

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРУГОДЕФОРМИРУЮЩЕЙСЯ В ПОЛЁТЕ РАКЕТЫ-НОСИТЕЛЯ

В рамках проведенных в Институте технической механики Национальной академии наук Украины и Государственного космического агентства Украины исследований предложена математическая модель гибкой осевой линии корпуса (ГЛК) упругодеформирующейся ракеты-носителя (РН), позволяющая учитывать в процессе полёта динамические свойства корпуса РН и действующих на него возмущений в алгоритмах мониторинга текущего состояния конструкции ракеты на активном участке траектории. Обоснована возможность декомпозиции модели ГЛК на две составляющие, которые описывают возмущенное движение РН как твердого тела и текущее положение ГЛК относительно текущего положения корпуса РН как твердого тела. Предложены способы понижения размерности задачи идентификации ГЛК, представленной в виде многозвенной шарнирной цепи – путём квадратичной аппроксимации ГЛК или дискретного представления ГЛК в виде шарнирной связки двух тел с переменным в течение полета положением пластического шарнира в связанной с корпусом системе координат.

У рамках проведених в Інституті технічної механіки Національної академії наук України і Державного космічного агентства України досліджень запропоновано математичну модель гнучкої осової лінії корпусу (ГЛК) ракети-носія (РН) такої, що пружно деформується, яка дозволяє враховувати у процесі польоту динамічні властивості корпусу та діючих на нього збурень в алгоритмах моніторингу поточного стану конструкції ракети на активній ділянці траєкторії. Обґрунтовано можливість декомпозиції моделі ГЛК на дві складові, які описують збурений рух РН як твердого тіла та поточне положення ГЛК відносно положення корпусу РН як твердого тіла. Запропоновані способи пониження розмірності задачі ідентифікації ГЛК, представленої у вигляді багатоланкового шарнірного ланцюга – шляхом квадратичної апроксимації ГЛК або дискретного зображення ГЛК у вигляді шарнірної зв'язки двох тіл із змінним на протязі польоту положенням пластичного шарніра у зв'язаній з корпусом системі координат.

In the framework of studies conducted by the Institute of Technical Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine and the State Space Agency of Ukraine, the mathematical model of a flexible axial line (FAL) of the airframe of the elastodeforming carrier rocket (CR) considering the dynamic properties of the CR airframe in the flight and operating disturbances in the algorithms of structural health monitoring of the rocket at an active trajectory leg is proposed. The possibility of decomposing the FAL model on two parts describing the CR disturbed motion as a solid and the FAL current position in relation to the current position of the CR airframe as a solid is validated. The methods of decreasing the dimension of the FAL identification problem represented as a multijointed link chain are proposed using the FAL quadratic approximation or the FAL discrete representation as a two-body hinged system with a variable position of its plastic hinge in the CR airframe axes system during the flight.

Характерной особенностью движения ракеты-носителя (РН) на активном участке траектории полета являются изгибные колебания её корпуса, обусловленные отсутствием его равновесной формы в связанной с РН системе координат (СК) [1]. Эти колебания, усугубляемые внешними (ветер, аэродинамические силы) и внутренними (влияние жидкого наполнения топливных баков) силовыми факторами, а также наличием начальных несовершенств (погрешности изготовления и монтажа, неоднородность упругих свойств конструкционных материалов и т. п.), могут привести к неустойчивости движения РН и ухудшению условий работы её системы управления (СУ). Изложенное определяет актуальность проблемы поиска технических решений, обеспечивающих компенсацию изгибных деформаций корпуса РН на основе данных измерений текущих параметров его состояния.

Сложившаяся практика решения задач управления основывается на использовании математической модели (ММ) управляемого процесса в виде формализованного описания отображения входных процессов в выходные, предполагающего наличие достаточного объёма адекватных данных о состоянии объекта управления в различные моменты времени. Построение содержательной ММ, определяющей практическую значимость получаемых на её

основе результатов, в значительной степени усложняется [2 – 6]:

- наличием существенных неопределенностей ММ, обусловленных начальными несовершенствами, внешними воздействиями, внутренними силовыми факторами и т. п.;

- дефицитом (неудовлетворительной точностью) информации о РН как объекте управления.

В условиях неопределенности входных параметров классические методы управления, основанные на полном знании всех параметров ММ объекта управления, должны быть дополнены некоторым алгоритмом восстановления неизвестных значений этих параметров с точностью, позволяющей перейти к обычной задаче управления. К настоящему времени сложилась недостаточная продуктивная тенденция к использованию вероятностных методов как средства преодоления дефицита объективной информации о внешних и внутренних возмущениях, действующих на РН в полёте, в ущерб поиску и реализации детерминированных методов их учёта [1]. К числу последних можно отнести способ восстановления по результатам измерений в процессе полёта действительной текущей формы гибкой осевой линии корпуса (ГЛК) упругодеформируемой РН, которая интегрально и объективно отражает действие всех возмущений систематического и случайного характера, а также демпфирующие свойства корпуса РН; для этого требуется постоянно / периодически [3]:

- измерять текущие упругие деформации элементов конструкции корпуса РН, например оболочек, вдоль его образующих, лежащих в плоскостях управления возмущённым движением;

- по измеренным деформациям восстанавливать текущую форму ГЛК;

- определять, с учётом восстановленной текущей формы ГЛК упругодеформирующейся РН, параметры её отклонения от ГЛК РН как абсолютно твёрдого тела по всей длине корпуса РН, в том числе – в местах установки управляющих органов (УО) и комплекса командных приборов (ККП).

