УДК 533.9

**В. Н. ГОРЕВ, А. И. СОКОЛОВСКИЙ**

# К ГИДРОДИНАМИКЕ ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗИРОВАННОЙ ПЛАЗМЫ

До настоящего времени гидродинамика плазмы изучалась без адекватного учета релаксации температур и скоростей компонент. Целью данной работы является учет релаксационных процессов путем аналитического рассмотрения на основе кинетического уравнения Ландау и обобщения метода Чепмена–Энскога. Построена гидродинамика полностью ионизированной электрон-ионной плазмы с учетом релаксационных явлений выравнивания температур и скоростей компонент вблизи завершения релаксации. Получены функции распределения компонент плазмы, уравнения гидродинамики и выражения для входящих в них кинетических коэффициентов. Интегральные уравнения теории приближенно решены методом разложения по полиномам Сонина. Дополнительно учтено, что отношение масс электрона и иона мало.

До теперешнього часу гідродинаміка плазми вивчалась без адекватного урахування релаксації температур та швидкостей компонент. Метою данної роботи є урахування реласкаційних процесів шляхом аналітичного розгляду на основі кінетичного рівняння Ландау та узагальнення методу Чепмена–Енскога. Побудовано гідродинаміку повністю іонізованої електрон-йонної плазми з урахуванням релаксаційних явищ вирівнювання температур та швидкостей компонент поблизу завершення релаксації. Отримано функції розподілу компонент плазми, рівняння гідродинаміки та вирази для кінетичних коефіцієнтів, які в них входять. Інтегральні рівняння теорії наближено розв’язані методом розкладу по поліномах Соніна. Додатково враховано, що відношення мас електрона та іона мале.

Up to now, plasma hydrodynamics has been studied without an adequate account for the relaxation of the plasma component temperatures and velocities. The purpose of this work is to take into account the relaxation processes by an analytical description on the basis of the Landau kinetic equation and the generalization of the Chapman–Enskog method. The hydrodynamics of a completely ionized two-component plasma is built taking into account the process of equalization of the component temperatures and velocities at the end of the relaxation. The distribution functions of the plasma components, hydrodynamics equations, and expressions for the kinetic coefficients involved are found. The integral equations of the theory are approximately solved by the Sonine polynomial expansion. The smallness of the electron-to-ion mass ratio is also taken into account.

**Введение.** В своей известной работе [1] Ландау вывел кинетическое уравнение для полностью ионизированных систем с кулоновским взаимодействием, которое является одним из основных уравнений в теории плазмы. Также им был исследован однородный случай и для него получено время релаксации температур компонент. Ландау предположил, что в однородном случае функции распределения компонент максвелловские с зависящими от времени температурами компонент. В рамках этого подхода можно получить также время релаксации скоростей [2].

В исследовании неоднородных систем широкое применение получил метод Чепмена–Энскога [3]. Однако в рамках стандартного подхода к гидродинамике систем малой плотности зачастую использовалось уравнение Больцмана и рассматривался случай незаряженных частиц [3, 4]. Вопрос изучения кинетических коэффициентов в плазме не нов [5], однако в литературе не изучались поправки, которые дают релаксационные процессы к результатам однотемпературной и односкоростной гидродинамики плазмы.

Целью данной работы является построение на основе уравнения Ландау гидродинамики плазмы и вычисление ее кинетических коэффициентов с учетом релаксационных явлений.

**Кинетическое уравнение Ландау.** Кинетическое уравнение Ландау [1], являющееся одним из базовых в кинетической теории плазмы, имеет вид:

$$\frac{\partial f_{ap}}{\partial t} = -\frac{p_n}{m_a}\frac{\partial f_{ap}}{\partial x_n} + I_{ap}(f), \tag{1}$$

где $f_{ap}$ – функция распределения $a$-й компоненты, которая зависит от импульса $\vec{p}$ частиц $a$-й компоненты ($a = i, e$, индекс $e$ относится к электронам, $i$ – к ионам), $m_a$ – масса частиц $a$-й компоненты, $I_{ap}(f)$ – интеграл столкновений Ландау:

$$I_{ap}(f) = -\sum_b \frac{\partial}{\partial p_n}\left(2\pi\left(e_a e_b\right)^2 L\int\left\{f_{ap}\frac{\partial f_{bp'}}{\partial p'_l} - f_{bp'}\frac{\partial f_{ap}}{\partial p_l}\right\}D_{nl}\left(\frac{\vec{p}}{m_a},\frac{\vec{p}'}{m_b}\right)d^3p'\right), \quad (2)$$

где

$$D_{nl}\left(\vec{u}_1,\vec{u}_2\right) \equiv \frac{\left|\vec{u}_1-\vec{u}_2\right|\delta_{nl} - \left(u_{1n}-u_{2n}\right)\left(u_{1l}-u_{2l}\right)}{\left|\vec{u}_1-\vec{u}_2\right|^3}, \quad (3)$$

$e_a$ – заряд частиц $a$-й компоненты ($e_e = -e$, $e_i = ze$, $z$ – зарядовое число ионов), $L$ – кулоновский логарифм Ландау, $e$ – элементарный электрический заряд.

**Параметры сокращенного описания, малые параметры.** По определению [3], температуры $T_a$ и скорости $\upsilon_{an}$ компонент вводятся следующим образом:

$$n_a = \int f_{ap} d^3p, \qquad \pi_{an} = m_a n_a \upsilon_{an} = \int f_{ap} p_n d^3p,$$
$$\varepsilon_a = \frac{3}{2}n_a T_a + \frac{m_a n_a \upsilon_a{}^2}{2} = \int f_{ap}\varepsilon_{ap} d^3p, \quad (4)$$

где $n_a$ – плотность числа частиц $a$-й компоненты, $\pi_{an}$ – плотность импульса $a$-й компоненты, $\varepsilon_a$ – плотность энергии $a$-й компоненты ($\varepsilon_{ap} \equiv p^2/2m_a$). Температуру в данной работе будем записывать в энергетических единицах.

