

ВАРИАНТ ВЕРОЯТНОСТНОЙ ОЦЕНКИ ВРЕМЕНИ ДО РАЗРУШЕНИЯ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Для обоснованного определения времени разрушения построена вероятностная модель длительной прочности конструкционных материалов на основе статистической обработки экспериментальных данных по ползучести и длительной прочности. Получено соотношение, с помощью которого можно определить с заданной вероятностью назначенный ресурс как нижнюю оценку времени до разрушения и тем самым обеспечивать требуемый уровень вероятности неразрушения за счет рационального выбора параметров модели.

Для обґрунтованого визначення часу руйнування побудована ймовірнісна модель тривалої міцності конструкційних матеріалів на основі статистичної обробки експериментальних даних по повзучості й тривалій міцності. Отримане співвідношення, за допомогою якого можна визначити із заданою ймовірністю призначений ресурс як нижню оцінку часу до руйнування й тим самим забезпечувати необхідний рівень ймовірності неруйнування за рахунок раціонального вибору параметрів моделі.

The probability model of long-term strength of structural materials, based on statistical processing the experimental data on creep and long-term strength, is built for a justified determination of failure time. A relation defining intended life as a lower estimation of failure time with a given probability and providing a required level of the probability of no-failure due to a rational selection of the model parameters is found.

Определение достоверных характеристик долговечности конструкционных материалов является одной из важнейших задач современного машиностроения. При этом необходимо учитывать, что для образцов, изготовленных из одной отливки металла, при испытаниях на ползучесть и длительную прочность имеет место большой разброс по времени до разрушения даже в идеальных лабораторных условиях. Поэтому возникла необходимость разработки стохастических моделей ползучести и длительной прочности, которые, с одной стороны, обосновывают вероятностный характер разрушения, а с другой – позволяют с достаточной точностью определять время до разрушения и его возможный разброс. Эта проблема особенно актуальна для определения соответствующих показателей прочности для изделий длительного функционирования, работающих при постоянных нагрузках и высоких температурах, когда проявляется эффект ползучести.

В настоящее время имеется ряд подходов к решению этой задачи. В ряде исследований статистический характер разрушения базируется на позициях теории надежности: так, в работе [1] вводится предположение, что между накопленной деформацией ползучести и вероятностью неразрушения образца существует функциональная зависимость, а в работе [2] предложен метод стохастической линеаризации исходных соотношений ползучести.

В данной работе вероятностная модель разрушения строится на основе статистической обработки результатов известных экспериментов по длительной прочности и применения классических теорий ползучести.

Наиболее полно процесс ползучести конструкционных материалов можно описать с помощью механического уравнения состояния, а также системы кинетических уравнений, которые характеризуют данное состояние [3]. В качестве основной характеристики разрушения в таких моделях используют структурный параметр ω , характеризующий меру поврежденности материала, причём $\omega = 0$ соответствует неповрежденному материалу, а $\omega = 1$ – появлению макроскопической трещины, ведущей к разрушению.

Тогда ползучесть материала вплоть до разрушения можно описать сле-

дующей системой кинетических уравнений:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}(t, \sigma, T, \omega), \quad \dot{\omega} = \dot{\omega}(t, \sigma, T, \omega), \quad (1)$$

где $\dot{\varepsilon}$ – скорость деформации ползучести, t – параметр времени, σ – напряжение, T – температура.

Здесь существенным является то, что зависимости (1) должны определяться из достаточно простых экспериментов и их конкретизация требует наличия большого объема опытных данных по ползучести и длительной прочности, а также привлечения некоторых теоретических соображений.

Для описания процесса ползучести принимаем кинетические уравнения в виде степенных зависимостей:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{a\sigma^n}{(1-\omega)^n}, \quad (2)$$

$$\dot{\omega} = \frac{b\sigma^k}{(1-\omega)^k}, \quad (3)$$

где a , b , n и k – некоторые постоянные материала при фиксированной температуре, требующие оценивания.

Температура в процессе ползучести считается постоянной и предполагается, что структурные изменения с течением времени в материале не происходят.

Пренебрегаем изменением площади поперечного сечения образца вплоть до его разрушения, считая деформации ползучести малыми величинами.