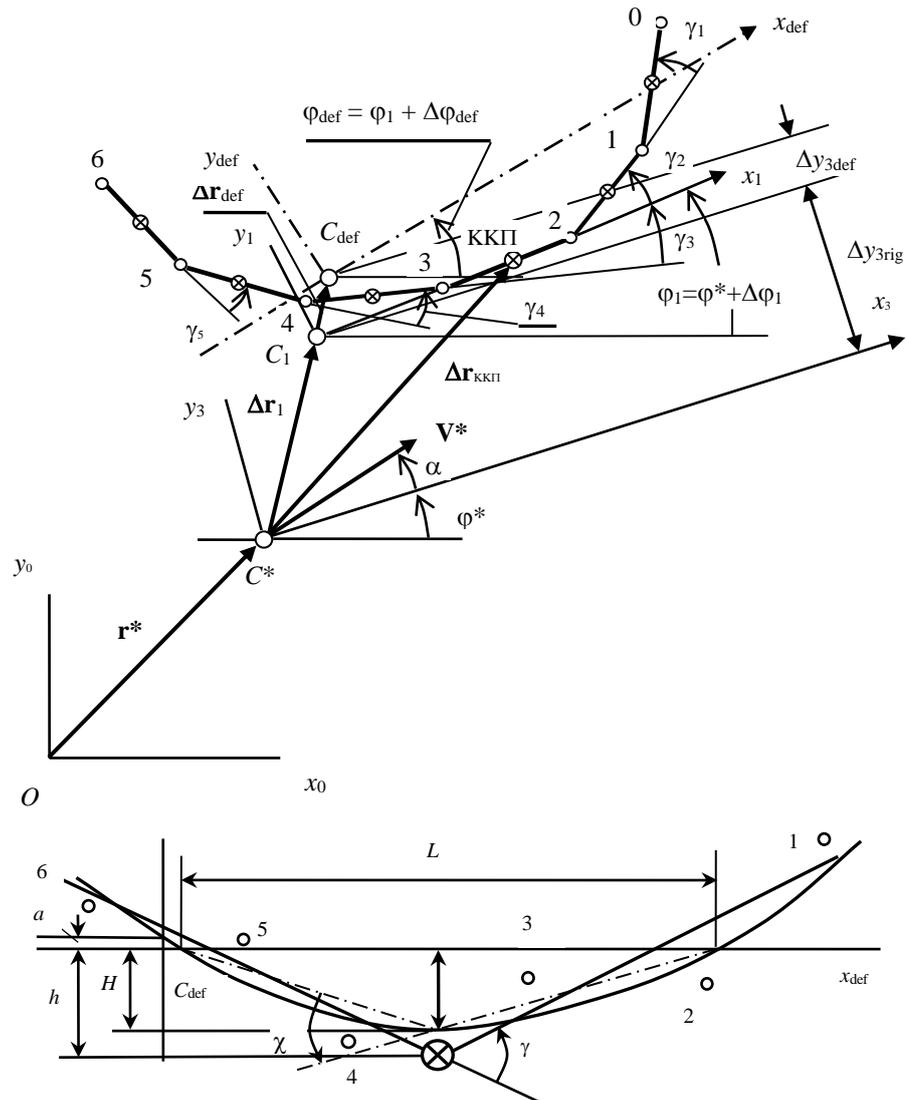
По определению, ГЛК является интегральной характеристикой текущих упругих деформаций элементов конструкции корпуса РН, измеренных в отдельных точках корпуса, и поэтому менее чувствительна к «точечным» ошибкам измерений. Выполнение измерительных устройств (ИУ) в виде, например, тензометрических датчиков, устанавливаемых на поверхности оболочек корпуса РН вдоль его образующих, лежащих в плоскостях управления возмущённым движением, позволяет не только определять на основе полученных данных текущую форму ГЛК, но и достаточно просто отфильтровывать высокочастотные помехи измеренного сигнала, не искажая его низкочастотную составляющую, оказывающую наибольшее влияние на прочностные характеристики РН [4]. Использование при этом восстановленной текущей формы ГЛК упругодеформирующейся РН для определения параметров отклонений текущей формы осевой линии от осевой линии корпуса РН как абсолютно твёрдого тела повышает устойчивость процедуры численного дифференцирования этих отклонений, что даёт практическую возможность повысить качество управления.