Как известно [6], температуры и скорости электронов и ионов достаточно быстро устанавливаются внутри каждой из этих подсистем, а затем происходит выравнивание (релаксация) скоростей и температур электронов и ионов. Из формул (4) видно, что после завершения релаксации скорость $\upsilon_n$ и температура $T$ компонент будут удовлетворять соотношениям:

$$\pi_n = \sum_a \pi_{an} = \upsilon_n \sum_a m_a n_a, \qquad \varepsilon = \sum_a \varepsilon_a = \frac{3}{2}T\sum_a n_a + \frac{1}{2}\upsilon^2\sum_a m_a n_a, \quad (5)$$

где $\pi_n$, $\varepsilon$ – полная плотность импульса и полная плотность энергии системы. В пространственно-однородном случае величины $\upsilon_n$, $T$ будут описывать равновесное состояние системы.

Нами изучается релаксация вблизи своего завершения, то есть мы считаем малыми отклонения скоростей и температур электронов от равновесных значений:

$$u_n = \upsilon_{en} - \upsilon_n, \quad \tau = T_e - T; \quad u_n, \tau \sim \mu \ll 1. \quad (6)$$

Из (4)–(6) можно показать, что отклонения температуры и скорости ионов от равновесных значений соответственно равны

$$\delta\upsilon_{in} = \upsilon_{in} - \upsilon_n = -\frac{m_e n_e}{m_i n_i} u_n, \qquad \delta T_i = T_i - T = -\frac{n_e}{n_i}\tau + O\left(\mu^2\right). \tag{7}$$

Как видно отсюда, температуры и скорости компонент выражаются через параметры $u_n$, $\tau$, $\upsilon_n$, $T$. Как известно [3], параметрами сокращенного описания для двухкомпонентных систем являются скорости и температуры компонент, а также плотности числа частиц компонент. Следовательно, мы можем использовать как параметры сокращенного описания следующие величины $\xi_\mu(\vec{x},t)$: $n_e\left(\vec{x},t\right)$, $n_i\left(\vec{x},t\right)$, $T\left(\vec{x},t\right)$, $\upsilon_n\left(\vec{x},t\right)$, $u_n\left(\vec{x},t\right)$, $\tau\left(\vec{x},t\right)$. Соответственно, функциональная гипотеза [3] перепишется:

$$f_{ap}(\vec{x},t) \underset{t \gg \tau_0}{\rightarrow} f_{ap}(\vec{x},\xi(t)), \tag{8}$$

где $\tau_0$ – некоторое время, такое что $\tau_0 << \tau_V, \tau_T$; $\tau_V$ – время релаксации скорости, $\tau_T$ – время релаксации температуры.

Будем считать зависимость параметров сокращенного описания от координат слабой, то есть их градиенты будем считать малыми:

$$\frac{\partial T}{\partial x_n} \sim \frac{\partial n_a}{\partial x_n} \sim \frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_n} \sim g, \qquad \frac{\partial \tau}{\partial x_n} \sim \frac{\partial u_l}{\partial x_n} \sim g\mu; \qquad g << 1. \tag{9}$$

Вклады в некоторую величину $A$ при разложении по степеням $g$, $\mu$ будем обозначать следующим образом: $A^{(m,n)} \sim \mu^m g^n$. В итоговых выражениях дополнительно будем учитывать, что отношение масс электронов и ионов мало:

$$\sigma = \left(m_e/m_i\right)^{1/2} << 1. \tag{10}$$

Функциональная гипотеза (8) показывает, что уравнения гидродинамики имеют структуру

$$\frac{\partial \xi_\mu}{\partial t} = L_\mu\left(x, f\left(\xi\left(t\right)\right)\right),$$

где функционалы $L_\mu(\vec{x}, f)$ известны. При этом кинетическое уравнение (1) дает следующее уравнение для функции $f_{ap}(\vec{x},\xi)$

$$\sum_\mu \int d^3x' \frac{\delta f_{ap}\left(x,\xi\right)}{\delta \xi_\mu\left(x'\right)} L_\mu\left(x', f\left(\xi\right)\right) = -\frac{p_n}{m_a}\frac{\partial f_{ap}\left(x,\xi\right)}{\partial x_n} + I_{ap}\left(f\right). \tag{11}$$

**Функции распределения для однородного случая и завершенной релаксации.** Как известно [3], в случае, когда релаксация скоростей и температур завершена и плазма пространственно-однородна, функции распределения компонент – максвелловские с температурой $T$ и скоростью системы $\upsilon_n$:

$$f_{ap}^{(0,0)} = w_{a,p-m_a\upsilon}, \qquad w_{ap} \equiv \frac{n_a}{\left(2\pi m_a T\right)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_{ap}}{T}\right). \tag{12}$$

**Результаты для однородного случая.** Для пространственно-однородного случая широко известны следующие результаты для функций распределения компонент [1, 2]:

$$f_{ep}^{(1,0)} = w_{e,p-m_e\upsilon}\, \beta \left[ -\left(\frac{3}{2} - \beta\varepsilon_{ep}\right)\tau + p_n u_n \right]_{p\to p-m_e\upsilon}, \tag{13}$$

$$f_{ip}^{(1,0)} = w_{i,p-m_i\upsilon} \frac{n_e}{n_i} \beta \left[ \left(\frac{3}{2} - \beta\varepsilon_{ip}\right)\tau - \sigma^2 p_n u_n \right]_{p\to p-m_i\upsilon}, \tag{14}$$

где $\beta \equiv 1/T$. В этом приближении, которое можно назвать приближением Ландау, временные уравнения для параметров $\tau$ и $u_n$ имеют вид

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)^{(1,0)} = -\lambda_T \tau, \qquad \left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^{(1,0)} = -\lambda_\upsilon u_n,$$

где константы релаксации $\lambda_T$, $\lambda_\upsilon$ даются формулами [1,2]:

$$\lambda_T = \frac{2^{7/2} z^2 e^4 L\sqrt{\pi}}{3T^{3/2}\sqrt{m_e}} \left(n_i + n_e\right)\sigma^2, \tag{15}$$

$$\lambda_u = \frac{2^{5/2} z^2 e^4 L\sqrt{\pi}}{3T^{3/2}\sqrt{m_e}} n_i. \tag{16}$$

Несмотря на то, что к этим результатам можно найти поправки более высоких порядков по $\sigma$ [7, 8], для простоты именно выражения (13) – (16) используются далее.

