УДК 517.3, 517.144

Н. О. Вірченко, М. О. Четвертак

Про одне узагальнене інтегральне перетворення типу Бесселя

(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)

Запроваджено нове узальнення функції Бесселя, подано її інтегральне зображення, основні властивості. Побудовано узагальнене інтегральне перетворення типу Бесселя, подано формулу обернення цього інтегрального перетворення.

У математиці, у багатьох галузях техніки, природознавства метод інтегральних перетворень є одним із ефективних сучасних аналітичних методів розв'язання проблем [1–3]. А серед різних інтегральних перетворень (перетворення Ганкеля, Гільберта, Ганкеля–Шварца, Меєра, Харді, Вебера та ін.) саме інтегральне перетворення типу Бесселя найбільше поширене і часто вживане.

Функції Бесселя виникли ще в XVIII ст. при розгляді різноманітних задач про поширення тепла у твердому круглому циліндрі, при дослідженні коливання мембрани тощо. Видатні математики (Ейлер, Бернуллі, Лагранж, Якобі, Пуассон та ін.) досліджували різні типи функцій Бесселя, давали цікаві їх застосування [7]. Інтерес до цих функцій і нині великий завдяки широким застосуванням їх.

Розвиток механіки суцільного середовища, математичної фізики, аеродинаміки, квантової механіки, теорії імовірностей, астрофізики, біомедицини тощо спонукає до запровадження *нових типів інтегральних перетворень.*

У даній роботі запроваджено нове узальнення функції Бесселя, подано застосування її до побудови нового узагальненого інтегрального перетворення типу Бесселя.

1. Узагальнену функцію Бесселя $J_{\mu,\omega}(x)$ запроваджуємо як один із розв'язків такого диференціального рівняння:

$$x^2y'' + xy' + (x - \mu^2)(x + \omega^2)y = 0, \tag{1}$$

де $\mu, \omega \overline{\in} \mathbb{Z}$.

Зауважимо, що рівняння (1) буде рівнянням Бесселя при $\mu^2 = \omega^2 = \nu$.

Відповідно до [5] шукаємо розв'язок диференціального рівняння (1) у вигляді узагальненого степеневого ряду:

$$y = \sum_{k=o}^{\infty} c_k x^{k+\rho}, \qquad c_0 \neq 0, \tag{2}$$

де ρ — корінь визначального рівняння. Коефіцієнти в (1) — це аналітичні функції при всіх x.

Підставивши (2) в (1), прирівнявши до нуля коефіцієнти при однакових степенях x, дістанемо рекурентну систему рівнянь для визначення c_k:

$$[(\rho + k)^2]c_k + c_{k-2} + (\mu^2 - \omega^2)c_{k-1} = 0, \qquad k = 2, 3, \ldots .$$

Матимемо

$$c_{2m} = -\frac{c_{2m-2} + (\omega^2 - \mu^2)c_{2m-1}}{(\rho + 2m)^2 - \mu^2\omega^2}, \qquad m = 1, 2, \ldots . \tag{3}$$

Виконавши відповідні перетворення з врахуванням формули [6]:

$$\frac{1}{z} = \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+1)},$$

дістанемо

$$J_{\mu,\omega}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu^2} \frac{1}{\Gamma\left(\dfrac{\mu^2 + \mu\omega + 2}{2}\right)} {}_1F_2\left(1; \frac{\mu^2 - \mu\omega + 2}{2}, \frac{\mu^2 + \mu\omega + 2}{2}; -\frac{x^2}{4}\right), \tag{4}$$

де ${}_1F_2$ — гіпергеометрична функція [6]. Зауважимо, що при $\mu^2 = \omega^2 = \nu$ (4) буде функцією Бесселя

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} {}_0F_1\left(\nu + 1; -\frac{x^2}{4}\right).$$

Справді, при $\mu^2 = \omega^2 = \nu$ маємо

$$J_{\mu,\omega}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu^2} \frac{1}{\Gamma\left(\dfrac{2\mu^2 + 2}{2}\right)} {}_1F_2\left(1; \frac{\mu^2 - \mu\omega + 2}{2}, \frac{\mu^2 + \mu\omega + 2}{2}; -\frac{x^2}{4}\right) =$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} {}_1F_2\left(1; 1, \mu^2 + 1; -\frac{x^2}{4}\right) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} {}_0F_1\left(\nu + 1; -\frac{x^2}{4}\right) = J_\nu(x).$$

Подамо властивості узальненої функції Бесселя $J_{\mu,\omega}(x)$.