Один из основных аспектов моделирования ГЛК состоит в разработке эффективных алгоритмов, способных работать с неполными и зашумленными данными, позволяющих исключить те из них, которые не представляются полезными и/или чрезмерно зашумлены, и таким образом получить доста-

точно простую математическую модель ГЛК упругодеформирующейся РН. В этой связи целесообразно рассмотреть два способа понижения размерности задачи идентификации ГЛК, представленной в виде N -звенной шарнирной цепи, путём:

- квадратичной аппроксимации ГЛК;
- дискретного представления ГЛК в виде шарнирной связки двух тел (ШСДТ) с переменным в течение полета положением шарнира $a(t)$ в связанной с корпусом СК.

Рассмотрим плоскую задачу, описывающую движение РН в плоскости стрельбы (рис. 1); сведения об используемых ниже системах координат (СК), определяющих положение РН как твердого тела, можно найти во многих руководствах по динамике полета, например [5, 6], и здесь не приведены.



Ox_0y_0 – начальная стартовая СК;
 $C^*x_3y_3$ – связанная СК, представляющая программное движение РН;
 $C_1x_1y_1$ – связанная СК, представляющая возмущенное движение РН как твердого тела;
 $C_{def}x_{def}y_{def}$ – связанная СК, представляющая возмущенное движение упругодеформированной РН.

Рис. 1

На рис. 1 использованы:

– для описания программного (невозмущенного) движения центра масс (ЦМ) РН – начальная стартовая СК (НССК) Ox_0y_0 , в которой для текущего момента времени представлены программные значения:

- 1) вектора скорости \mathbf{V}^* и радиуса-вектора \mathbf{r}^* ЦМ S^* жесткой РН;
- 2) угла тангажа φ^* (характеризующего угол наклона невозмущенного положения продольной оси РН S^*x_3 к горизонту точки старта, задаваемого осью НССК Ox_0);
- 3) угла атаки α^* (характеризующего угол наклона номинального значения вектора скорости \mathbf{V}^* к невозмущенному положению продольной оси РН S^*x_3);

– для описания программного (невозмущенного) движения РН как твердого тела вокруг ЦМ – связанная СК (ССК) $S^*x_3y_3$, жестко закрепленная на недеформированной РН и имеющую начало в ЦМ S^* РН, движущейся по номинальной траектории; ось S^*x_3 в течение полета поворачивается относительно горизонта точки старта (задаваемого осью НССК Ox_0) на текущее значение программного угла тангажа φ^* ;

– для описания возмущенного движения РН как твердого тела вокруг ЦМ – ССК $C_1x_1y_1$ с началом в ЦМ C_1 системы, движущейся по возмущенной траектории; возмущенное положение ЦМ системы C_1 сдвинуто относительно ЦМ S^* системы, движущейся по номинальной траектории, на величину возмущения $\Delta \mathbf{r}_1$ (возмущение $\Delta \mathbf{V}_1$ на рис. 1 не показано); ось C_1x_1 в течение полета поворачивается относительно оси S^*x_3 на величину возмущения программного угла тангажа $\Delta \varphi_1$ (а если измерять относительно горизонта точки старта, то на текущее значение угла тангажа $\varphi_1 = \varphi^* + \Delta \varphi_1$ для возмущенного движения).

В то же время, обоснованный выбор подходящих СК для описания движения упругодеформирующейся РН – это менее проработанная задача [7, 8]; здесь, в основном, используют:

– ССК, жестко связанную с недеформированным телом; в этом случае принято интерпретировать перемещение начала такой ССК и её вращение как перемещение жесткого тела и его поворот, а любые перемещения относительно такой ССК – как упругие деформации гибкого тела [7];

– подвижную СК (ПСК), в процессе движения перемещающуюся относительно недеформированного тела; оси ПСК обычно выбирают таким образом, чтобы свести к нулю количество движения и момент количества движения рассматриваемой механической системы за счет её упругих деформаций [8].

Использование ПСК имеет практический смысл для решения задач аэроупругости в общей постановке – когда величины упругих деформаций объекта управления соизмеримы с величинами перемещений его ЦМ. В рассматриваемом же случае, когда возмущения линейных параметров движения ЦМ РН на атмосферной части активного участка траектории составляют величины порядка 10^2 м, а линейные деформации элементов её конструкции – всего лишь порядка 10^{-2} м, использование ПСК вряд ли целесообразно. Целесообразнее использовать «классическую» ССК, присоединенную к недеформированной РН – такая ССК имеет ряд вычислительных преимуществ перед ПСК.

Однако, поскольку упругие деформации РН препятствуют совпадению начала ССК, присоединенной к недеформированной РН, с ЦМ гибкой РН, а осей ССК – с главными осями инерции гибкой РН в течение всего времени полета, то необходимо конкретизировать предпочтительный выбор ССК для упругодеформирующейся РН. Будем основывать выбор такой ССК на общепринятых геометрических соображениях, присоединив ССК $C_{\text{def}} x_{\text{def}} y_{\text{def}}$ к деформированному корпусу РН таким образом, чтобы её начало C_{def} совпало с ЦМ деформированного корпуса, а ось $C_{\text{def}} x_{\text{def}}$ – с его главной центральной осью инерции (для наглядности, ССК $C_{\text{def}} x_{\text{def}} y_{\text{def}}$ и связанные с ней дальнейшие преобразования изображены отдельно в нижней части рис. 1). Положение ЦМ C_{def} упругодеформированной системы сдвинуто относительно ЦМ C_1 жесткой системы, движущейся по возмущенной траектории, на величину возмущения за счет упругой деформации Δr_{def} , а главная центральная ось инерции упругодеформирующейся РН $C_{\text{def}} x_{\text{def}}$ в течение полета поворачивается относительно оси $C_1 x_1$ на величину возмущения угла тангажа $\Delta \varphi_{\text{def}}$ за счет упругой деформации (т. е., если угол φ_{def} измерять относительно горизонта точки старта, то на текущее значение возмущенного угла тангажа упругодеформированной системы $\varphi_{\text{def}} = \varphi^* + \Delta \varphi_1 + \Delta \varphi_{\text{def}}$).

