

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ КВАТЕРНИОННЫХ МАТРИЦ В АНАЛИТИЧЕСКОЙ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

С целью построения математических моделей и проведения вычислительных экспериментов предлагается использовать кватернионные матрицы. Приводятся новые формулы матричного представления сложных векторно-скалярных произведений, формулы кривизны, кручения, ориентации натурального триэдра траектории. Показывается применение кватернионных матриц к задаче выбора траектории движения авиационно-космической транспортной системы.

З метою побудови математичних моделей та проведення обчислювальних експериментів пропонується використовувати кватерніонні матриці. Наводяться нові формули матричного представлення складних векторно-скалярних добутків, формули кривини, кручення, орієнтації натурального триєдра траєкторії. Демонструється використання кватерніонних матриць у задачі з вибору траєкторії руху авіаційно-космічної системи.

Quaternionic matrices are proposed for mathematical modeling and calculations. New formulae of the matrix presentation of complex vector-scalar products, the curvature, spinning and orientation of a natural trihedron of the trajectory are derived. It is shown that the quaternionic matrices would be applicable for selecting the trajectory of motion of an aerospace transportation system.

Введение. Как отмечалось в [2, 5], механика принадлежит к инженерным наукам по характеру исследуемых физических явлений и к математическим наукам по применяемым аналитическим подходам. В механике абсолютно твердого тела доминирующим математическим аппаратом является векторное исчисление, в механике деформируемого твердого тела, жидкости, газа и плазмы, релятивистской механике – тензорное исчисление. Методы и подходы вычислительной механики используются непосредственно для решения широкого круга инженерных, технических задач, в частности механики космического полета, включая навигацию, ориентацию, стабилизацию, устойчивость, управляемость [3, 11], а также в динамике ракеты-носителя, самолета, корабля, наземного транспорта и др. [7, 17 – 21]. Применение компьютерных технологий предполагает введение конкретной системы отсчета и необходимость приведения векторной, тензорной записи алгоритмов решения к координатной, матричной форме [14, 15]. Использование матричного исчисления в вычислительном эксперименте обеспечивает ряд преимуществ, к числу которых относятся возможность непосредственной и достаточно простой реализации на ЭВМ построенных математических моделей, компактность и обзорность вычислительного алгоритма, снижение трудоемкости составления и тестирования вычислительной программы, уменьшение вероятности ошибок как в расчетном алгоритме, так и в вычислительной программе. В аналитической динамике для решения широкого круга задач динамического проектирования космической, ракетной, авиационной техники, наземного транспорта, робототехники, в гироскопии, виброзащите и т. д. оказывается достаточным использование специального математического аппарата в виде исчисления кватернионных матриц. На некоторые виды кватернионных матриц указывали Р. Беллман [1], А. И. Мальцев [10]. Кватернионные матрицы использовались в управлении ориентацией [4, 9], в теории конечного поворота твердого тела [13], в теории инерциальной навигации [11], в кинематике и динамике твердого тела [8, 16 – 18].

Таким образом, математический аппарат кватернионных матриц находит применение не только в аналитической динамике при построении математи-

© Т. В. Кравец, 2013

ческих моделей, по существу дополняя и заменяя векторное исчисление, но и оказался хорошо адаптированным к современным компьютерным технологиям проведения вычислительных экспериментов по исследованию динамики механических систем в пространственном движении. При этом математические модели и соответствующие им алгоритмы обретают групповую симметрию, инвариантную форму, матричную компактность, универсальность, что ускоряет программирование, облегчает верификацию математической модели и вычислительного процесса, обеспечивает удобство в работе, т. е. повышает производительность интеллектуального труда [2]. В данной работе проводится систематическое обоснование выбора базисных матриц, составляющих исходный, фундаментальный элемент исчисления кватернионных матриц.

1. Постановка задачи. На множестве элементов четырехмерного ортонормированного базиса и противоположных элементов построить группу мономиальных $(1, 0, -1)$ -матриц четвертого порядка. Найти некоммутативные подгруппы, изоморфные группе кватернионов и составляющие базис кватернионных матриц. Кватерниону и сопряженному кватерниону сопоставить изоморфные матрицы.

