Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

10 • 2014

МЕХАНІКА

УДК 539.375

А. Л. Кипнис

О подходе к решению задач о межфазных трещинах, зародившихся в угловых точках кусочно-однородного тела

(Представлено академиком НАН Украины А. Н. Гузем)

Предложен подход к решению задач механики разрушения композитных материалов о межфазных трещинах, зародившихся в угловых точках кусочно-однородного тела. Данный подход позволяет перейти от исходной задачи к задаче теории упругости для клиновидного тела с межфазной трещиной в вершине и условием на бесконечности, учитывающим влияние внешнего поля.

Задачи механики разрушения композитных материалов о межфазных трещинах в кусочно-однородных телах исследовались многими авторами. При этом с применением различных методов рассматривались как статические, так и динамические задачи. Достаточно подробно изучены открытые межфазные трещины [1–7] и трещины с контактирующими берегами [8–11]. Предполагалось, что граница раздела сред является гладкой, прежде всего, прямолинейной. Однако именно вблизи угловых точек негладкой границы раздела сред, представляющих собой остроконечные концентраторы напряжений, следует ожидать разрыва сплошности и зарождения исходящих из них трещин в первую очередь. Особенно опасна зародившаяся в угловой точке границы раздела сред неустойчивая трещина, так как после достижения состояния предельного равновесия режим ее развития будет динамическим.

Поскольку длина зародившихся трещин значительно меньше размера тел, точность решения соответствующих задач теории упругости об определении коэффициентов интенсивности напряжений численными методами снижается. В такой ситуации актуальным представляется использование подхода, широко применяемого в механике квазихрупкого разрушения для определения маломасштабных зон предразрушения вблизи концов трещин, в основе которого лежит разложение рассматриваемой задачи (задача в целом) на внешнюю и внутреннюю задачи. Это позволяет осуществить переход от исходной задачи к задаче о полубесконечной прямолинейной трещине с зоной предразрушения в конце, в которой на бесконечности ставится дополнительное условие нагружения, определяемое из

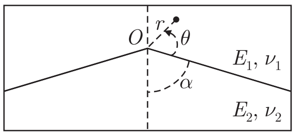

Рис. 1

решения чисто упругой задачи (постановка задачи о тонкой структуре конца трещины [12]). В результате решения данной задачи устанавливается связь между размером зоны предразрушения и коэффициентом интенсивности напряжений в конце трещины.

Ниже указанный подход применяется при рассмотрении задачи о предельном равновесии кусочно-однородного упругого тела с трещинами, зародившимися в угловой точке.

В рамках плоской (плоская деформация) статической симметричной задачи рассмотрим кусочно-однородное изотропное упругое тело с границей раздела сред в форме сторон угла (рис. 1). На границе тела заданы произвольные краевые условия.

В силу общих положений о поведении напряжений вблизи угловых точек упругих тел [13] угловая точка границы раздела сред O является остроконечным концентратором напряжений со степенной особенностью и при $r \to 0$ главные члены разложений напряжений в асимптотические ряды представляют собой решение однородной задачи теории упругости для кусочно-однородной плоскости с границей раздела сред в форме сторон угла (задача А), порождаемое единственным на интервале $]-1;0[$ корнем λ ее характеристического уравнения

$$\begin{aligned}
&\Delta(-x-1) = 0, \qquad \Delta(z) = \delta_0(z) + \delta_1(z)e + \delta_2(z)e^2,\\
&\delta_0(z) = (\sin 2z\alpha + z\sin 2\alpha)[\varkappa_1 \sin 2z(\pi-\alpha) + z\sin 2\alpha],\\
&\delta_1(z) = (1+\varkappa_1)(1+\varkappa_2)\sin^2 z\pi - (\sin 2z\alpha + z\sin 2\alpha)[\varkappa_1 \sin 2z(\pi-\alpha) + z\sin 2\alpha] -\\
&\qquad - [\sin 2z(\pi-\alpha) - z\sin 2\alpha](\varkappa_2 \sin 2z\alpha - z\sin 2\alpha),\\
&\delta_2(z) = [\sin 2z(\pi-\alpha) - z\sin 2\alpha](\varkappa_2 \sin 2z\alpha - z\sin 2\alpha),\\
&e = \frac{1+\nu_2}{1+\nu_1}e_0, \qquad e_0 = \frac{E_1}{E_2}, \qquad \varkappa_{1,2} = 3 - 4\nu_{1,2}
\end{aligned} \tag{1}$$