Дискретизируем модель упругодеформирующейся РН, аппроксимировав её цепью с N абсолютно жесткими звеньями, соединенными $N - 1$ упругими шарнирами (т. е. полагая упругие свойства РН сосредоточенными исключительно в шарнирах). Звенья цепи нумеруются по ходу движения РН числами $i = 1, 2, \dots, N$, а шарниры – числами $i = 1, 2, \dots, N - 1$, так что i -му звену соответствует i -й шарнир, $i = 1, 2, \dots, N - 1$, связывающий i -е звено с $(i + 1)$ -м. Начальную (по ходу движения РН) точку цепи обозначим 0, конечную – N , а всю цепь – $\{1, 2, \dots, N - 1, N\}$.

Переменную массу i -го звена обозначим $m_i(t)$, текущее значение массы РН в целом – $m_{\Sigma}(t)$, так что

$$\sum_{i=1}^N m_i(t) = m_{\Sigma}(t). \quad (1)$$

Длину i -го звена обозначим d_i и для упрощения дальнейших выкладок положим все звенья одинаковыми по длине, $d_1 = d_2 = \dots = d_N = 2d$, и однородными по массе; тогда ЦМ звеньев (обозначенные на рис. 1 символами \otimes) располагаются точно посередине соответствующего звена. Деформацию ГЛК будем характеризовать малыми углами γ_i и угловыми скоростями $\dot{\gamma}_i$ поворота i -го звена относительно $(i + 1)$ -го, полагая

$$\sin \gamma = \gamma, \cos \gamma = 1, \sin \dot{\gamma} = \dot{\gamma}, \cos \dot{\gamma} = 1; \quad (2)$$

углы γ_i отсчитываются против часовой стрелки от продолжения $(i + 1)$ -го звена в направлении $\overrightarrow{i+1, i}$ до i -го звена (заметим, что для наглядности углы γ , характеризующие деформации РН, на рисунке преувеличены).

Обычно оси чувствительности гиросtabilизированной платформы (ГСП) – основного узла ККП – ориентируются по направлениям соответствующих осей НССК (поэтому НССК иногда называют гироскопической) [6]. Для определенности положение оси z_0 ГСП совместим на рис. 1 с ЦМ звена 2; тогда ось $C_1 x_1$ связанной СК (которая соответствует возмущенному движению УДС как твердого тела) совпадёт со звеном 2: именно так «видит»

ККП ориентацию продольной оси жесткой РН в возмущенном движении при $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_5 = 0$. Что же касается текущего положения центра масс C_1 жесткой РН (т. е. начала ССК) в процессе возмущенного движения, то его естественно сместить по оси C_1x_1 в нужную сторону на расстояние $x_{ЦМ} - x_{ККП}$ от оси z_0 ГСП, где $x_{ЦМ}$ – расстояние ЦМ жесткой РН от её носка, а $x_{ККП}$ – расстояние оси z_0 ГСП от носка РН; типичный случай $x_{ЦМ} > x_{ККП}$ представлен на рис. 1. Кроме того, как было оговорено выше, ЦМ каждого звена (длиной $2d$) будем полагать расположенным посередине звена. Таким образом, получены все данные, необходимые для определения координаты и скорости смещения по оси C_1y_1 ЦМ каждого звена упругодеформирующейся РН.

Используя введённые ССК (рис. 1):

– $C_1x_1y_1$, представляющую возмущенное движение РН как твердого тела;

– $C_{def}x_{def}y_{def}$, представляющую возмущенное движение упругодеформированной РН,

осуществим декомпозицию задачи идентификации ГЛК таким образом:

– смещение ЦМ $\Delta \mathbf{r}_{def}$ упругодеформированной цепи $\{1, 2, \dots, N-1, N\}$ в целом и угловую ориентацию её главной центральной оси инерции будем рассматривать в ССК $C_1x_1y_1$,

– характеристики деформаций отдельных звеньев цепи $\{1, 2, \dots, N-1, N\}$ $y_{def\ i}$, $i = 1, 2, \dots, N$, будем рассматривать в ССК $C_{def}x_{def}y_{def}$, отсчитывая их от оси $C_{def}x_{def}$.