2. Группа мономиальных $(1, 0, -1)$ -матриц. Рассматривается система четырех нормированных и взаимно ортогональных векторов:

$$\|1 \ 0 \ 0 \ 0\|, \quad \|0 \ 1 \ 0 \ 0\|, \quad \|0 \ 0 \ 1 \ 0\|, \quad \|0 \ 0 \ 0 \ 1\|,$$

которым сопоставляются элементы конечного множества e_1, e_2, e_3, e_4 (или 1, 2, 3, 4) и противоположные элементы $e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*$ (или $1^*, 2^*, 3^*, 4^*$). Противоположным элементам множества соответствуют противоположные векторы ортонормированного четырехмерного базиса:

$$\|-1 \ 0 \ 0 \ 0\|, \quad \|0 \ -1 \ 0 \ 0\|, \quad \|0 \ 0 \ -1 \ 0\|, \quad \|0 \ 0 \ 0 \ -1\|.$$

Отметим, что четырехмерным пространством оперирует специальная теория относительности, теория конечного поворота, проективная геометрия.

С помощью введенного множества элементов формируется совокупность четных подстановок четвертой степени, представленных в виде произведения двух транспозиций и тождественных подстановок [6]. Искомые подстановки в развернутой записи имеют вид:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4^* \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3^* \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2^* \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1^* \end{pmatrix};$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3^* & 4 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4^* & 3 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1^* & 2 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2^* & 1 \end{pmatrix};$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^* & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1^* & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4^* & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3^* & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned}
F_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^* & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2^* & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3^* & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4^* & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \\
R_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3^* & 4^* \end{pmatrix}, R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4^* & 3^* \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1^* & 2^* \end{pmatrix}, R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2^* & 1^* \end{pmatrix}; \\
S_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^* & 3 & 4^* \end{pmatrix}, S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1^* & 4 & 3^* \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4^* & 1 & 2^* \end{pmatrix}, S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3^* & 2 & 1^* \end{pmatrix}; \\
T_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^* & 2 & 3 & 4^* \end{pmatrix}, T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2^* & 1 & 4 & 3^* \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3^* & 4 & 1 & 2^* \end{pmatrix}, T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4^* & 3 & 2 & 1^* \end{pmatrix};
\end{aligned}$$

а также противоположные подстановки:

$$\begin{array}{cccc}
\overline{A_0} & \overline{A_1} & \overline{A_2} & \overline{A_3} \\
\overline{B_0} & \overline{B_1} & \overline{B_2} & \overline{B_3} \\
\overline{T_0} & \overline{T_1} & \overline{T_2} & \overline{T_3}
\end{array}$$

Каждая из полученных подстановок представляется квадратной мономиальной $(1, 0, -1)$ -матрицей. Полученное таким образом множество мономиальных $(1, 0, -1)$ -матриц в развернутой записи имеет вид:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, A_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, A_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, A_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \\
B_0 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, B_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}, B_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, B_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \\
C_0 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, C_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, C_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, C_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

и т. д. матрицы образуют мультипликативную группу 64-го порядка и подгруппы 32-го, 16-го, 8-го, 4-го и 2-го порядков. Полученные всевозможные композиции сводятся в таблицы Кэйли [6].

Некоммутативные подгруппы, изоморфные группе кватернионов. Путем анализа таблицы умножения группы шестьдесят четвертого порядка выделяются две подгруппы четвертого порядка, семь подгрупп восьмого порядка, двадцать четыре подгруппы шестнадцатого порядка и одна подгруппа тридцать второго порядка. Порядок исходной группы кратен порядку любой из составленных подгрупп, что соответствует теореме Лагранжа [6]. Подгруппы второго порядка в силу их тривиальности не рассматриваются. Подгруппы 4-го порядка

являются абелевыми. Отметим, что пять подгрупп восьмого порядка являются абелевыми и две – некоммутативными (отмечены в табл. 1).

Таблица 1.

Подгруппы мономиальных матриц восьмого порядка

| № п/п | Элементы подгруппы | | | | | | | |
|-------|--------------------|-------|-------|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1 | A_0 | A_1 | A_2 | A_3 | \bar{A}_0 | \bar{A}_1 | \bar{A}_2 | \bar{A}_3 |
| 2* | A_0 | R_2 | S_3 | T_1 | \bar{A}_0 | \bar{R}_2 | \bar{S}_3 | \bar{T}_1 |
| 3* | A_0 | S_1 | T_2 | R_3 | \bar{A}_0 | \bar{S}_1 | \bar{T}_2 | \bar{R}_3 |
| 4 | A_0 | T_1 | S_2 | R_3 | \bar{A}_0 | \bar{T}_1 | \bar{S}_2 | \bar{R}_3 |
| 5 | A_0 | S_1 | R_2 | T_3 | \bar{A}_0 | \bar{S}_1 | \bar{R}_2 | \bar{T}_3 |
| 6 | A_0 | R_1 | T_2 | S_3 | \bar{A}_0 | \bar{R}_1 | \bar{T}_2 | \bar{S}_3 |
| 7 | A_0 | R_0 | S_0 | T_0 | \bar{A}_0 | \bar{R}_0 | \bar{S}_0 | \bar{T}_0 |

Покажем, что полученные некоммутативные подгруппы изоморфны группе кватернионов. Таблицы Кэйли двух некоммутативных подгрупп представлены в таблице 2.