**Уравнения гидродинамики.** Уравнения гидродинамики – это уравнения, связывающие производные по времени от параметров сокращенного описания с их производными по координатам. Важность их для поиска функций распределения очевидна из (11).

Из (1) и (4) следует, что

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{\partial n_a \upsilon_{an}}{\partial x_n}, \qquad \frac{\partial \pi_{an}}{\partial t} = -\frac{\partial t_{anl}}{\partial x_l} + R_{an}, \qquad \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial t} = -\frac{\partial q_{an}}{\partial x_n} + Q_a, \tag{17}$$

где в правых частях стоят потоки энергии и импульса компонент:

$$q_{an} = \int d^3p \frac{p^2}{2m_a} \frac{p_n}{m_a} f_{ap}, \qquad t_{anl} \equiv \int d^3p \frac{p_n p_l}{m_a} f_{ap} \tag{18}$$

и источники энергии и импульса компонент:

$$Q_a = \int d^3 p \frac{p^2}{2m_a} I_{ap}(f), \qquad R_{an} = \int d^3 p p_n I_{ap}(f). \tag{19}$$

Из (4) – (6), (12) – (14) и (17) – (19) несложно получить уравнения гидродинамики для неоднородного случая, когда температуры и скорости компонент уже выровнялись:

$$\left(\frac{\partial n_a}{\partial t}\right)^{(0,1)} = -\upsilon_n \frac{\partial n_a}{\partial x_n} - n_a \frac{\partial \upsilon_n}{\partial x_n}, \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^{(0,1)} = -\upsilon_n \frac{\partial T}{\partial x_n} - \frac{2}{3} T \frac{\partial \upsilon_n}{\partial x_n},$$

$$\left(\frac{\partial \upsilon_n}{\partial t}\right)^{(0,1)} = -\frac{T}{m_i(n_i + n_e\sigma^2)} \sum_a \frac{\partial n_a}{\partial x_n} - \frac{n_i + n_e}{m_i(n_i + n_e\sigma^2)} \frac{\partial T}{\partial x_n} - \upsilon_l \frac{\partial \upsilon_n}{\partial x_l}, \tag{20}$$

и для случая, когда релаксация еще не завершена:

$$\left(\frac{\partial \upsilon_n}{\partial t}\right)^{(1,1)} = 0, \qquad \left(\frac{\partial n_e}{\partial t}\right)^{(1,1)} = -n_e \frac{\partial u_n}{\partial x_n} - u_n \frac{\partial n_e}{\partial x_n},$$

$$\left(\frac{\partial n_i}{\partial t}\right)^{(1,1)} = \sigma^2 \left( n_e \frac{\partial u_n}{\partial x_n} + u_n \frac{\partial n_e}{\partial x_n} \right),$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^{(1,1)} = \frac{-5\left(1-\sigma^2\right)}{3\left(n_e + n_i\right)} u_n n_e \frac{\partial T}{\partial x_n} - \frac{2\left(1-\sigma^2\right)}{3\left(n_e + n_i\right)} T u_n \frac{\partial n_e}{\partial x_n} - \frac{2\left(1-\sigma^2\right)}{3\left(n_e + n_i\right)} T n_e \frac{\partial u_n}{\partial x_n},$$

$$\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^{(1,1)} = \frac{1}{m_e n_e} \left( -\frac{\partial n_e \tau}{\partial x_n} - m_e n_e u_l \frac{\partial \upsilon_n}{\partial x_l} - m_e n_e \upsilon_l \frac{\partial u_n}{\partial x_l} + R_{en}^{(1,1)} \right),$$

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)^{(1,1)} = \frac{2}{3n_e} \left( -\frac{3}{2} u_n n_e \frac{\partial T}{\partial x_n} - T n_e \frac{\partial u_n}{\partial x_n} - \frac{3}{2} \upsilon_n n_e \frac{\partial \tau}{\partial x_n} - \tau n_e \frac{\partial \upsilon_n}{\partial x_n} \right) +$$

$$+ \frac{2}{3n_e} \left( Q_e^{(1,1)} - \upsilon_n R_{en}^{(1,1)} - u_n R_{en}^{(0,1)} \right) +$$

$$+ \frac{5\left(1-\sigma^2\right)}{3\left(n_e + n_i\right)} u_n n_e \frac{\partial T}{\partial x_n} + \frac{2\left(1-\sigma^2\right)}{3\left(n_e + n_i\right)} T u_n \frac{\partial n_e}{\partial x_n} + \frac{2\left(1-\sigma^2\right)}{3\left(n_e + n_i\right)} T n_e \frac{\partial u_n}{\partial x_n}. \tag{21}$$

Также из очевидного факта, что $\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^{(0,1)} = 0$, следует:

$$R_{en}^{(0,1)} = \frac{T}{\sigma^2 n_e + n_i} \left( n_i \frac{\partial n_e}{\partial x_n} - \sigma^2 n_e \frac{\partial n_i}{\partial x_n} \right) + \frac{\partial T}{\partial x_n} n_e n_i \frac{1-\sigma^2}{\sigma^2 n_e + n_i}. \tag{22}$$

Величины $Q_e^{(1,1)}$ и $R_{en}^{(1,1)}$ выражаются через функции распределения $f_{ap}^{(1,1)} \sim g^1 \mu^1$, найденные ниже, но здесь не приводятся в силу их громоздкости.