Теперь деформированное состояние цепи $\{1, 2, \dots, N-1, N\}$ можно получить:

а) сместив ЦМ C_1 недеформированной РН относительно начала ССК $C_1x_1y_1$ в положение C_{def} на вектор $\Delta \mathbf{r}_{def} = (x_{Cdef}, y_{Cdef})$, компоненты которого определяются координатами ЦМ деформированной системы, измеренными в ССК $C_1x_1y_1$:

$$x_{Cdef}(t) = \frac{\sum_{i=1}^N m_i(t)x_{1i}(t)}{m_{\Sigma}(t)}; \quad y_{Cdef}(t) = \frac{\sum_{i=1}^N m_i(t)y_{1i}(t)}{m_{\Sigma}(t)}, \quad (3)$$

где x_{1i} , y_{1i} – текущие значения координат смещений ЦМ i -го звена в ССК $C_1x_1y_1$; $m_i(t)$ – масса i -го звена; $m_{\Sigma}(t)$ – масса РН в целом, определяемая формулой (1);

б) повернув ось симметрии недеформированной РН относительно оси C_1x_1 ССК $C_1x_1y_1$ на угол $\Delta\varphi_{def}$, соответствующий углу ориентации главной центральной оси инерции цепи $\{1, 2, \dots, N-1, N\}$ относительно оси C_1x_1 , который определим по известной формуле [9] как функцию текущих значений координат ЦМ системы x_{Cdef} , y_{Cdef} (3):

$$\operatorname{tg}2\Delta\varphi_{def} = \frac{2\sum_{i=1}^N (x_{1i} - x_{Cdef})(y_{1i} - y_{Cdef})}{\sum_{i=1}^N (x_{1i} - x_{Cdef})^2 - \sum_{i=1}^N (y_{1i} - y_{Cdef})^2}; \quad (4)$$

в) определив деформированное состояние корпуса РН в ССК $C_{\text{def}} x_{\text{def}} y_{\text{def}}$ координатами смещений ЦМ $y_{\text{def}i}, i = 1, 2, \dots, N$ отдельных звеньев цепи $\{1, 2, \dots, N-1, N\}$ относительно оси $C_{\text{def}} x_{\text{def}}$:

$$y_{\text{def}i} = y_{1i} - y_{C_{\text{def}}} - x_{1i} \cdot \Delta\varphi_{\text{def}}, i = 1, 2, \dots, N, \quad (5)$$

где x_{1i}, y_{1i} – текущие значения координат смещений ЦМ i -го звена в ССК $C_{1x_1y_1}$; $y_{C_{\text{def}}}$ – текущее значения ординаты ЦМ системы в ССК $C_{1x_1y_1}$, определяемое второй формулой (3); $\Delta\varphi_{\text{def}}$ – угол ориентации главной центральной оси инерции цепи $\{1, 2, \dots, N-1, N\}$ относительно оси C_{1x_1} , определяемый по формуле (4). Учитывая малость углов $\gamma_i, i = 1, 2, \dots, N$, смещениями ЦМ звеньев по оси $C_{\text{def}} x_{\text{def}}$ относительно их положений на оси C_{1x_1} при выводе формулы (5) можно пренебречь.

В соответствии со свойством главного центрального момента инерции механической системы, совокупность отклонений $y_{\text{def}i}$ (5) минимальна в смысле

квадратичной метрики $\sum_{i=1}^N y_{\text{def}i}^2$ (характеризующей энергозатраты на компенса-

цию составляющих деформации отдельных звеньев). Следовательно, используя преобразования, указанные в пунктах (а) – (в), компенсацию составляющих деформации РН как твердого тела $\Delta\mathbf{r}_{\text{def}}, \Delta\varphi_{\text{def}}$ можно обеспечить традиционными, более эффективными, с точки зрения энергетических затрат, УО, введя соответствующие поправки в закон управления. В этом случае энергозатраты, оставшиеся на долю менее эффективных дополнительных УО, обеспечивающих компенсацию составляющих упругой деформации отдельных звеньев, будут связаны только с компенсацией смещений ЦМ звеньев упругодеформирующейся РН $y_{\text{def}i}$ (5) относительно оси $C_{\text{def}} x_{\text{def}}$.

Предположим, что переменные $x_{\text{def}}, y_{\text{def}}$, определяющие в ССК $C_{\text{def}} x_{\text{def}} y_{\text{def}}$ деформированное состояние корпуса РН, связаны функциональной зависимостью [10]

$$y(x) = q + rx + sx^2; \quad (6)$$

далее индекс «def» при переменных x, y для краткости будем опускать. Оценим возможности квадратичной аппроксимации (6) с использованием метода наименьших квадратов (МНК) [9]. Располагая результатами замеров ГЛК в $N > 3$ точках, можно получить систему условных уравнений МНК:

$$y_i = q + rx_i + sx_i^2, i = 1, 2, \dots, N, N > 3. \quad (7)$$

Используя символику Гаусса [9]:

$$[pyx^k] = \sum_{i=1}^N p_i y_i x_i^k, [px^k] = \sum_{i=1}^N p_i x_i^k, k = 0, 1, 2, \quad (8)$$

где p_i – веса наблюдений, причем $[p] = 1$, из (7) получим нормальную систему уравнений МНК для определения q, r, s :

$$\begin{aligned} [p]q + [px]r + [px^2]s &= [py]; \\ [px]q + [px^2]r + [px^3]s &= [pyx]; \\ [px^2]q + [px^3]r + [px^4]s &= [pyx^2]. \end{aligned} \quad (9)$$

Поскольку измерения, выполненные для каждого звена цепи, вообще говоря, неравнозначные, веса p_i естественно задать пропорциональными массам соответствующих звеньев. Как видно из структуры системы (9), эти веса можно считать определенными с точностью до коэффициента пропорциональности соотношением:

$$p_i = \frac{m_i}{m_\Sigma}, \quad (10)$$

где m_Σ определяется соотношением (1).