Таблица 2

Таблицы умножения некоммутативных подгрупп

| | | | | | | | | |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| | A_0 | T_1 | R_2 | S_3 | \bar{A}_0 | \bar{T}_1 | \bar{R}_2 | \bar{S}_3 |
| A_0 | A_0 | T_1 | R_2 | S_3 | \bar{A}_0 | \bar{T}_1 | \bar{R}_2 | \bar{S}_3 |
| T_1 | T_1 | \bar{A}_0 | \bar{S}_3 | R_2 | \bar{T}_1 | A_0 | S_3 | \bar{R}_2 |
| R_2 | R_2 | S_3 | \bar{A}_0 | \bar{T}_1 | \bar{R}_2 | \bar{S}_3 | A_0 | T_1 |
| S_3 | S_3 | \bar{R}_2 | T_1 | \bar{A}_0 | \bar{S}_3 | R_2 | \bar{T}_1 | A_0 |
| \bar{A}_0 | \bar{A}_0 | \bar{T}_1 | \bar{R}_2 | \bar{S}_3 | A_0 | T_1 | R_2 | S_3 |
| \bar{T}_1 | \bar{T}_1 | A_0 | S_3 | \bar{R}_2 | T_1 | \bar{A}_0 | \bar{S}_3 | R_2 |
| \bar{R}_2 | \bar{R}_2 | \bar{S}_3 | A_0 | T_1 | R_2 | S_3 | \bar{A}_0 | \bar{T}_1 |
| \bar{S}_3 | \bar{S}_3 | R_2 | \bar{T}_1 | A_0 | S_3 | \bar{R}_2 | T_1 | \bar{A}_0 |
| * | A_0 | S_1 | T_2 | R_3 | \bar{A}_0 | \bar{S}_1 | \bar{T}_2 | \bar{R}_3 |
| A_0 | A_0 | S_1 | T_2 | R_3 | \bar{A}_0 | \bar{S}_1 | \bar{T}_2 | \bar{R}_3 |
| S_1 | S_1 | \bar{A}_0 | R_3 | \bar{T}_2 | \bar{S}_1 | A_0 | \bar{R}_3 | T_2 |
| T_2 | T_2 | \bar{R}_3 | \bar{A}_0 | S_1 | T_2 | \bar{R}_3 | \bar{A}_0 | S_1 |
| R_3 | R_3 | T_2 | \bar{S}_1 | \bar{A}_0 | \bar{R}_3 | \bar{T}_2 | S_1 | A_0 |
| \bar{A}_0 | \bar{A}_0 | \bar{S}_1 | \bar{T}_2 | \bar{R}_3 | A_0 | S_1 | T_2 | R_3 |
| \bar{S}_1 | \bar{S}_1 | A_0 | \bar{R}_3 | T_2 | S_1 | \bar{A}_0 | R_3 | \bar{T}_2 |
| \bar{T}_2 | \bar{T}_2 | R_3 | A_0 | \bar{S}_1 | \bar{T}_2 | R_3 | A_0 | \bar{S}_1 |
| \bar{R}_3 | \bar{R}_3 | \bar{T}_2 | S_1 | A_0 | R_3 | T_2 | \bar{S}_1 | \bar{A}_0 |

Известно, что кватернион определяется как гиперкомплексное число:

$$1a_0 + ia_1 + ja_2 + ka_3,$$

где $1a_0$ – скалярная, $ia_1 + ja_2 + ka_3$ – векторная часть кватерниона, a_0, a_1, a_2, a_3 – действительные числа, $1, i, j, k$ – элементы базиса. Здесь 1 – вещественная единица, i, j, k трактуются как специальные кватернионы (гиперкомплексные единицы) либо как базисные векторы трехмерного пространства [3, 11]. Для элементов базиса пространства кватернионов приняты специальные правила умножения:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1; ij = -ji = k; jk = -kj = i; ki = -ik = j.$$

Множество, состоящее из восьми элементов $1, i, j, k, -1, -i, -j, -k$ (здесь знак минус служит различительным значком), составляет группу кватернионов с известной таблицей умножения (табл. 3) [6].