**Однотемпературная и односкоростная гидродинамика.** В этом разделе рассматривается случай завершенной релаксации скоростей и температур компонент в пространственно-неоднородной плазме. Будем учитывать только первый порядок малости по градиентам. Функция распределения в таком случае ищется в виде:

$$f_{ap}^{(0,1)} = w_{a,p-m_a\upsilon}\left[ p_n \sum_b \frac{\partial n_b}{\partial x_n} A_a^{N_b}\left(\beta\varepsilon_{ap}\right) + \frac{\partial T}{\partial x_n} p_n A_a^T\left(\beta\varepsilon_{ap}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \upsilon_n}{\partial x_l}(p_l p_n - \frac{1}{3}\delta_{nl} p^2) A_a^{\upsilon}\left(\beta\varepsilon_{ap}\right)\right]_{p\to p-m_a\upsilon}, \qquad (24)$$

где функции при градиентах являются разложениями по полиномам Сонина:

$$A_a^{N_b}\left(\beta\varepsilon_{ap}\right) = \sum_{s=0}^{\infty} g_{as}^{N_b} S_s^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ap}\right),\ A_a^T\left(\beta\varepsilon_{ap}\right) = \sum_{s=0}^{\infty} g_{as}^{T} S_s^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ap}\right),$$

$$A_a^{\upsilon}\left(\beta\varepsilon_{ap}\right) = \sum_{s=0}^{\infty} g_{as}^{\upsilon} S_s^{5/2}\left(\beta\varepsilon_{ap}\right); \qquad (25)$$

явный вид полиномов Сонина [9]:

$$S_n^{\alpha}\left(x\right) \equiv \frac{1}{n!} e^x x^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x} x^{\alpha+n}\right). \qquad (26)$$

Как известно, полиномы Сонина обладают свойством ортогональности [9]:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} S_n^{\alpha}\left(x\right) S_{n'}^{\alpha}\left(x\right) dx = \frac{\Gamma\left(n+\alpha+1\right)}{n!}\delta_{nn'}. \qquad (27)$$

Дополнительными условиями к кинетическому уравнению являются в этом случае выражения (5). Из (5), (24), (25), (27) следует, что

$$\sum_a m_a n_a g_{a0}^T = 0, \sum_a m_a n_a g_{a0}^{N_e} = 0, \ \sum_a m_a n_a g_{a0}^{N_i} = 0. \qquad (28)$$

Также из (24), (25), (27) и (18) несложно показать, что потоки частиц $j_{an} = \pi_{an} / m_a$, их энергии и импульса в локально-сопутствующей системе отсчета, где $\upsilon_n = 0$, даются точными формулами

$$\overset{0}{\pi}{}_{an}^{(0,1)} = n_a m_a T\left[\frac{\partial n_e}{\partial x_n} g_{a0}^{N_e} + \frac{\partial n_i}{\partial x_n} g_{a0}^{N_i} + \frac{\partial T}{\partial x_n} g_{a0}^T\right],$$

$$\overset{0}{q}{}_{an}^{(0,1)} = \frac{5}{2} n_a T^2\left[\sum_b\left(g_{a0}^{N_b} - g_{a1}^{N_b}\right)\frac{\partial n_b}{\partial x_n} + \left(g_{a0}^T - g_{a1}^T\right)\frac{\partial T}{\partial x_l}\right],$$

$$\overset{0}{t}{}_{anl}^{(0,1)} = n_a g_{a0}^{\upsilon} m_a T^2\left[\frac{\partial \upsilon_n}{\partial x_l} + \frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_n} - \frac{2}{3}\frac{\partial \upsilon_m}{\partial x_m}\delta_{nl}\right]. \qquad (29)$$

Как видим, выбор полиномов Сонина весьма удобен, ибо в дополнительные условия и в потоки входят только лишь первые два коэффициента разложения функций $A_a^{N_b}$, $A_a^T$ и только один коэффициент разложения функции $A_a^{\upsilon}$.

Как известно [3], кинетическое уравнение сводится к бесконечной линейной системе на коэффициенты разложения при полиномах Сонина, и в силу невозможности решения бесконечной системы разложения обрывают на конечном числе полиномов.

Кинетические коэффициенты [4] являются коэффициентами пропорциональности между потоками и градиентами. Так как в потоки входят только первые два коэффициента разложения функций $A_a^{N_b}$, $A_a^T$ и только один коэффициент разложения функции $A_a^{\upsilon}$, то функции $A_a^{N_b}$, $A_a^T$ будем искать в приближении двух полиномов, а функцию $A_a^{\upsilon}$ – в приближении одного полинома.

Несложно проверить, что

$$I_{ap}^{(0,0)} = I_{ap}(w) = 0 . \qquad (30)$$

($I^{(m,n)} \equiv I(f(\xi))^{(m,n)}$). В рассматриваемом нами приближении вклад в интеграл столкновений имеет следующий вид:

$$I_{ap}^{(0,1)} = \sum_b \int d^3 p' M_{ab}(p, p') f_{bp'}^{(0,1)} , \qquad (31)$$

где

$$M_{ab}(p, p') = \left. \frac{\delta I_{ap}(f)}{\delta f_{bp'}} \right|_{f=w} . \qquad (32)$$

Введем величину $K_{ab}(p, p')$ следующим образом:

$$K_{ab}(p, p') w_{ap} = -M_{ab}(p, p') w_{bp'} . \qquad (33)$$

Из (20), (24), (11), (31) – (33) получаем следующую систему на функции $A_a^{N_b}$, $A_a^T$, $A_a^{\upsilon}$:

$$p_n \left\{ \frac{1}{n_a m_a} \delta_{ab} - \frac{1}{\sum_c m_c n_c} \right\} = -\sum_c \int d^3 p' K_{ab}(p, p') p'_n A_b^{N_c}(\beta \varepsilon_{bp'}) ,$$

$$\beta p_n \left\{ \frac{1}{m_a} \left[ \beta \varepsilon_{ap} - \frac{3}{2} \right] - \frac{n_i + n_e}{m_i (n_i + n_e \sigma^2)} \right\} = -\sum_b \int d^3 p' K_{ab}(p, p') p'_n A_b^T(\beta \varepsilon_{bp'}) ,$$

$$\frac{\beta}{m_a} \left\{ p_l p_n - \frac{1}{3} \delta_{nl} p^2 \right\} = -\sum_b \int d^3 p' K_{ab}(p, p') (p'_l p'_n - \frac{1}{3} \delta_{ln} p'^2) A_b^{\upsilon}(\beta \varepsilon_{bp'}) . \qquad (34)$$