Таким образом, для описания ГЛК параболой (6) потребуется лишь три параметра q, r, s (вместо N параметров $y_{def i}, i = 1, 2, \dots, N$, определяющих деформированное состояние РН в ССК $C_{def} x_{def} y_{def}$). Возможно, для обеспечения требуемой точности регулирования потребуется определить ещё и производные $\dot{q}, \dot{r}, \dot{s}$ (которые можно получить численно – приборными средствами); таким образом, всего потребуется 6 параметров.

Чтобы обеспечить дальнейшее сокращения числа параметров модели, рассмотрим возможности перехода от параметров параболы (6) q, r, s к меньшему числу параметров, имеющих физический смысл и сохраняющих достаточный для реализации закона управления упругодеформирующейся РН объём информации о деформированном состоянии её корпуса. В качестве таких параметров можно использовать (см. рис. 1):

– стрелу прогиба H , характеризующую максимальную величину отклонения ГЛК от оси $C_{def} x_{def}$;

– размах ГЛК L по оси $C_{def} x_{def}$, характеризующий её крутизну.

Используя соотношение для абсциссы точки максимального отклонения ГЛК от оси $C_{def} x_{def}$

$$x_0 = -\frac{r}{2s}; \quad (11),$$

выразим параметры H, L через параметры параболы q, r, s :

$$H = \frac{r^2 - 4qs}{4s}; \quad (12)$$

$$L = \frac{\sqrt{r^2 - 4qs}}{2s}. \quad (13)$$

Учитывая, что обычно $L \gg H$, и выполняя элементарные геометрические построения (показанные на нижней части рис. 1 штрихпунктирными линиями), для оценки деформации ГЛК вместо величины H можно использовать величину угла

$$\chi = \frac{4H}{L}. \quad (14)$$

Таким образом, мы приходим к формулировке задачи управления ГЛК, учитывающей два показателя эффективности:

- минимальное значение угла изгиба χ ;
- максимальный размах ГЛК L .

Естественно объединить эти два показателя в унифицированный критерий эффективности управления:

$$F = \frac{\chi}{L} = \frac{4H}{L^2} = 4c \rightarrow \min. \quad (15)$$

Отсутствие в критерии F параметров q , r параболы (6) вполне объяснимо. Как видно из (6), (11), параметр q характеризует смещение параболы (6) как единого целого от оси абсцисс, а параметр r характеризует смещение оси симметрии параболы (6) от оси ординат, т. е. от ЦМ C_{def} упругодеформированной системы.

В этой связи возникает естественный вопрос о целесообразности затрат приборных и энергетических ресурсов СУ на поддержание в течение всего времени активного полета:

– смещенного относительно оси C_{1x_1} положения ГЛК как единого целого (компенсацию этой составляющей деформации, как было показано выше, целесообразно обеспечивать с использованием традиционных УО движением РН как твердого тела);

– смещенного относительно ЦМ C_{def} положения абсциссы максимального прогиба ГЛК.

Вполне достаточно обеспечивать лишь минимальный прогиб ГЛК относительно оси $C_{\text{def}}x_{\text{def}}$ (который, согласно (15), характеризуется единственным коэффициентом c параболы (6)).

Заметим, что результат (15) можно получить формально, если для определения критерия оптимизации использовать понятие кривизны плоской кривой:

$$K = \frac{\ddot{y}}{(1 + \dot{y}^2)^{3/2}}. \quad (16)$$

Максимальное значение K для параболы (6) достигается в экстремальной точке $y(x_0)$ с абсциссой (14), где $\dot{y} = 0$, а $\ddot{y} = 2s$, откуда следует выражение $K = 2s$, совпадающее с критерием (15) с точностью до постоянного множителя.

Приведенное выше обоснование возможности декомпозиции модели идентификации ГЛК предполагает дискретизацию распределенных переменных, описывающих динамику РН в целом. Тем не менее, такая дискретная задача идентификации ГЛК всё равно оказывается достаточно громоздкой, поскольку каждое (абсолютно жесткое) звено получающейся цепи характеризуется целым набором параметров: местными углами атаки, своими весовыми характеристиками (отвечающими условиям перетекания топлива в процессе полета), а также набором условий связи с соседними звеньями. Подготовка набора исходных данных, необходимых для анализа такой системы, предполагает необходимость принятия ряда допущений и упрощающих предположений. Это делает практически нецелесообразным использование такой математической модели, тем более, что на заключительном этапе процесса идентификации вся совокупность параметров ГЛК может быть сведена к единственному параметру F или K .