Таблица 3

Таблица умножения группы кватернионов

| * | 1 | i | j | k | -1 | -i | -j | -k |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 1 | i | j | k | -1 | -i | -j | -k |
| i | i | -1 | k | -j | -i | 1 | -k | j |
| j | j | -k | -1 | i | -j | k | 1 | -i |
| k | k | j | -i | -1 | -k | -j | i | 1 |
| -1 | -1 | -i | -j | -k | 1 | i | j | k |
| -i | -i | 1 | -k | j | i | -1 | k | -j |
| -j | -j | k | 1 | -i | j | -k | -1 | i |
| -k | -k | -j | i | 1 | k | j | -i | -1 |

Из сравнения таблиц умножения группы кватернионов и найденных некоммутативных подгрупп восьмого порядка устанавливается их изоморфность.

4. Кватернионные матрицы. Порядок сопоставления элементов базиса пространства кватернионов мономиальным $(1, 0, -1)$ -матрицам рассматриваемых некоммутативных подгрупп не является единственным. Перечень конкретных вариантов сопоставления для двух некоммутативных подгрупп приводится в таблице 4.

Таблица 4

Варианты сопоставления мономиальных матриц элементам базиса кватерниона

| Элемент базиса | Элементы подгрупп | | | | | | | |
|----------------|-------------------|-------|-------|-----|------------------|-----|------------------|--|
| 1 | A_0 | A_0 | A_0 | ... | A_0 | ... | A_0 | |
| i | S_1 | T_2 | R_3 | ... | $\overline{S_1}$ | ... | $\overline{R_3}$ | |
| j | T_2 | R_3 | S_1 | ... | $\overline{T_2}$ | ... | $\overline{T_2}$ | |
| k | R_3 | S_1 | T_2 | ... | $\overline{R_3}$ | ... | $\overline{S_1}$ | |
| № | 1 | 2 | 3 | ... | 16* | ... | 24 | |
| 1 | A_0 | A_0 | A_0 | ... | A_0 | ... | A_0 | |
| i | T_1 | S_3 | R_2 | ... | $\overline{T_1}$ | ... | $\overline{S_3}$ | |
| j | S_2 | R_3 | T_1 | ... | $\overline{R_2}$ | ... | $\overline{T_1}$ | |
| k | R_2 | T_1 | S_3 | ... | $\overline{S_3}$ | ... | $\overline{R_2}$ | |
| № | 1 | 2 | 3 | ... | 10* | ... | 24 | |

Из этого множества вариантов выбирается, в частности, для первой некоммутативной подгруппы вариант № 16, а для второй некоммутативной подгруппы – вариант № 10, т. е.

$$1 \leftrightarrow A_0, \quad i \leftrightarrow \bar{S}_1, \quad j \leftrightarrow T_2, \quad k \leftrightarrow \bar{R}_3,$$

$$1 \leftrightarrow A_0, \quad i \leftrightarrow \bar{T}_1, \quad j \leftrightarrow R_2, \quad k \leftrightarrow S_3.$$

Эти варианты сопоставления удовлетворяют критерию упорядоченности, симметрии, отраженной в возможности применения операции транспонирования. Здесь для выделенных базисных матриц представляется целесообразным воспользоваться обозначениями базиса, согласно таблице 5.

Таблица 5

Базисные матрицы, изоморфные элементам кватерниона

| Элементы кватерниона | Базисные матрицы | Обозначения |
|----------------------|---|---|
| 1 | $A_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ | $A_0 = E_0$ |
| i | $\bar{T}_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $\bar{S}_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ | $\bar{T}_1 = E_1, \quad \bar{S}_1 = {}^t E_1$ |
| j | $R_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ $T_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ | $R_2 = E_2, \quad T_2 = {}^t E_2$ |
| k | $S_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ $\bar{R}_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ | $S_3 = E_3, \quad \bar{R}_3 = {}^t E_3$ |
| -1 | $\bar{A}_0 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ | $\bar{A}_0 = I$ |
| -i | $T_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ $S_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ | $T_1 = {}^t E_1^t, \quad S_1 = E_1^t$ |
| -j | $\bar{R}_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ $\bar{T}_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ | $\bar{R}_2 = {}^t E_2^t, \quad \bar{T}_2 = E_2^t$ |
| -k | $\bar{S}_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ $R_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ | $\bar{S}_3 = {}^t E_3^t, \quad R_3 = E_3^t$ |