($E_{1,2}$ — модули Юнга; $\nu_{1,2}$ — коэффициенты Пуассона). В частности,

$$\begin{aligned}
&\sigma_\theta(r,0) = Cgr^\lambda + o(r^\lambda) \qquad (r \to 0),\\
&g = g'\cos\lambda\alpha + g''\cos(\lambda+2)\alpha,\\
&g' = [(\lambda+2)e - \lambda - 2][(\lambda+2)\cos\lambda(\pi-\alpha)\sin(\lambda+2)(\pi-\alpha) -\\
&\qquad - \lambda\sin\lambda(\pi-\alpha)\cos(\lambda+2)(\pi-\alpha)]\cos(\lambda+2)\alpha\cos(\lambda+2)(\pi-\alpha) +\\
&\qquad + (1+\varkappa_1)(\lambda+2)[\cos(\lambda+2)\alpha\sin(\lambda+2)(\pi-\alpha) +\\
&\qquad\qquad + \sin(\lambda+2)\alpha\cos(\lambda+2)(\pi-\alpha)]\cos\lambda(\pi-\alpha)\cos(\lambda+2)(\pi-\alpha),\\
&g'' = [(\varkappa_2 - \lambda - 1)e + \lambda + 2][(\lambda+2)\cos\lambda(\pi-\alpha)\sin(\lambda+2)(\pi-\alpha) -\\
&\qquad - \lambda\sin\lambda(\pi-\alpha)\cos(\lambda+2)(\pi-\alpha)]\cos\lambda\alpha\cos(\lambda+2)(\pi-\alpha) -\\
&\qquad - (1+\varkappa_1)[(\lambda+2)\cos\lambda\alpha\sin(\lambda+2)(\pi-\alpha) + \lambda\sin\lambda\alpha\cos(\lambda+2)(\pi-\alpha)] \times\\
&\qquad \times \cos\lambda(\pi-\alpha)\cos(\lambda+2)(\pi-\alpha).
\end{aligned} \tag{2}$$

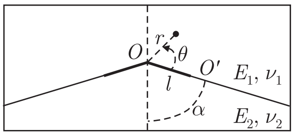

Рис. 2

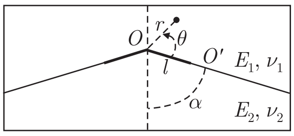

Рис. 3

Постоянная C должна определяться из решения каждой конкретной задачи теории упругости, представленной на рис. 1.

Предположим, что $Cg < 0$. Тогда, согласно (2), $\sigma_\theta(r, 0) \to -\infty$ при $r \to 0$ и на границе раздела сред вблизи угловой точки нормальные напряжения будут сжимающими. В этом случае вследствие высокой концентрации напряжений в угловой точке возможно зарождение исходящих из нее межфазных трещин с полностью контактирующими берегами, длина которых в значительной степени меньше размеров тела. Считаем, что трение между берегами трещин отсутствует.

Задачу о зародившихся трещинах — задачу в целом (рис. 2) разложим на внешнюю и внутреннюю. Внешняя задача представлена на рис. 1, внутренняя — плоская статическая симметричная задача теории упругости для кусочно-однородной изотропной плоскости с границей раздела сред в форме сторон угла, содержащей трещины конечной длины, исходящие из угловой точки и расположенные на этой границе, — на рис. 3. Условие на бесконечности во внутренней задаче сформулируем следующим образом: при $r \to \infty$ главные члены разложений напряжений в асимптотические ряды совпадают с главными членами разложений напряжений в асимптотические ряды во внешней задачи при $r \to 0$ и представляют собой решение задачи А, о котором говорилось выше. Такая формулировка условия на бесконечности позволяет удовлетворить условию сшивания решений внешней и внутренней задач при r, значительно больших l, но значительно меньших, чем размеры тела. Другими словами, во внутренней задаче (см. рис. 3) на бесконечности реализуется асимптотика, представляющая собой решение аналогичной задачи без трещин, порождаемое единственным на интервале $]-1; 0[$ корнем λ ее характеристического уравнения (1). Произвольная постоянная C, входящая в указанное решение, считается заданной. Она характеризует интенсивность внешнего поля и должна определяться из решения каждой конкретной внешней задачи.

С учетом симметрии граничные условия задачи (см. рис. 3) запишем так:

$$\theta = \pi - \alpha, \qquad \tau_{r\theta} = 0, \qquad u_\theta = 0; \qquad \theta = -\alpha, \qquad \tau_{r\theta} = 0, \qquad u_\theta = 0; \tag{3}$$

$$\theta = 0, \qquad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \qquad \langle u_\theta \rangle = 0;$$

$$\theta = 0, \qquad r < l, \qquad \tau_{r\theta} = 0; \qquad \theta = 0, \qquad r > l, \qquad \langle u_r \rangle = 0; \tag{4}$$

$$\theta = 0, \qquad r \to \infty, \qquad \tau_{r\theta} = C g_1 r^\lambda + o\left(\frac{1}{r}\right). \tag{5}$$

Здесь $-\alpha \leqslant \theta \leqslant \pi - \alpha$; $\langle a \rangle$ — скачок a; для g_1 имеет место выражение, подобное g.