Путем несложных преобразований система (34) сводится к следующей линейной системе на коэффициенты разложения искомых функций по полиномам:

$$Y_{ak} = -\sum_{n=0}^{1}\sum_{b} g_{bn}^{T} G_{ak,bn}\,, \qquad \frac{3n_i T}{n_i + n_e\sigma^2}\delta_{k0} = -\sum_{n=0}^{1}\sum_{b} g_{bn}^{N_e} G_{ek,bn}\,,$$

$$\frac{3n_e T\sigma^2}{n_i + n_e\sigma^2}\delta_{k0} = \sum_{n=0}^{1}\sum_{b} g_{bn}^{N_i} G_{ek,bn}\,, \qquad \frac{3n_e T\sigma^2}{n_i + n_e\sigma^2}\delta_{k0} = -\sum_{n=0}^{1}\sum_{b} g_{bn}^{N_i} G_{ik,bn}\,,$$

$$\frac{3n_i T}{n_i + n_e\sigma^2}\delta_{k0} = \sum_{n=0}^{1}\sum_{b} g_{bn}^{N_e} G_{ik,bn}\,, \qquad 10\, n_a m_a T = -\sum_{b} g_{b0}^{\upsilon} H_{a0,b0}\,, \qquad (35)$$

где $k = 0,1$;

$$Y_{e0} = -Y_{i0} = 3n_e n_i \frac{1-\sigma^2}{n_i + n_e\sigma^2}\,, \qquad Y_{a1} = -\frac{15}{2} n_a\,; \qquad (36)$$

а $G_{ak,bn}$, $H_{ak,bn}$ – некоторые интегральные скобки. По определению [10], интегральная скобка дается формулой

$$\{g,h\}_{ab} \equiv \int\int d^3p d^3p' g(p) K_{ab}(p,p') w_{ap} h(p'). \qquad (37)$$

Величины $G_{ak,bn}$ и $H_{ak,bn}$ были введены следующим образом:

$$G_{ak,bn} \equiv \left\{ p_m S_k^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ap}\right), p_m S_n^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{bp}\right)\right\},$$

$$H_{ak,bn} = \left\{\left(p_{al}p_{an} - \frac{1}{3}\delta_{nl}p_a{}^2\right) S_k^{5/2}\left(\beta\varepsilon_{ap}\right), \left(p_{bl}p_{bn} - \frac{1}{3}\delta_{nl}p_b{}^2\right) S_k^{5/2}\left(\beta\varepsilon_{bp}\right)\right\}_{ab}. \qquad (38)$$

Из (2), (3), (10), (31) – (33), (37), (38) можно посчитать величины $G_{ak,bn}$, $H_{ak,bn}$ в теории возмущений по $\sigma$:

$$G_{e0,e0} = G_{i0,i0} = -G_{e0,i0} = -G_{i0,e0} = 4z^2e^4 L n_e n_i \sqrt{\frac{2m_e\pi}{T}} + O\left(\sigma^2\right),$$

$$G_{e0,e1} = G_{e1,e0} = -G_{i0,e1} = -G_{e1,i0} = 6z^2e^4 L n_e n_i \sqrt{\frac{2\pi m_e}{T}} + O\left(\sigma^2\right),$$

$$G_{i0,i1} = G_{i1,i0} = -G_{e0,i1} = -G_{i1,e0} = O\left(\sigma^4\right),$$

$$G_{e1,e1} = 8e^4 L n_e^2 \sqrt{\frac{\pi m_e}{T}} + 13z^2e^4 L n_e n_i \sqrt{\frac{2\pi m_e}{T}} + O\left(\sigma^2\right),$$

$$G_{i1,i1} = 8\pi z^4 e^4 L n_i^2 \sqrt{\frac{m_i}{\pi T}} + 30z^2e^4 L n_e n_i \sqrt{\frac{2m_e\pi}{T}} + O\left(\sigma^2\right),$$

$$G_{e1,i1} = G_{i1,e1} = 2z^2 e^4 L n_e n_i \sqrt{\frac{2\pi m_e}{T}} + O\left(\sigma^2\right),$$

$$H_{e0,e0} = 16 e^4 L n_e{}^2 m_e \sqrt{\pi m_e T} + 16 z^2 e^4 L n_e n_i m_e \sqrt{2\pi m_e T} + O\left(\sigma^2\right),$$

$$H_{i0,i0} = 16 z^4 e^4 L n_e{}^2 m_e \sqrt{\pi m_e T}\sigma^{-3} + \frac{80}{3} z^2 e^4 L n_e n_i m_e \sqrt{2 m_e \pi T}\sigma^{-2} + O\left(\sigma^0\right),$$

$$H_{e0,i0} = H_{i0,e0} = -\frac{32}{3} z^2 e^4 L n_e n_i m_e \sqrt{2 m_e \pi T} + O\left(\sigma^2\right). \tag{39}$$

Из (28), (35), (36), (39) получаем коэффициенты при полиномах в теории возмущений по $\sigma$:

$$g_{e0}^{T} = -3\frac{\sqrt{2}n_e + 7z^2 n_i}{4z^2 e^4 L n_i\left(\sqrt{2}\, n_e + z^2 n_i\right)}\sqrt{\frac{T}{2m_e\pi}} + O(\sigma),$$

$$g_{e1}^{T} = \frac{3}{\sqrt{2}n_e + z^2 n_i}\frac{1}{e^4 L}\sqrt{\frac{T}{2m_e\pi}} + O(\sigma),$$

$$g_{i1}^{T} = \frac{15\sqrt{2}n_e + 15z^2 n_i - 12z^2 n_e}{16\pi z^4 n_i^2\left(\sqrt{2}n_e + z^2 n_i\right)} n_i \frac{1}{e^4 L}\sqrt{\frac{\pi T}{m_e}}\sigma + O\left(\sigma^2\right),$$