Эти обозначения отражают возможность преобразования базисных матриц применением вводимых операций транспонирования: полного (перестановка всех строк и столбцов), внешнего (перестановка первой строки и столбца) и внутреннего (перестановка элементов ядра, т. е. исключая первую строку и столбец). Кватерниону и сопряженному кватерниону сопоставляются по две матрицы упорядоченной структуры:

$$\begin{pmatrix} A \\ {}^t A^t \\ {}^t A \\ A^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ E_0 & {}^t E_1^t & {}^t E_2^t & {}^t E_3^t \\ E_0 & {}^t E_1 & {}^t E_2 & {}^t E_3 \\ E_0 & E_1^t & E_2^t & E_3^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

В развернутой записи получим соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ -a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}; \quad {}^t A = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix};$$

$${}^t A^t = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{pmatrix}; \quad A^t = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ -a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ -a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

5. Транспонирование. Составленные матрицы обладают очевидной упорядоченностью, так как преобразуются одна в другую применением предложенных операций полного, внешнего и внутреннего транспонирования. Матрица ${}^t A$ образуется из матрицы A в результате перестановки первой строки и первого столбца, матрица ${}^t A^t$ является транспонированной по отношению к матрице A , а матрица A^t – транспонированной по отношению к ${}^t A$, т. е. имеет место следующие правила транспонирования:

$$\begin{aligned} {}^t(A)^t &= {}^t A^t, & {}^t(A) &= {}^t A, & (A)^t &= A^t, \\ {}^t({}^t A^t)^t &= A, & {}^t({}^t A^t) &= A^t, & ({}^t A^t)^t &= {}^t A, \\ {}^t({}^t A)^t &= A^t, & {}^t({}^t A) &= A, & ({}^t A)^t &= {}^t A^t, \\ {}^t(A^t)^t &= {}^t A, & {}^t(A^t) &= {}^t A^t, & (A^t)^t &= A. \end{aligned}$$

6. Апробация кватернионных матриц. Введенные кватернионные матрицы представляют в эквивалентной записи основные операции векторной алгебры в частном случае, когда скалярная часть кватерниона равна нулю. Нетрудно убедиться в справедливости следующих соответствий скалярно-векторных произведений нескольких векторов и мультипликативных композиций кватернионных матриц:

- для двух векторов \bar{a}, \bar{b}

$$\left\| \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{0} \right\| \leftrightarrow \frac{1}{2} (A_0 + A_0^t) \cdot b_0, \quad \left\| \frac{0}{\bar{a} \times \bar{b}} \right\| \leftrightarrow \frac{1}{2} (A_0 - A_0^t) \cdot b_0;$$

- для трех векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$

$$\left\| \frac{\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})}{0} \right\| \leftrightarrow \frac{1}{4} (A_0 + A_0^t) (B_0 - B_0^t) \cdot c_0,$$

$$\left\| \frac{0}{\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})} \right\| \leftrightarrow \frac{1}{4} (A_0 - A_0^t) (B_0 - B_0^t) \cdot c_0;$$

- для четырех векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$

$$\left\| \frac{\bar{a} \cdot [\bar{b} \times (\bar{c} \times \bar{d})]}{0} \right\| \leftrightarrow \frac{1}{8} (A_0 + A_0^t) (B_0 - B_0^t) (C_0 - C_0^t) \cdot d_0,$$

$$\left\| \frac{0}{\bar{a} \times [\bar{b} \times (\bar{c} \times \bar{d})]} \right\| \leftrightarrow \frac{1}{8} (A_0 - A_0^t) (B_0 - B_0^t) (C_0 - C_0^t) \cdot d_0,$$

$$\left\| \frac{0}{(\bar{a} \times \bar{b}) \times (\bar{c} \times \bar{d})} \right\| \leftrightarrow \frac{1}{8} [(A_0 + A_0^t) (B_0 + B_0^t) - (B_0 + B_0^t) (A_0 + A_0^t)] (C_0 - C_0^t) \cdot d_0,$$

и другие соответствия.

Пример Для иллюстрации применения приведенных соответствий рассматривается кинематическая задача о выборе траектории движения много-разовой авиационно-космической транспортной системы [12]. Создание полностью много-разовой авиационно-космической транспортной системы в Украине требует решения ряда специальных проблем, одной из которых являются территориальные ограничения. Традиционные траектории полёта ракетно-космических систем в виде пологих линий в плоскости стрельбы оказываются неприемлемыми в силу невозможности обеспечения отчуждаемых территорий. Применение авиационно-космической системы, где в качестве первой ступени используется самолёт-носитель АН-225, второй ступени – воздушно-космический самолёт с гиперзвуковым прямоточным воздушно-реактивным двигателем, позволяет реализовать принципиально новые траектории выведения полезной нагрузки в виде спирали-винтовой линии, приведенной на рис. 1.