Дальнейшее упрощение ММ может быть получено на основе представления кинематически изменяющегося в полёте корпуса РН (по аналогии с известным из сопромата приёмом [11]) в виде балки с врезанным в месте её максимального изгиба пластическим шарниром. Ввиду малости перемещений, такое представление может оказаться весьма продуктивным, позволяя избежать

сложностей анализа внутренних закономерностей многозвенной ГЛК и, как следствие, уменьшить количество параметров ММ. Развитие этого приёма и его реализация обеспечит возможность методически простой трактовки задачи анализа движения РН вокруг ЦМ в текущих условиях полета и управления им.

С учетом вышесказанного оценим возможности МНК-аппроксимации ГЛК в виде ШСДТ с переменным в течение полета положением шарнира $a(t)$. Принимая во внимание относительно медленные изменения в полете массово-инерционных свойств РН, естественно формулировать задачу в квазистатической постановке, пренебрегая скоростью изменения положения шарнира, т. е. полагая в модели ГЛК $\dot{a}(t) \equiv 0$ и рассматривая в качестве входных параметров СУ переменные в течение полета значения угла γ , угловой скорости изгиба ШСДТ $\dot{\gamma}$ и положение шарнира в ССК $a(t)$. Совокупность этих данных, объективно и интегрально отражающих реакцию РН на действие всех внешних сил (систематических и случайных), с учётом реальных динамических характеристик, наложенных связей и комплекса начальных несовершенств РН, может быть использована для формирования управляющего сигнала СУ на УО. Это позволит практически синхронизировать процесс идентификации объекта управления и выработки управляющих сигналов непосредственно в процессе функционирования РН.

Из физического смысла рассматриваемого процесса упругой деформации ШСДТ вполне допустимо совместить абсциссу шарнира ШСДТ (заданную в ССК $C_{\text{def}} x_{\text{def}} y_{\text{def}}$) с абсциссой максимального прогиба ГЛК. Более того, полагая, что корпус аппроксимирован шарнирной цепью с достаточно большим числом N звеньев, без особого ущерба для точности расчетов можно положить, для упрощения дальнейших выкладок, что шарнир связки совпадает с ЦМ конкретного звена аппроксимирующей цепи с номером $n \in \{2, \dots, N-1\}$, имеющего максимальную ординату прогиба y_{def} .

Теперь систему условных уравнений МНК (7) перепишем в виде:

$$\begin{aligned} y_i &= h + bx_i, i = 2, 3, \dots, n; \\ y_i &= h + cx_i, i = n + 1, \dots, N - 1, \end{aligned} \quad (17)$$

где y_i для краткости обозначает ординату прогиба $y_{\text{def } i}$ ЦМ i -го звена цепи; b , c , h , n – неизвестные параметры, определяемые из условия минимума квадратов невязок МНК:

$$Q = \sum_{i=1}^n p_i [y_i - (h + bx_i)]^2 + \sum_{i=n+1}^N p_i [y_i - (h + cx_i)]^2 \rightarrow \min, \quad (18)$$

где веса наблюдений p_i определяются по формуле (10).

Из условия (18) следует нормальная система уравнений МНК для определения h , b , c при фиксированном $n \in \{2, \dots, N-1\}$:

$$\begin{aligned}
h + b \sum_{i=1}^n \rho_i x_i + c \sum_{i=n+1}^N \rho_i x_i &= \sum_{i=1}^N \rho_i y_i; \\
h \sum_{i=1}^n \rho_i x_i + b \sum_{i=1}^n \rho_i x_i^2 &= \sum_{i=1}^n \rho_i y_i x_i; \\
h \sum_{i=n+1}^N \rho_i x_i + c \sum_{i=n+1}^N \rho_i x_i^2 &= \sum_{i=n+1}^N \rho_i y_i x_i.
\end{aligned} \tag{19}$$

Перебирая $N - 2$ варианта решения системы (19) для каждого $n \in \{2, \dots, N - 1\}$ и подставляя полученные значения h, b, c в (18), находим окончательное решение h, b, c, n , дающее глобальный минимум (18), т. е. наилучшее совмещение ШСДТ с текущим положением ГЛК, аппроксимированной N -звенной шарнирной цепью.

Полученные параметры h, b, c, n , характеризующие текущее положение ГЛК аппроксимированной ШСДТ, далеко не равнозначны с точки зрения задачи управления движением РН вокруг ЦМ с учетом изгибных деформаций её корпуса. Так, ордината h шарнира ШСДТ (характеризующая стрелу прогиба корпуса и составляющая величину $\sim 10^{-2}$ м) практического интереса не представляет, так же как и взятые по отдельности значения коэффициентов b и c , характеризующие малые линейные смещения ЦМ отдельных отсеков ШСДТ.

Для решения задачи управления движением РН вокруг ЦМ (в плоском случае) вполне достаточно учесть в законе управления текущие значения величин, характеризующих в совокупности изгибную деформацию корпуса:

- угол γ и угловую скорость $\dot{\gamma}$ изгиба ШСДТ;
- положение шарнира $a(t)$ в ССК.