Для построения вероятностной модели разрушения при ползучести в качестве примера рассмотрим эксперименты для образцов из коррозионностойкой стали 12Х18Н10Т при постоянной нагрузке и температуре $T = 850^\circ \text{C}$ для четырех уровней напряжения σ , которые приведены в таблице 1 в столбцах 2 – 5 [4, 5].

В таблице 1 обозначено: $\dot{\varepsilon}_0$ – скорость установившейся ползучести в начальный момент времени, $t_{pэ}$ – экспериментальное время до разрушения, ε_{t_p} – деформация ползучести в момент разрушения образца.

Из уравнения (2), используя метод наименьших квадратов, по данным таблицы 1 для величин $\dot{\varepsilon}_0$ и σ найдем оценки параметров n и a : $\hat{n} = 3,02$; $\hat{a} = 1,33 \cdot 10^{-8}$.

Интегрируя уравнение (3) с учетом начальных условий $\omega(0) = 0$, $\omega(t_p) = 1$, определяем время до разрушения в виде

$$t_p = \frac{1}{b(k+1)\sigma^k}. \quad (4)$$

Используя метод наименьших квадратов, из уравнения (4) получим оценки параметров b и k для экспериментальных значений $t_{pэ}$ и σ :

$$\hat{k} = 3,1; \quad \hat{b} = 5,58 \cdot 10^{-8}.$$

В дальнейшем считаем параметры n и k детерминированными величинами ($n=3,02$; $k=3,1$), а параметры a и b – случайными величинами.

Из формулы (4) получим выборочный вектор

$$\tilde{b} = \frac{1}{t_p(1+k)\sigma^k}. \quad (5)$$

Найдем оценки выборочного среднего и выборочного среднеквадратического отклонения при каждом уровне напряжения для выборочного вектора \tilde{b} , подставляя вместо случайной величины t_p в формулу (5) её экспериментальные значения $t_{pэ}$ из таблицы 1. Результаты соответствующих расчетов приведены в столбцах 6 – 8 таблицы 1.

Проведем анализ полученных значений выборочного вектора \tilde{b} для первых трёх уровней напряжения σ .

В работе [6] показано, что результаты испытаний образцов на длительную прочность соответствуют логнормальному распределению ($\tilde{b} \sim \text{Log}N(\mu, s^2)$). Принимаем, что выборочный вектор \tilde{b} при каждом уровне напряжения также имеет логнормальное распределение.

Плотность распределения случайной величины \tilde{b} определится как

$$f_{\tilde{b}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{xs\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln x - \mu}{s}\right]^2\right\}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \quad (6)$$

где μ , s – параметры логнормального распределения (μ – параметр масштаба, s – параметр формы).

Будем считать, что гипотетическое среднее и гипотетическое среднеквадратическое отклонение выборочного вектора \tilde{b} равны соответственно эмпирическому среднему и эмпирическому среднеквадратическому отклонению ($[\tilde{b}] = [\tilde{b}^*]$, $\sigma_{\tilde{b}} = \sigma_{\tilde{b}^*}$), тогда система уравнений для нахождения параметров распределения запишется в виде:

$$\begin{cases} \exp\left[\mu + \frac{s^2}{2}\right] = [\tilde{b}^*], \\ (\exp[s^2] - 1)\exp[2\mu + s^2] = \sigma_{\tilde{b}^*}^2. \end{cases} \quad (7)$$

Решая систему (7) аналитически для напряжения $\sigma = 39,24$ МПа, найдем параметры распределения $\mu = -16,75$, $s = 0,27$.