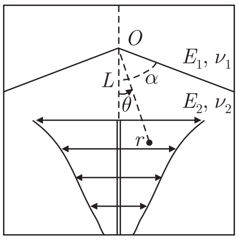

Рис. 4

На основе решения задачи теории упругости с граничными условиями (3)–(5) определяется коэффициент интенсивности напряжений K_{II} в конце O' трещины и изучается вопрос о предельном равновесии тела с межфазными трещинами (исследуется равновесие трещин на устойчивость, устанавливается условие их страгивания, анализируется поведение напряжений вблизи угловой точки).

Одной из возможных внешних задач по отношению к задаче в целом является задача теории упругости для кусочно-однородной плоскости с негладкой границей раздела сред, содержащей внутреннюю полубесконечную трещину (рис. 4). Берега трещины находятся под действием нормального давления, распределенного по закону F/r^2, $r \geqslant L$ (F — заданная положительная постоянная, имеющая размерность силы).

Граничные условия задачи таковы:

$$\theta = \alpha, \qquad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \qquad \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0; \tag{6}$$

$$\theta = 0, \qquad \tau_{r\theta} = 0; \qquad \theta = \pi, \qquad \tau_{r\theta} = 0, \qquad u_\theta = 0;$$

$$\theta = 0, \qquad r < L, \qquad u_\theta = 0; \qquad \theta = 0, \qquad r > L, \qquad \sigma_\theta = -\frac{F}{r^2}. \tag{7}$$

Из решения задачи с граничными условиями (6), (7) определяется постоянная C.

1. *Williams M. L.* The stresses around a fault or cracks in dissimilar media // Bull. of the Seism. Soc. of America. – 1959. – **49**. – P. 199–204.
2. *Rice J. R., Sih G. C.* Plane problem of cracks in dissimilar media // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1965. – **32**. – P. 418–423.
3. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М., Рывкин М. Б.* Деформация составной упругой плоскости, ослабленной периодической системой произвольно нагруженных щелей // Прикл. математика и механика. – 1981. – **45**, № 6. – С. 1088–1094.
4. *Механика* разрушения и прочность материалов: Справ. пособие. В 4 т. Т. 2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / Под ред. Саврук М. П. – Киев: Наук. думка, 1988. – 620 с.
5. *Лобода В. В., Шевелева А. Е.* Определение зон предразрушения у края трещины между двумя упругими ортотропными телами // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 5. – С. 76–82.
6. *Гузь А. Н., Гузь И. А., Меньшиков А. В., Меньшиков В. А.* Коэффициенты интенсивности напряжений для материалов с межслоевыми трещинами при гармоническом напряжении // Там же. – 2010. – **46**, № 10. – С. 3–13.
7. *Guz I. A., Menshykov O. V., Menshykov V. A.* Application of boundary integral equations to elastodynamics of an interface crack // Int. J. of Fracture. – 2006. – **140**. – P. 277–284.
8. *Comninou M.* The interface crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1977. – **44**. No 4. – P. 631–636.
9. *Дундурс Дж., Комниноу М.* Обзор и перспектива исследования межфазной трещины // Механика композит. материалов. – 1979. – № 3. – С. 387–396.
10. *Симонов И. В.* Трещина на границе раздела в однородном поле напряжений // Там же. – 1985. – № 6. – С. 969–976.

11. *Острик В. І.* Контакт з тертям берегів міжфазної тріщини за розтягу та зсуву // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – **39**, № 2. – С. 58–65.
12. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. – Москва: Наука, 1981. – 688 с.
13. *Черепанов Г. П.* Пластические линии разрыва в конце трещины // Прикл. математика и механика. – 1976. – **40**, № 4. – С. 720–728.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 19.12.2014

О. Л. Кіпніс

Про підхід до розв'язання задач про міжфазні тріщини, що зародилися в кутових точках кусково-однорідного тіла

Запропоновано підхід до розв'язання задач механіки руйнування композитних матеріалів про міжфазні тріщини, що зародилися в кутових точках кусково-однорідного тіла. Даний підхід дозволяє перейти від вихідної задачі до задачі теорії пружності для клиноподібного тіла з міжфазною тріщиною у вершині та умовою на нескінченності, яка враховує вплив зовнішнього поля.

A. L. Kipnis

On an approach to solving the problems of interface cracks originated at the corner points of a piecewise homogeneous body

An approach to solving the problems of fracture mechanics of composite materials as for the interface cracks that originated at the corner points of a piecewise homogeneous body is proposed. This approach allows one to go from the original problem to a problem of elasticity theory for a wedge-shaped body with the interface crack at the vertex and the condition at infinity that takes the influence of an external field into account.