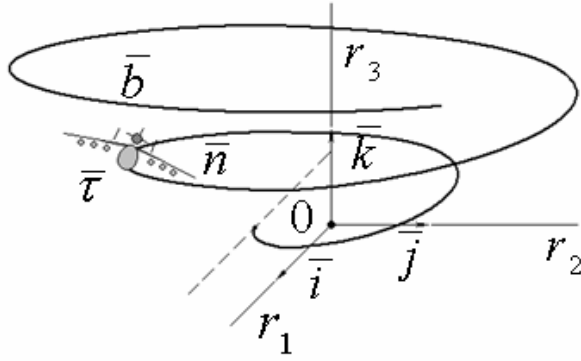


Рис. 1

Пусть пространственная траектория задана в неподвижной системе координат наземного комплекса (авиабаза) годографом

$$\bar{r} = \bar{i}(\rho_0 + \rho_1 t + \rho_2 t^2 + \rho_3 t^3) \cos \omega t + \bar{j}(\rho_0 + \rho_1 t + \rho_2 t^2 + \rho_3 t^3) \sin \omega t + \bar{k}(h_0 + h_1 t + h_2 t^2 + h_3 t^3),$$

где $\omega, \rho_i, h_i (i=0,1,2,3)$ – варьируемые параметры траектории, определяемые по заданным краевым условиям и очевидной зависимости: $\omega t_k = 2\pi n$, в которой n – количество витков, t_k – время разделения ступеней.

В качестве исходных данных используются следующие кинематические параметры траектории: $H(0)$ и $L(0)$ – высота и расстояние от авиабазы в горизонтальной плоскости до точки входа первой ступени на спирале-винтовую траекторию, $H(t_k)$ и $L(t_k)$ – высота и расстояние от авиабазы в горизонтальной плоскости до точки разделения ступеней, $v(0)$ и $w(0)$ – горизонтальная и вертикальная составляющие скорости самолёта-носителя в начальной точке спирале-винтовой траектории, $v(t_k)$ и $w(t_k)$ – горизонтальная и вертикальная составляющие скорости самолёта-носителя в момент отделения воздушно-космического самолёта.

По заданным исходным данным составляются две независимые системы алгебраических уравнений относительно варьируемых параметров искомой траектории: линейная и нелинейная. Эти системы допускают аналитическое решение (методом Жордана–Гаусса) в виде

$$h_0 = H(0), \quad h_1 = w(0),$$

$$h_2 = 3 \frac{H(t_k) - H(0)}{t_k^2} - \frac{w(t_k) + 2w(0)}{t_k},$$

$$h_3 = \frac{w(t_k) + w(0)}{t_k^2} - 2 \frac{H(t_k) - H(0)}{t_k^3},$$

$$\rho_0 = L(0), \quad \rho_1 = \sqrt{v^2(0) - \omega^2 L^2(0)},$$

$$\rho_2 = 3 \frac{L(t_k) - L(0)}{t_k^2} - 2 \frac{\sqrt{v^2(0) - \omega^2 L^2(0)}}{t_k} - \frac{\sqrt{v^2(t_k) - \omega^2 L^2(t_k)}}{t_k},$$

$$\rho_3 = \frac{\sqrt{v^2(t_k) - \omega^2 L^2(t_k)}}{t_k^2} + \frac{\sqrt{v^2(0) - \omega^2 L^2(0)}}{t_k^2} - 2 \frac{L(t_k) - L(0)}{t_k^3}$$

при условии $v^2(t) \geq \omega^2 L^2(t)$.

Для полученной спирале-винтовой траектории аналитически находятся основные кинематические параметры: единичные векторы касательной $\bar{\tau}$, главной нормали \bar{n} , бинормали \bar{b} , а также кривизна K , кручение χ , матрица направляющих косинусов, связывающая оси сопровождающего трёхгранника и неподвижные оси наземного комплекса [9], т. е.

$$\bar{\tau} = \frac{\dot{\vec{r}}}{V}, \quad \bar{n} = -\frac{\dot{\vec{r}} \times (\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})}{V^4 K}, \quad \bar{b} = -\frac{\dot{\vec{r}} \times [\dot{\vec{r}} \times (\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})]}{V^5 K},$$

$$K = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{V^3}, \quad \chi = -\frac{\dot{\vec{r}} \cdot (\ddot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})}{\frac{1}{V^2} \begin{vmatrix} \dot{\vec{r}} & \ddot{\vec{r}} \\ \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} & \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{\vec{r}} & \ddot{\vec{r}} \\ \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} & \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} \end{vmatrix}},$$

$$V^2 = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}.$$

Используемые в приведенных формулах сложные векторные произведения удобно вычислять с помощью предлагаемых матричных алгоритмов, адаптированных к компьютерной реализации:

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} \leftrightarrow \frac{1}{2} (\dot{R} - \dot{R}^t) \ddot{r},$$

$$\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} \leftrightarrow \frac{1}{2} (\dot{R} + \dot{R}^t) \dot{r}, \quad \dot{\vec{r}} \times (\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \leftrightarrow \frac{1}{4} (\dot{R} - \dot{R}^t)^2 \ddot{r},$$

$$\dot{\vec{r}} \cdot (\ddot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \leftrightarrow \frac{1}{4} (\dot{R} + \dot{R}^t) (\ddot{R} - \ddot{R}^t) \ddot{r}, \quad \dot{\vec{r}} \times [\dot{\vec{r}} \times (\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})] \leftrightarrow \frac{1}{8} (\dot{R} - \dot{R}^t)^3 \ddot{r}.$$

Отметим также, что

$$\begin{vmatrix} \dot{\vec{r}} & \ddot{\vec{r}} \\ \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} & \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{\vec{r}} & \ddot{\vec{r}} \\ \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} & \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} \end{vmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{16} \ddot{r}^t (\dot{R} - \dot{R}^t)^4 \ddot{r}.$$

Здесь $\dot{R}, \dot{R}^t, \ddot{R}, \ddot{R}^t$ – кватернионные матрицы с нулевой скалярной частью.

Таким образом, получаем следующие формулы:

$$\bar{\tau} \leftrightarrow \frac{1}{V} \dot{r}, \quad \bar{n} \leftrightarrow -\frac{1}{4 V^4 K} (\dot{R} - \dot{R}^t)^2 \ddot{r}, \quad \bar{b} \leftrightarrow -\frac{1}{8 V^5 K} (\dot{R} - \dot{R}^t)^3 \ddot{r},$$

$$\chi = -\frac{4 V^2 (\dot{R} + \dot{R}^t)(\ddot{R} - \ddot{R}^t)\ddot{r}}{\dot{r}^t (\dot{R} - \dot{R}^t)^4 \ddot{r}}, \quad K^2 = \frac{\dot{r}^t (\dot{R} - \dot{R}^t)^2 \ddot{r}}{4 V^6},$$

$$V^2 = -\frac{1}{4} \dot{r}^t (\dot{R} + \dot{R}^t)^2 \ddot{r}$$

Зависимость орт сопровождающего трехгранника и базовой системы отсчета в кватернионных матрицах имеет вид:

$$\|0 \bar{i} \bar{j} \bar{k}\| = \frac{1}{4 V^4 K} \|0 \bar{i} \bar{j} \bar{k}\| \left\| \left| 4 V^3 K \dot{r} \right| \left| -(\dot{R} - \dot{R}^t)^2 \ddot{r} \right| \left| -\frac{1}{2V} (\dot{R} - \dot{R}^t)^3 \ddot{r} \right| \right\|.$$

Откуда непосредственно находится матрица направляющих косинусов.

Заключение. В аналитической и вычислительной динамике предлагается применять математический аппарат кватернионных матриц, который достаточен как для построения математических моделей механических систем, так и при проведении вычислительных экспериментов в процессе динамического проектирования образцов новой техники. Исчисление кватернионных матриц адаптировано к компьютерным технологиям и изоморфно алгебре кватернионов, обобщает алгебру действительных и комплексных чисел, векторную алгебру на плоскости и в трехмерном пространстве [3, 11].

Установлен базис вводимой совокупности четырех кватернионных матриц на множестве элементов четырехмерного ортонормированного пространства и противоположных элементов в виде мономиальных (1, 0, -1) матриц, составляющих две некоммутативные подгруппы восьмого порядка. Показана изоморфность элементов базиса пространства кватернионов и построенных совокупностей базисных матриц. Симметрия кватернионных матриц отражена в трех операциях транспонирования и целесообразных обозначениях. Приведенные результаты составляют основополагающий элемент исчисления кватернионных матриц. Рассмотренными кватернионными матрицами представлены в эквивалентной записи сложные векторно-скалярные произведения, используемые в динамике твердого тела. Аналитически решена задача об определении основных кинематических параметров спирале-винтовой траектории многократной авиационно-космической транспортной системы. Расчетные алгоритмы представлены в форме кватернионных матриц, обеспечивающей удобную компьютерную реализацию.