$$g_{i0}^{T} = 3\frac{n_e}{n_i}\frac{\sqrt{2}n_e + 7z^2 n_i}{4z^2 e^4 L n_i\left(\sqrt{2}n_e + z^2 n_i\right)}\sqrt{\frac{T}{2m_e\pi}}\sigma^2 + O\left(\sigma^3\right),$$

$$g_{e0}^{N_e} = -\frac{1}{16}\frac{3T\left(4\sqrt{2}n_e + 13z^2 n_i\right)}{z^4 n_i{}^2 n_e + \sqrt{2}z^2 n_i n_e{}^2}\frac{1}{e^4 L}\sqrt{\frac{T}{2m_e\pi}} + O(\sigma),$$

$$g_{e1}^{N_e} = \frac{1}{8}\frac{9T}{z^2 n_i n_e + \sqrt{2}n_e{}^2}\frac{1}{e^4 L}\sqrt{\frac{T}{2m_e\pi}} + O(\sigma),$$

$$g_{i1}^{N_e} = -\frac{1}{32}\frac{9T}{z^2 n_i + \sqrt{2}n_e}\frac{1}{e^4 L}\frac{1}{z^2 n_i}\sqrt{\frac{T}{\pi m_e}}\sigma + O\left(\sigma^2\right),$$

$$g_{i0}^{N_e} = \frac{1}{16}\frac{n_e}{n_i}\frac{3T\left(4\sqrt{2}n_e + 13z^2 n_i\right)}{z^4 n_i{}^2 n_e + \sqrt{2}z^2 n_i n_e{}^2}\frac{1}{e^4 L}\sqrt{\frac{T}{2m_e\pi}}\sigma^2 + O\left(\sigma^3\right),$$

$$g_{e0}^{N_i}=\frac{1}{16}\frac{3T\left(4\sqrt{2}n_e+13z^2n_i\right)}{z^4n_i^2n_e+\sqrt{2}z^2n_in_e^2}\frac{1}{e^4L}\sqrt{\frac{T}{2m_e\pi}}\frac{n_e}{n_i}\sigma^2+O\left(\sigma^3\right),$$

$$g_{e1}^{N_i}=-\frac{1}{8}\frac{n_e}{n_i}\frac{9T}{z^2n_in_e+\sqrt{2}n_e^2}\frac{1}{e^4L}\sqrt{\frac{T}{2m_e\pi}}\sigma^2+O\left(\sigma^3\right),$$

$$g_{i1}^{N_i}=\frac{1}{32}\frac{n_e}{n_i}\frac{9T}{z^2n_i+\sqrt{2}n_e}\frac{1}{e^4L}\frac{1}{z^2n_i}\sqrt{\frac{T}{\pi m_e}}\sigma^3+O\left(\sigma^4\right),$$

$$g_{i0}^{N_i}=-\frac{1}{16}\frac{3T\left(4\sqrt{2}n_e+13z^2n_i\right)}{z^4n_i^2n_e+\sqrt{2}z^2n_in_e^2}\frac{1}{e^4L}\sqrt{\frac{T}{2m_e\pi}}\left(\frac{n_e}{n_i}\right)^2\sigma^4+O\left(\sigma^5\right),$$

$$g_{e0}^{\upsilon}=-\frac{5T}{8e^4L\sqrt{m_e\pi T}\left(n_e+\sqrt{2}n_iz^2\right)}+O\left(\sigma\right),$$

$$g_{i0}^{\upsilon}=-\frac{5\sqrt{T}}{8z^4e^4Ln_i\sqrt{\pi m_e}}\sigma+O\left(\sigma^2\right). \qquad (40)$$

Согласно [4], вводятся определения кинетических коэффициентов: сдвиговой $\eta$ и объемной $\zeta$ вязкости:

$$\overset{0}{t}{}_{nl}^{(0,1)}=\sum_a\overset{0}{t}{}_{anl}^{(0,1)}=-\eta\left(\frac{\partial\upsilon_n}{\partial x_l}+\frac{\partial\upsilon_l}{\partial x_n}-\frac{2}{3}\delta_{nl}\frac{\partial\upsilon_m}{\partial x_m}\right)-\zeta\delta_{nl}\frac{\partial\upsilon_m}{\partial x_m}; \qquad (41)$$

коэффициентов диффузии $D_{ab}^T$ и термодиффузии $D_a^T$:

$$\overset{0}{\pi}{}_{an}^{(0,1)}\equiv-D_a^T\frac{\partial\ln T}{\partial x_n}-\frac{\left(n_e+n_i\right)^2m_e}{n_i+\sigma^2n_e}D_{ab}d_n, \qquad (42)$$

где

$$d_n=\frac{n_en_i}{(n_i+n_e\sigma^2)(n_e+n_i)}\left[(1-\sigma^2)\frac{\partial\ln T}{\partial x_n}+\frac{\partial\ln n_e}{\partial x_n}-\sigma^2\frac{\partial\ln n_i}{\partial x_n}\right]; \qquad (43)$$

коэффициента теплопроводности $\lambda$ и кинетического коэффициента $\xi$:

$$\overset{0}{q}{}_n^{(0,1)}=\sum_a\overset{0}{q}{}_{an}^{(0,1)}=-\lambda\frac{\partial T}{\partial x_n}+\frac{\xi T}{D_{ei}}\frac{5}{2}n_eT^2\,\overset{0}{\pi}{}_{en}^{(0,1)}+\frac{5T}{2}\frac{1-\sigma^2}{m_e}\overset{0}{\pi}{}_{en}^{(0,1)}, \qquad (44)$$