Таблица 1

Номер образца	σ , МПа	$\dot{\varepsilon}_0$, час ⁻¹	$t_{p\varepsilon}$, час	ε_{t_p}	$\tilde{b} \cdot 10^8$	Выборочное среднее $[\tilde{b}] \cdot 10^8$	Выборочное средне-квадратическое отклонение $\tilde{\sigma}_{\tilde{b}} \cdot 10^8$
5	39,24	0,0008	35	0,048	7,93	5,54	1,65
11		0,00081	40	0,085	6,94		
16		0,0008	47	0,152	5,91		
13		0,00084	66	0,234	4,21		
30		0,00084	67	0,11	4,14		
32		0,00081	68	0,125	4,08		
24	49,05	0,0023	18	0,08	7,72	6,07	1,06
22		0,0019	20,5	0,09	6,78		
23		0,0019	21,5	0,11	6,46		
27		0,0019	22,5	0,093	6,18		
26		0,0021	24	0,13	5,79		
29		0,0017	28	0,12	4,96		
28		0,0014	30	0,08	4,63		
15	58,86	0,0037	6,7	0,065	11,78	5,9	2,97
31		0,0027	14	0,047	5,64		
17		0,0023	15	0,073	5,26		
7		0,0023	16	0,05	4,93		
14		0,0033	20	0,17	3,95		
21		0,0023	20,5	0,09	3,85		
39	78,48	0,011	6	0,13	5,39	5,39	0
37		0,0045	6	0,118	5,39		

Результаты статистического анализа для трёх уровней напряжения представлены в виде гистограмм распределения при $\sigma = 39,24$ МПа на рис. 1, при $\sigma = 49,05$ МПа на рис. 2, при $\sigma = 58,86$ МПа на рис. 3.

Функция распределения случайной величины \tilde{b} равна

$$F_{\tilde{b}}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\tilde{b}}(t) dt = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \int_0^x f_{\tilde{b}}(t) dt, & x > 0. \end{cases} \quad (8)$$

Зная закон распределения случайной величины \tilde{b} , из формулы (4) можно найти закон распределения случайной величины времени до разрушения t_p .