Легко зауважити, що ряд (4) рівномірно збігається на будь-якому скінченному проміжку $[0, a]$. Тому y, визначений (4), є розв'язком рівняння (1) при довільному c_0. Із вигляду функції ${}_1F_2(a; c, d; x)$ випливає властивість симетрії щодо параметрів c і d.

Очевидна із вигляду функції ${}_1F_2(a; c, d; x)$ властивість симетрії щодо параметрів c і d.

Теорема 1 (про інтегральне зображення функції $J_{\mu,\omega}(x)$). *При умовах існування функції $J_{\mu,\omega(x)}$ має місце таке інтегральне зображення функції $J_{\mu,\omega}(x)$:*

$$J_{\mu,\omega}(x) = A \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 e^{-t\tau\frac{x^2}{4}} (1-t)^{\frac{\mu^2 + \mu\omega}{2} - 1} (1-\tau)^{\frac{\mu^2 - \mu\omega}{2}} \tau^{-1} dt d\tau, \tag{5}$$

де $A = \mu^2 + \mu\omega/2$.

Доведення здійснюється за допомогою відповідних перетворень з урахуванням виразу для бета-функції [5]:

$$B(\alpha, \beta) = \int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Ряд для функції $J_{\mu,\omega}(x)$ можна диференціювати почленно. Диференціюючи, отримуємо

$$\frac{d}{dx}\,{}_1F_2(a;c,d;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1)_{n-1}}{c(c+1)_{n-1}d(d+1)_{n-1}} \frac{nx^{n-1}}{n(n-1)!} = \frac{a}{cd}\,{}_1F_2(a+1;c+1,d+1;x). \qquad (6)$$

У нас для зручності позначено: $a = 1$, $c = (\mu^2 - \mu\omega)/2 + 1$, $d = (\mu^2 + \mu\omega)/2 + 1$. А для похідної $\dfrac{d^n}{dx^n}\,{}_1F_2$ матимемо

$$\frac{d^n}{dx^n}\,{}_1F_2(a;c,d;x) = \frac{(a)_n}{(c)_n(d)_n}\,{}_1F_2(a+n;c+n,d+n;x), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \qquad (7)$$

Безпосереднім диференціюванням можна отримати низку формул для $\dfrac{d}{dx}(x^a\,{}_1F_2(a;c,d;x))$, $\dfrac{d^n}{dx^n}(x^{a+n-1}\,{}_1F_2(a;c,d;x))$ та ін.

2. Запровадимо узагальнене інтегральне перетворення типу Бесселя у формі

$$(I_{\mu,\omega}f)(x) = \int_0^{\infty} J_{\mu,\omega}\left(a;c,d;-\frac{x^2}{4}t\right) f(t)dt, \qquad (8)$$

де $a = 1$, $c = (\mu^2 - \mu\omega)/2 + 1$, $d = (\mu^2 + \mu\omega)/2 + 1$.

Для простоти розглянемо (8) у такому вигляді:

$$(I_{\mu,\omega}f)(x) = \int_0^{\infty} J_{\mu,\omega}(a;c,d;-xt) f(t)\,dt, \qquad (9)$$

де a, c, $d \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} a > 0$.

Врахувавши вигляд $J_{\mu,\omega}(x)$, переконуємось, що інтегральне перетворення (9) — це інтегральне G-перетворення [1]:

$$(Gf)(x) = \int_0^{\infty} G^{m,n}_{p,q}[xt|^{(\alpha_i)_{1,p}}_{(\beta_j)_{1,q}}] f(t)\,dt. \qquad (10)$$

Тут $G^{m,n}_{p,q}$ — функція Меєра:

$$G^{m,n}_{p,q}[z|^{(a_i)1,p}_{(b_j)1,q}] = G^{m,n}_{p,q}[z|^{a_1,\ldots,a_p}_{b_1,\ldots,b_q}] = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod\limits_{j=1}^{m}\Gamma(\beta_j+s)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma(1-a_i-s)}{\prod\limits_{i=n+1}^{p}\Gamma(a_i+s)\prod\limits_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-\beta_j-s)} z^{-s}ds. \qquad (11)$$

Для побудови формули обернення інтегрального перетворення (9) скористаємось інтегральним перетворенням Мелліна [2]. Для $({}_1F_2f)$ згідно з [1] перетворення Мелліна має вигляд

$$(M\,{}_1F_2f)(s) = K(s)(Mf)(1-s), \qquad (12)$$

де

$$K(s) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(a-s)}{\Gamma(c-s)\Gamma(d-s)}, \tag{13}$$

при умовах

$$0 < \operatorname{Re} s < \min\left[\operatorname{Re} a, \frac{1}{4} + \operatorname{Re}\left(\frac{c+d+a}{2}\right)\right]. \tag{14}$$