Из (29), (40) – (44) получаем выражения для кинетических коэффициентов:

$$D_e^T=-D_i^T=\frac{45}{16}n_em_e\frac{T^2}{\left(z^2n_i+\sqrt{2}n_e\right)}\frac{1}{e^4L}\sqrt{\frac{T}{2m_e\pi}}+O\left(\sigma\right),$$

$$D_{ei}=-D_{ie}=\frac{1}{16}\frac{1}{n_i+n_e}\frac{3T^2\left(4\sqrt{2}n_e+13z^2n_i\right)}{z^4\left(n_i+\sqrt{2}z^2n_e\right)}\frac{1}{e^4L}\sqrt{\frac{T}{2m_e\pi}}+O(\sigma),$$

$$\lambda=\frac{75}{4}\frac{1}{\left(4\sqrt{2}n_e+13z^2n_i\right)}\frac{n_eT^2}{e^4L}\sqrt{\frac{T}{2m_e\pi}}+O(\sigma),$$

$$\eta=\frac{5\sqrt{m_e}T^2\sqrt{T}}{8z^4e^4L\sqrt{\pi}}\sigma^{-1}+O\left(\sigma^0\right),\qquad \zeta=0,$$

$$\xi=\frac{9}{8}\frac{9n_i}{z^2\left(n_i+\sqrt{2}n_e\right)\left(n_e+n_i\right)m_e}\frac{n_i}{n_e}\frac{1}{e^4L}\sqrt{\frac{T}{2m_e\pi}}+O(\sigma). \qquad (45)$$

**Релаксационные поправки к потокам.** В этом разделе изучается случай, когда релаксация скоростей и температур еще не завершена. Анализируется влияние релаксационных поправок на теорию, изложенную в предыдущем разделе. Для нахождения поправок к потокам необходимо построить теорию в первом порядке малости по $\mu$ и по $g$ методом, аналогичным тому, который применялся в предыдущем разделе.

Функцию распределения $f_{ap}^{(1,1)}$ ищем в виде

$$f_{ap}^{(1,1)}=w_{a,p-m_a\upsilon}\left[u_n\left(A_{anl}^{uT}(\vec{p})\frac{\partial T}{\partial x_l}+A_{ankl}^{u\upsilon}(\vec{p})\frac{\partial\upsilon_k}{\partial x_l}+\sum_b A_{anl}^{uN_b}(\vec{p})\frac{\partial n_b}{\partial x_l}\right)+\right.$$

$$+\tau\left(A_{an}^{\tau T}(\vec{p})\frac{\partial T}{\partial x_n}+A_{anl}^{\tau\upsilon}(\vec{p})\frac{\partial\upsilon_k}{\partial x_l}+\sum_b A_{an}^{\tau N_b}(\vec{p})\frac{\partial n_b}{\partial x_n}\right)+$$

$$\left.+\left(B_{anl}^{u}(\vec{p})\frac{\partial u_n}{\partial x_l}+B_{an}^{\tau}(\vec{p})\frac{\partial\tau}{\partial x_n}\right)\right]_{p\to p-m_a\upsilon}, \qquad (46)$$

где

$$A_{anl}^{uT}(\vec{p})=\left(p_np_l-\frac{1}{3}p^2\delta_{nl}\right)\sum_{s=0}^{\infty}g_{as}^{uT}S_s^{5/2}\left(\beta\varepsilon_{ap}\right),$$

$$A_{anl}^{uN_b}(\vec{p})=\left(p_np_l-\frac{1}{3}p^2\delta_{nl}\right)\sum_{s=0}^{\infty}g_{as}^{uN_b}S_s^{5/2}\left(\beta\varepsilon_{ap}\right),$$

$$B_{anl}^{u}(\vec{p})=\left(p_np_l-\frac{1}{3}p^2\delta_{nl}\right)\sum_{s=0}^{\infty}g_{as}^{u}S_s^{5/2}\left(\beta\varepsilon_{ap}\right),$$

$$A_{ankl}^{u\upsilon}(\vec{p})=\left[p_np_lp_k-\frac{1}{5}p^2\left\{p_n\delta_{kl}+p_l\delta_{nk}+p_k\delta_{nl}\right\}\right]\sum_{s=0}^{\infty}g_{as}^{u\upsilon}S_s^{5/2}\left(\beta\varepsilon_{ap}\right),$$

$$A_{an}^{\tau T}\left(\vec{p}\right)=p_n\sum_{s=0}^{\infty}g_{as}^{\tau T}S_s^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ap}\right),\ A_{an}^{\tau N_b}\left(\vec{p}\right)=p_n\sum_{s=0}^{\infty}g_{as}^{\tau N_b}S_s^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ap}\right),$$

$$B_{an}^{\tau}\left(\vec{p}\right)=p_n\sum_{s=0}^{\infty}g_{as}^{\tau}S_s^{3/2}\left(\beta\varepsilon_{ap}\right),$$

$$A_{anl}^{\tau\upsilon}\left(\vec{p}\right)=\left(p_n p_l-\frac{1}{3}p^2\delta_{nl}\right)\sum_{s=0}^{\infty}g_{as}^{\tau\upsilon}S_s^{5/2}\left(\beta\varepsilon_{ap}\right). \tag{47}$$

Дополнительными условиями на кинетическое уравнение будут выражения (4).

Следствием (4) и (47) является:

$$g_{a0}^{\tau T}=0\,,\ g_{a0}^{\tau N_b}=0\,,\ g_{a0}^{\tau}=0\,. \tag{48}$$

Из (4), (18), (46) – (48) можно показать, что потоки в первом порядке малости по $u,\tau$ и по градиентам выражаются только через коэффициенты $g_{a1}^{\tau T}$, $g_{a1}^{\tau N_e}$, $g_{a1}^{\tau N_i}$, $g_{a1}^{\tau}$, $g_{a0}^{uT}$, $g_{a0}^{uN_e}$, $g_{a0}^{uN_i}$, $g_{a0}^{u}$, $g_{a0}^{\tau\upsilon}$, откуда видно, что мы можем искать неизвестные функции из (46) в приближении одного полинома. Сами выражения в общем случае тут не выписаны вследствие своей громоздкости.

Используя (13) – (16), (21), (22), а также результаты, полученные в предыдущем разделе, и метод, в нем примененный, можно получить коэффициенты при полиномах из (47) в теории возмущений по $\sigma$, не все из которых в виду их громоздкости приводятся в статье.