Угол γ , отсчитываемый против часовой стрелки от продолжения оси симметрии второго (по ходу движения) отсека ШСДТ до оси симметрии её первого отсека, можно определить как

$$\gamma = \arctg \frac{b-c}{1+bc} \approx \frac{b-c}{1+bc}. \tag{20}$$

Текущее положение $a(t)$ шарнира ШСДТ в связанной с корпусом системе координат можно определить, зная порядковый номер звена аппроксимирующей цепи $n \in \{2, \dots, N - 1\}$, имеющего максимальную ординату прогиба y_{def} , и длины d_1, d_2, \dots, d_n звеньев цепи, соответствующих первому отсеку ШСДТ:

$$a(t) = d_1 + d_2 + \dots + d_n, \tag{21}$$

где d_1, d_2, \dots, d_n – заданные заранее постоянные величины (но $a(t)$ – величина переменная, поскольку номер n изменяется по времени движения РН).

Текущие значения $\dot{\gamma}, \dot{a}$ можно получить численным дифференцированием значений $\gamma(t), a(t)$, используя соответствующие приборные средства СУ. Принимая во внимание относительно медленные изменения в течение полета массово-инерционных свойств отсеков РН, скоростью изменения положения шарнира можно пренебречь, полагая в законе управления $\dot{a}(t) \equiv 0$. Заметим, что если представить корпус в виде ШСДТ с неизменным в течение полета положением шарнира, $a(t) \equiv \text{const}$ [12], то при вполне разумных упрощающих предположениях такое представление ГЛК и её аппроксимация в виде пара-

болы (б) эквивалентны и дают одинаковый результат – аппроксимацию однопараметрической параболой $y = cx^2$.

Предложенный подход позволяет сформировать достаточно простую ММ управляемого процесса, дающую возможность учесть основные свойства корпуса РН и действующих на него в полёте возмущений, а также простой быстродействующий алгоритм подавления изгибных колебаний упруго-деформирующегося корпуса, т. е. осуществлять активное управление в реальном масштабе времени фактически случайными событиями за пределами разрешения традиционных СУ.

1. *Феодосьев В. И.* Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов / *В. И. Феодосьев.* – М. : Наука, 1975. – 176 с.
2. *Горбунцов В. В.* Активное управление возмущённым движением ракеты-носителя на основе данных мониторинга текущего состояния её систем: задачи и перспективы / *В. В. Горбунцов, А. Н. Заволока, Н. Ф. Свириденко* // *Техническая механика.* – 2012. – № 1. – С. 72 – 81.
3. Патент на винахід 102987 Україна, МПК В64С 13/00. Спосіб і пристрій управління збуреним рухом пружно-деформованої ракети-носія навколо центру мас / *Горбунцов В. В., Заволока О. М., Свириденко М. Ф.* ; заявник і патентоволодар Інститут технічної механіки НАН України і ДКА України. – U201209134 ; заявл. 25.07.2012 ; опубл. 27.08.2013, Бюл. № 16.
4. *Айзенберг Я. Е.* Проектирование систем стабилизации носителей космических аппаратов / *Я. Е. Айзенберг, В. Г. Сухоребрый.* – М. : Машиностроение, 1986. – 220 с.
5. *Герасюта Н. Ф.* Динамика полета. Основные задачи динамического проектирования ракет / *Н. Ф. Герасюта, А. В. Новиков, Н. Г. Белецкая.* – Днепропетровск, 1998. – 366 с.
6. *Ракета как объект управления* / *И. М. Игдалов, Л. Д. Кучма, Н. В. Поляков, Ю. Д. Шентун.* – Днепропетровск : АРТ-ПРЕСС, 2004. – 544 с.
7. *Лурье А. И.* Аналитическая механика / *А. И. Лурье.* – М. : ГИФМЛ, 1961. – 824 с.
8. *Ламб Г.* Теоретическая механика : В 3-х т. / *Г. Ламб.* – Т. 3. – М. – Л. : ОНТИ НКТП СССР, 1936. – 292 с.
9. *Линник Ю. В.* Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений / *Ю. В. Линник.* – М. : ГИФМЛ, 1962. – 350 с.
10. *Динамика старта жидкостных ракет-носителей космических аппаратов* / *Г. И. Богомаз, Н. Е. Науменко, М. Б. Соболевская, И. Ю. Хижа.* – К. : Наук. думка, 2005. – 248с.
11. *Феодосьев В. И.* Сопротивление материалов / *В. И. Феодосьев.* – М. : Наука, 1987. – 552 с.
12. *Горбунцов В. В.* Упрощенная модель динамики ракеты-носителя с учетом изгибных деформаций корпуса при полёте на активном участке траектории / *В. В. Горбунцов, А. Н. Заволока* // *Техническая механика.* – 2010. – № 2. – С. 93 – 102.

Институт технической механики
НАН Украины и ГКА Украины,
Днепропетровск

Получено 26.09.13,
в окончательном варианте 24.10.13