1. Беллман Р. Введение в теорию матриц / Р. Беллман. – М. : Наука, 1976. – 352 с.
2. Блехман И. И. Механика и прикладная математика: Логика и особенности приложения математики / И. И. Блехман, А. Д. Мышкис, Я. Г. Пановко. – М. : Наука. Главная ред. физ.-мат. лит., 1983. – 328 с.
3. Бранец В. Н. Механика космического полета: Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела / В. Н. Бранец, И. П. Шмыглевский. – М. : Наука, 1973. – 320 с.
4. Икес Б. П. Новый метод выполнения численных расчетов, связанных с работой системы управления ориентацией, основанный на использовании кватернионов / Б. П. Икес // Ракетная техника и космонавтика. – 1970. – Т.8, №1. – С. 13 – 19.
5. Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины (1918 – 2008) : 90 лет Института (История. Структура. Информационные аспекты) / Под общ. ред. А. Н. Гузя. Сост. И. С. Чернышенко, Я. Я. Рушицкий. – К. : Літера ЛТД, 2008. – 320 с.
6. Каргаполов М. И. Основы теории групп / М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков. – М. : Наука, 1982. – 288 с.
7. Кошляков В. Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. Аналитические методы / В. Н. Кошляков. – М. : Наука, 1985. – 288 с.

8. *Кравец Т. В.* Об использовании кватернионных матриц для описания вращательного движения твердого тела в пространстве / *Т. В. Кравец* // Техническая механика. – 2001. – №1. – С. 148 – 157.
9. *Кравец Т. В.* Определение по вектору Гиббса ориентации сопровождающего трехгранника траектории свободного твердого тела / *Т. В. Кравец* // Техническая механика. – 2002. – №1. – С. 27 – 32.
10. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры / *А. И. Мальцев*. – М. : Наука, 1970. – 400 с.
11. *Онищенко С. М.* Применение гиперкомплексных чисел в теории инерциальной навигации. Автономные системы / *С. М. Онищенко*. – Киев : Наук. думка, 1983. – 208 с.
12. Определение кинематических параметров движения ступеней авиационно-космических систем / *А. П. Панов, В. П. Гусьнин, И. И. Сердюк, А. С. Карпов* // Техническая механика. – 1999. – №1. – С. 76 – 83.
13. *Плотников П. К.* Применение кватернионных матриц в теории конечного поворота твердого тела / *П. К. Плотников, Ю. Н. Челноков* // Сб. научн.-метод. статей по теорет. механике. – М. : Высшая школа, 1981. – Вып. 11. – С. 122 – 128.
14. *Стражева И. В.* Векторно-матричные методы в механике полета / *И. В. Стражева, В. С. Мелкумов*. – М. : Машиностроение, 1973. – 260 с.
15. *Фрезер Р.* Теория матриц и её приложение к дифференциальным уравнениям и динамике / *Р. Фрезер, В. Дункан, А. Коллар*. – М. : Изд. Иностран. лит., 1950. – 445 с.
16. *Челноков Ю. Н.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения / *Ю. Н. Челноков*. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 512 с.
17. *Kravets V. V.* On the Nonlinear Dynamics of Elastically Interacting Asymmetric Rigid Bodies / *V. V. Kravets, T. V. Kravets* // Int. Appl. Mech. – 2006. – 42, №1. – P. 110 – 114.
18. *Kravets V. V.* Using Quaternion Matrices to Describe the Kinematics and Nonlinear Dynamics of an Asymmetric Rigid Body / *V. V. Kravets, T. V. Kravets, A. V. Kharchenko* // Int.Appl.Mech. – 2009. – 45, № 2 – P. 223 – 231.
19. *Larin V. B.* On the Control Problem for a Compound Wheeled Vehicle / *V. B. Larin* // Int.Appl.Mech. – 2007. – 43, № 11 – P. 1269 – 1275.
20. *Lobas L. G.* Quantitative and Analytical Methods in Dynamics of Wheel Machines / *L. G. Lobas, V. G. Verbitsky*. – Kyiv : Naukova Dumka, 1990. – 232 p.
21. *Martyniuk A. A.* Qualitative Methods in Nonlinear Dynamics : Novel Approaches to Liapunov's Matrix Functions / *A. A. Martyniuk*. – New York – Basel : Marsel Dekker, 2002. – 301 p.

Днепропетровский национальный университет
железнодорожного транспорта
имени акад. В. Лазаряна

Получено 14.06.13,
в окончательном варианте 26.07.13