Используя выражения для потоков и коэффициенты при полинмах, получаем:

$$\overset{0}{t}{}_{nj}^{(1,1)}=\frac{m_e T^2\left(10n_i+15n_e\right)}{16z^4e^4Ln_i\sqrt{m_e\pi T}}\tau\left[\frac{\partial\upsilon_n}{\partial x_j}+\frac{\partial\upsilon_j}{\partial x_n}-\frac{2}{3}\delta_{nj}\frac{\partial\upsilon_l}{\partial x_l}\right]\sigma^{-1}+O\left(\sigma^0\right),$$

$$\overset{0}{q}{}_{n}^{(1,1)}=-\frac{5}{2}n_eT^2\left[g_{e1}^{\tau T(0)}\tau\frac{\partial T}{\partial x_n}+g_{e1}^{\tau N_e(0)}\tau\frac{\partial n_e}{\partial x_n}+g_{e1}^{\tau(0)}\frac{\partial\tau}{\partial x_n}\right]+O\left(\sigma\right),\quad \overset{0}{\pi}{}_{an}^{(1,1)}=0\,, \tag{49}$$

где

$$g_{e1}^{\tau T(0)}=\frac{1}{\left(8n_e+13z^2n_i\sqrt{2}\right)}\left(15+6n_e\frac{\sqrt{2}n_e+7z^2n_i}{z^2n_i\left(2n_e+\sqrt{2}z^2n_i\right)}\right)\frac{1}{e^4L}\sqrt{\frac{1}{\pi Tm_e}}\,,$$

$$g_{e1}^{\tau N_e(0)}=\frac{1}{n_e\left(8n_e+13\sqrt{2}z^2n_i\right)}\left(\frac{15}{2}+\frac{n_e}{2n_i}\frac{3\left(4\sqrt{2}n_e+13z^2n_i\right)}{\sqrt{2}z^4n_i+2z^2n_e}\right)\frac{1}{e^4L}\sqrt{\frac{T}{\pi m_e}}\,,$$

$$g_{e1}^{\tau(0)}=\frac{15}{2\left(4\sqrt{2}n_e+13z^2n_i\right)}\frac{1}{e^4L}\sqrt{\frac{T}{2\pi m_e}}\,. \tag{50}$$

В теории первого порядка малости по градиентам потоки и плотность импульса записываются следующим образом:

$$\overset{0}{\pi}_{an} = \overset{0}{\pi}{}^{(0,1)}_{an} + \overset{0}{\pi}{}^{(1,1)}_{an} + O\left(\mu^2 g^1\right), \qquad \overset{0}{q}_{an} = \overset{0}{q}{}^{(0,1)}_{an} + \overset{0}{q}{}^{(1,1)}_{an} + O\left(\mu^2 g^1\right),$$

$$\overset{0}{t}_{anl} = \overset{0}{t}{}^{(0,1)}_{anl} + \overset{0}{t}{}^{(1,1)}_{anl} + O\left(\mu^2 g^1\right). \qquad (51)$$

Первые слагаемые в правых частях (51) – полученные в (29) и (40) потоки в случае завершенной релаксации. Вторые слагаемые в правых частях (51), главный порядок которых по отношению масс выписан в (49) – релаксационные поправки к потокам, имеющие место, когда релаксация скоростей и температур компонент еще не завершена. Заметим, что в (49) не входит ни $u_n$, ни ее производные по координатам, что является еще одним аргументом в пользу того, что задача релаксации температур в полностью ионизированной плазме является более важной, чем задача релаксации скоростей (главным же аргументом является то, что температуры выравниваются гораздо медленее скоростей).

**Выводы.** На основе кинетического уравнения Ландау изучена гидродинамика полностью ионизированной электрон-ионной плазмы в отсутствие внешних полей. Получены функции распределения компонент неоднородной плазмы в случае завершенной релаксации температуры и скорости компонент (24), (40), а также вычислены кинетические коэффициенты для этого случая (45). В ситуации, когда релаксация не завершена, получены связанные с релаксацией поправки к потокам энергии и импульса системы в главном порядке по отношению масс (49), которые являются важными для построения кинетических коэффициентов в случае незавершенной релаксации (они строятся из коэффициентов пропорциональности между потоками и градиентами).

1. *Ландау Л. Д.* Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия / *Л. Д. Ландау* // ЖЭТФ. – 1937. – Т.7. – С. 203 – 209.
2. *Александров А. Ф.* Основы электродинамики плазмы / *А. Ф. Александров, Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе.* – М. : Высшая школа, 1988. – 424 с.
3. *Ахиезер А. И.* Методы статистической физики / *А. И. Ахиезер, С. В. Пелетминский.* – М. : Наука. – 1977. – 368 с.
4. *Силин В. П.* Введение в кинетическую теорию газов / *В. П.Силин* – М., 1998. – 329 с.
5. *Брагинский С. И.* Явления переноса в полностью ионизированной двухтемпературной плазме/ *С. И. Брагинский* // ЖЭТФ. – 1957. – Т.33. – С.45 9– 472.
6. *Bobylev A. V.* Relaxation of two-temperature plasma / *A. V. Bobylev, I. F. Potapenko, P. H. Sakanaka* // Phys. Rev. E. – 1997. – V.56, No.2. – P. 2081 – 2093.
7. *Ишимару С.* Основные принципы физики плазмы / *С. Ишимару.* – М. : Атомиздат, 1975. – 287 с.
8. *Горев В. Н.* К релаксации температуры в полностью ионизированной однородной плазме / *В. Н. Горев, А. И. Соколовский* // XV международная молодежная научно-практическая конференция “Человек и Космос”, апрель 2013, Днепропетровск, DVD конференции: сборник тезисов. – Днепропетровск, 2013. – С. 53.
9. *Лифшиц Е. М.* Физическая кинетика / *Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский.* – М. : Наука. – 1979. – 528 с.
10. *Дж. Ферцигер.* Математическая теория процессов переноса в газах / *Дж. Ферцигер, Г. Капер.* – М. : Мир, 1976. – 555 с.

Днепропетровский национальный
университет

Получено 24.06.13,
в окончательном варианте 25.06.13