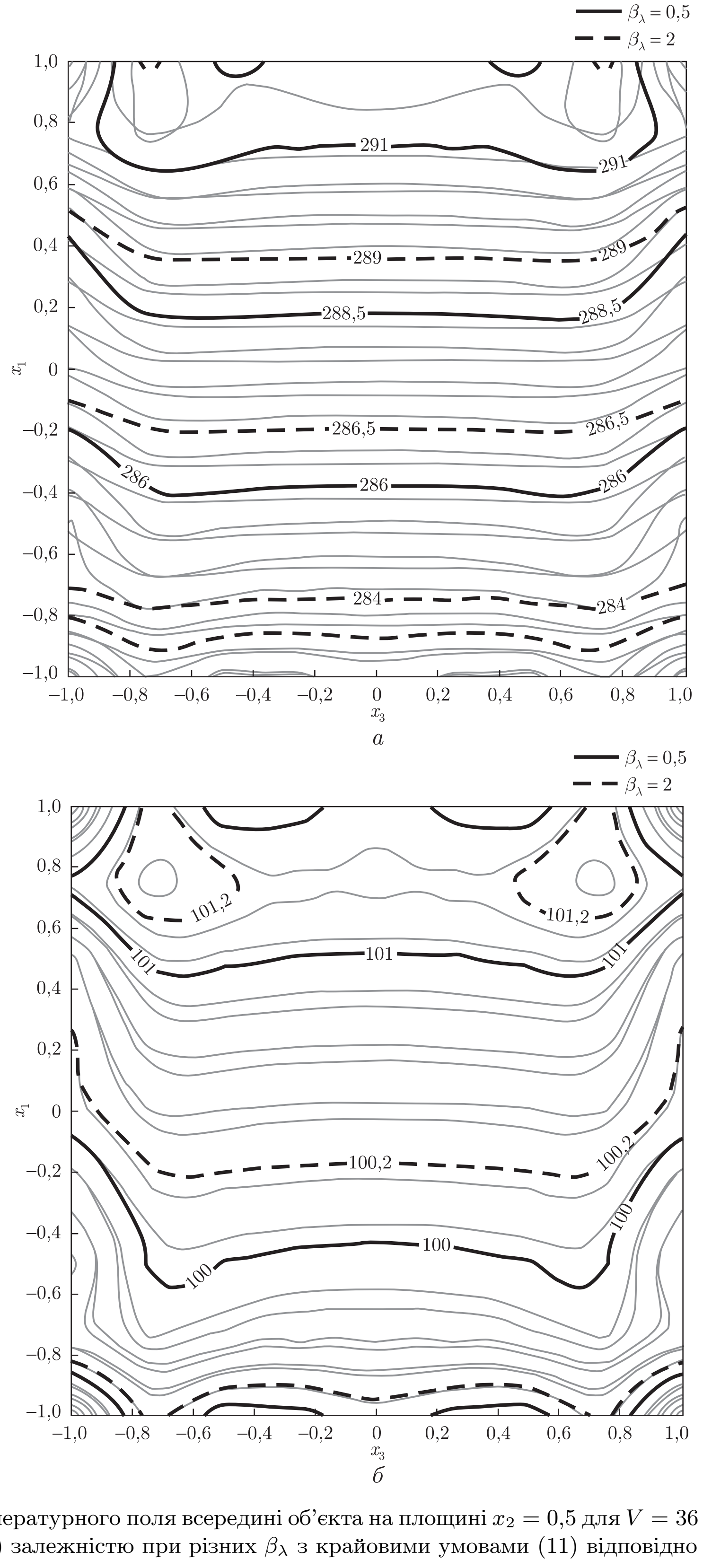

Рис. 1. Розподіл температурного поля всередині об'єкта на площині $x_2 = 0{,}5$ для $V = 36$ з експоненційною (*а*) та квадратичною (*б*) залежністю при різних β_λ з крайовими умовами (11) відповідно

Результати чисельних досліджень показали ефективність непрямого методу приграничних елементів (НМПГЕ), оскільки при знаходженні змінної Кірхгофа він дозволив при побудові дискретно-континуальних моделей обмежитися тільки числовим інтегруванням внаслідок послаблення сингулярності (порівняно з непрямим методом граничних елементів) граничних інтегральних рівнянь та істотно підвищити точність під час обчислення шуканих величин поблизу і на межі тіла (при використанні однакової кількості елементів дискретизації та однакового ступеня апроксимації невідомих інтенсивностей фіктивних джерел постійними). Особливості розв'язування за допомогою НМПГЕ тривимірних стаціонарних задач теплопровідності порівняно з двовимірними в основному проявились у розмірності та формі приграничних елементів і у фундаментальному розв'язку рівняння Лапласа.