Із (12), (13) очевидно, що маємо G-інтегральне перетворення вигляду

$$({}_1F_2f)(x) = \int\limits_0^\infty G_{1,3}^{1,1}[xt|_{0,1-c,1-d}^{1-a}]f(t)\,dt. \tag{15}$$

Для цього інтегрального перетворення необхідні сталі a^*, Δ^*, a_1^*, a_2^*, α, β, γ матимуть вигляд

$$\begin{aligned} a^* &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i - \sum_{i=n+1}^{p}\alpha_i + \sum_{j=1}^{m}\beta_j - \sum_{j=m+1}^{q}\beta_j = 0; \\ \Delta &= \sum_{j=1}^{q}\beta_j - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 2; \\ a_1^* &= \sum_{j=1}^{m}\beta_j - \sum_{i=n+1}^{p} = 1; \\ a_2^* &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i - \sum_{j=m+1}^{q}\beta_j = -1; \gamma = a-c-d. \end{aligned} \tag{16}$$

Подамо окремі випадки $({}_1F_2f)$.

Якщо $f \in L_{\nu,2}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda > -\nu$, то $({}_1F_2f)$ матиме вигляд

$$({}_1F_2f(x)) = x^{-\lambda}\frac{d}{dx}x^{\lambda+1}\int\limits_0^\infty G_{2,4}^{1,2}[xt|_{0,1-c,1-d,-\lambda-1}^{-\lambda,1-a}]f(t)\,dt. \tag{17}$$

Якщо $\operatorname{Re}\lambda < -\nu$, то

$$({}_1F_2f(x)) = x^{-\lambda}\frac{d}{dx}x^{\lambda+1}\int\limits_0^\infty G_{2,4}^{2,1}[xt|_{-\lambda-1,0,1-c,1-d}^{1-a,-\lambda}]f(t)\,dt. \tag{18}$$

Справедлива

Теорема 2. *Нехай* $0 < 1-\nu < \operatorname{Re} a$, $\alpha_0 = \max[1-\operatorname{Re} c, 1-\operatorname{Re} d]$. *Якщо* $\nu > \alpha_0$, $\operatorname{Re}\lambda > \nu-1$, $2(1-\nu) + \operatorname{Re}(a-c-d) = 0$, $f \in L_{\nu,2}$, *то формула обернення має вигляд*

$$f(x) = x^{-\lambda}\frac{d}{dx}x^{\lambda+1}\int\limits_0^\infty G_{2,4}^{2,1}[xt|_{c-1,d-1,0,-\lambda-1}^{-\lambda,1-a}]({}_1F_2f)(t)\,dt. \tag{19}$$

Якщо $\mathrm{Re}\,\lambda < \nu - 1$, *то формула обернення буде такою:*

$$f(x) = -x^{-\lambda}\frac{d}{dx}x^{\lambda+1}\int\limits_0^\infty G^{3,0}_{2,4}[xt|^{a-1,-\lambda}_{-\lambda-1,c-1,d-1,0}]({}_1F_2 f)(t)\,dt. \tag{20}$$

1. *Kilbas A. A., Saigo M.* H-transforms. – London: Chapman and Hall, 2004. – 390 p.
2. *Вірченко Н. О.* Узагальнені інтегральні перетворення. – Київ: Задруга, 2013. – 397 с.
3. *Ахиезер Н. И.* Лекции об интегральных преобразованиях. – Харьков: Вища шк., 1984. – 120 с.
4. *Брычков Ю. А., Прудников А. П., Шишов В. С.* Операционное исчисление // Итоги науки и техники. Математический анализ. – Москва: ВИНИТИ АН СССР, 1979. – С. 99–148.
5. *Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О.* Диференціальні рівняння в задачах. – Київ: Либідь, 2003. – 504 с.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – Москва: Наука, 1965. – Т. 1. – 294 с.
7. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1949. – Ч. 1. – 787 с.

НТУ України “Київський політехнічний інститут”

Надійшло до редакції 05.06.2014

Н. А. Вирченко, М. А. Четвертак

Об одном обобщенном интегральном преобразовании типа Бесселя

Введено новое обобщение функции Бесселя, дано ее интегральное представление, основные свойства. Построено обобщенное интегральное преобразование типа Бесселя, дается формула обращения этого интегрального преобразования.

N. O. Virchenko, M. O. Chetvertak

On one generalized integral transform of the Bessel type

A generalization of the Bessel function is introduced. Its integral representation and basic properties are given. A generalized integral transform of the Bessel type is constructed. The inversion formula of this integral transform is given.