Таким чином, для математичного моделювання та дослідження тривимірних стаціонарних теплових полів запропоновано чисельно-аналітичний підхід, який грунтується на спільному використанні НМПГЕ, перетворенні Кірхгофа та модифікованому методі Ньютона і дає можливість визначати температуру і тепловий потік у термочутливих об'єктах довільної форми. Застосування при цьому нелінійних моделей та поєднання різних методів при знаходженні розв'язків сформульованих на їх основі задач дозволяє використати переваги вказаних методів та оптимізувати процес обчислень. Модульний принцип програмної реалізації цього підходу уніфікує розробку його складових і сприяє підвищенню універсальності й гнучкості побудованої математичної моделі щодо розв'язування подібних задач у кусково-однорідних тілах.

1. *Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. – Москва: Наука, 1984. – 368 с.
2. *Коляно Ю. М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с.
3. *Моделювання* та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. И. Бурака, Р. М. Кушніра. Т. 3. Термопружність термочутливих тіл / Р. М. Кушнір, В. С. Попович. – Львів: СПОЛОМ, 2009. – 412 с.
4. *Процюк Б. В.* Моделювання та визначення з використанням побудованих функцій Гріна термопружного стану шаруватих тіл. – Автореф. дис. ... докт. фіз.-мат. наук. – Львів, 2006. – 40 с.
5. *Журавчак Л. М., Грицько Є. Г.* Метод приграничних елементів у прикладних задачах математичної фізики. – Львів: Вид. Карпат. відділення Інституту геофізики НАН України, 1996. – 220 с.
6. *Журавчак Л. М.* Розв'язування просторової задачі термопружності для зонально-однорідного термочутливого тіла довільної форми // Доп. НАН України. – 2002. – № 8. – С. 37–41.
7. *Грицько Б., Гудзь Р., Журавчак Л.* Математичне моделювання розподілу температури в середовищі з нелінійною поведінкою матеріалу елементів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. мат. та інформ. – 2011. – Вип. 17. – С. 73–84.
8. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Метод граничных элементов в прикладных науках. – Москва: Мир, 1984. – 494 с.
9. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. – Москва: Высш. шк., 1997. – 630 с.

Карпатське відділення Інституту геофізики
ім. С. І. Субботіна НАН України, Львів
Львівський національний університет
ім. Івана Франка
Національний університет "Львівська політехніка"

Надійшло до редакції 26.05.2014

Л. М. Журавчак, Б. Е. Грицько, О. С. Крук

Численно-аналитический подход к расчету тепловых полей с учетом термочувствительности материала среды и смешанных граничных условий

Обоснована эффективность сочетания непрямых методов граничных и приграничных элементов с преобразованием Кирхгофа для построения численно-аналитического решения нелинейных трехмерных задач теплопроводности с учетом зависимости теплофизических коэффициентов от температуры и интенсивности внутренних источников. С использованием интегральных представлений для преобразования Кирхгофа построена дискретно-континуальная модель задачи с граничными условиями первого, второго и третьего рода. Осуществлен ряд вычислительных экспериментов для экспоненциальной и степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры.

L. M. Zhuravchak, B. E. Hrytsko, O. S. Kruk

A numerical-analytical approach to the calculation of thermal fields with regard for the thermosensibility of the material of a medium and mixed boundary conditions

We reasoned the efficiency of a combination of the indirect methods of boundary and near-boundary elements with the Kirchhoff transformation to construct a numerical-analytical solution of nonlinear three-dimensional heat conduction problems. We consider some dependence of thermophysical coefficients on the temperature and the intensity of internal sources. We built a discrete-continual model for problems with boundary conditions of the first, second, and third kinds using integral representations for the Kirchhoff transformation. The results of computation experiments are presented for the exponential and power-law dependences of the thermal conductivity on the temperature.