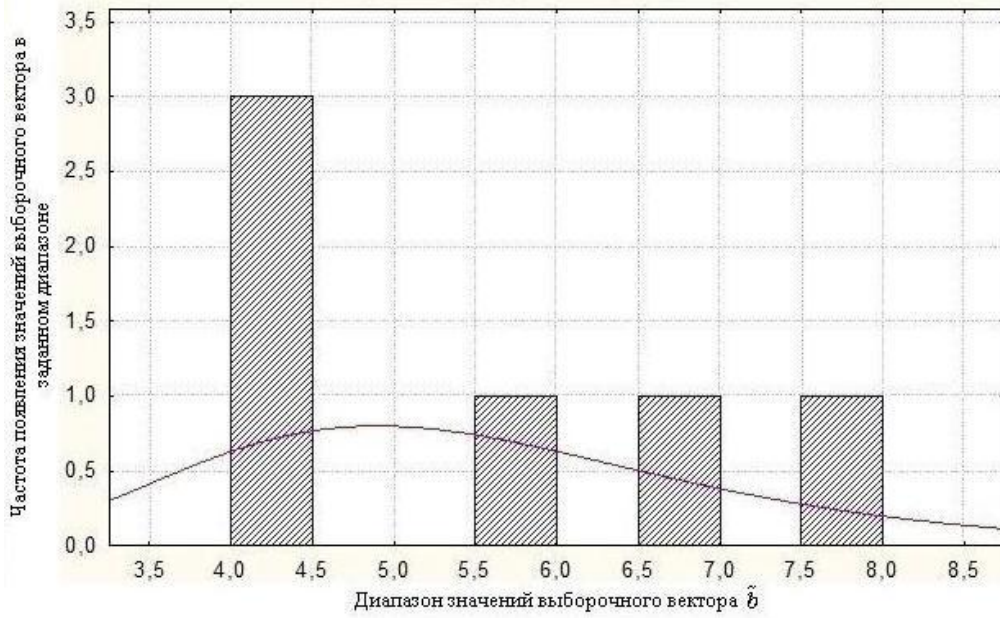


Рис. 1

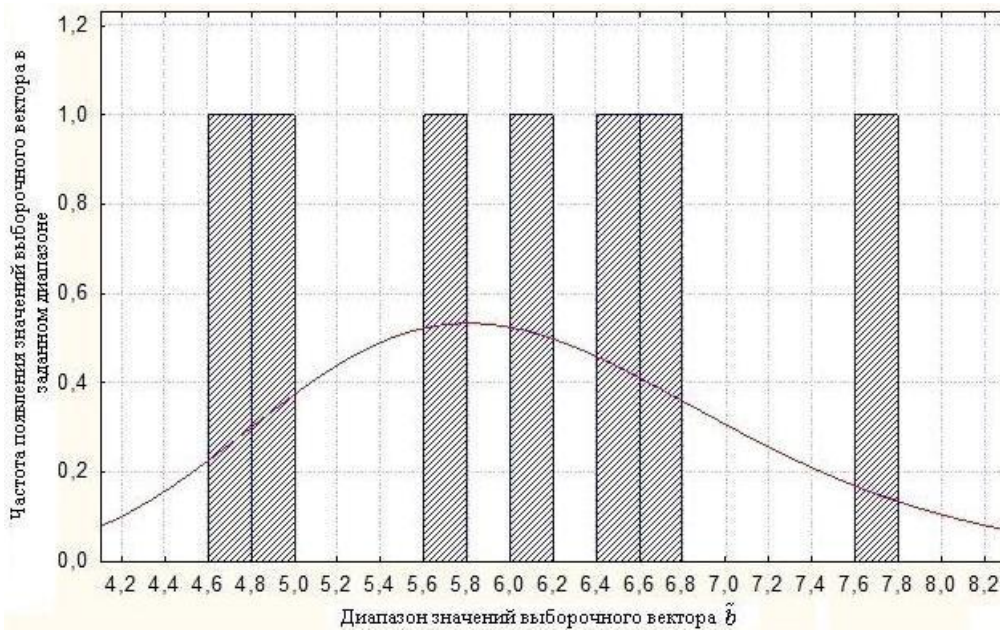


Рис. 2

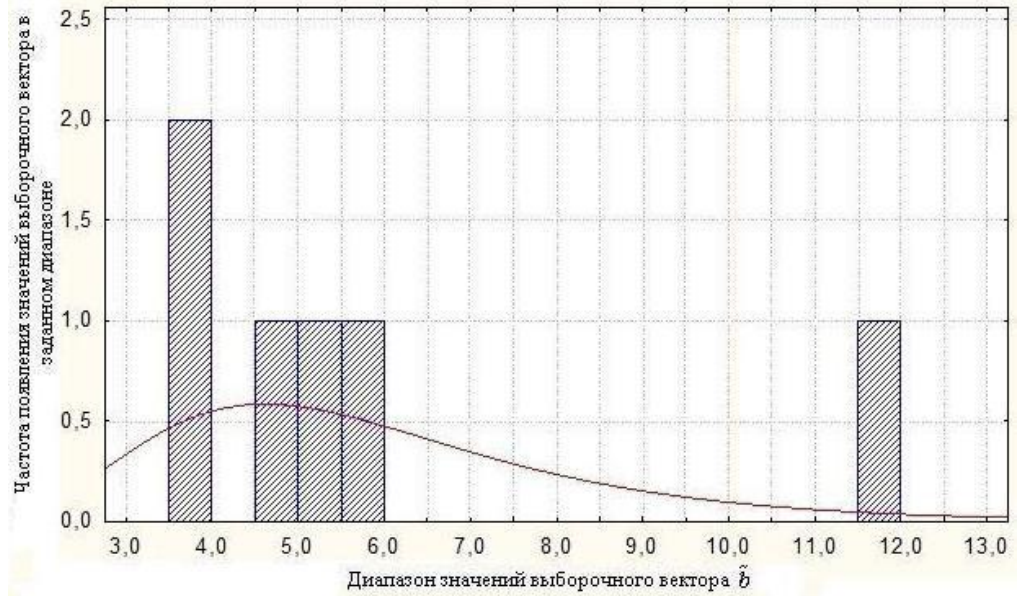


Рис. 3

Обозначим через F_{t_p} функцию распределения случайной величины t_p .

Тогда

$$F_{t_p}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ P\{t_p < x\}, & x > 0. \end{cases} \quad (9)$$

При $x > 0$ получим

$$\begin{aligned} F_{t_p}(x) &= P\{t_p < x\} = P\left\{\frac{1}{\tilde{b}(1+k)\sigma^k} < x\right\} = P\left\{\tilde{b} > \frac{1}{x(1+k)\sigma^k}\right\} = \\ &= 1 - P\left\{\tilde{b} < \frac{1}{x(1+k)\sigma^k}\right\} = 1 - F_{\tilde{b}}\left\{\frac{1}{x(1+k)\sigma^k}\right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Общий вид функции распределения случайной величины t_p определится как

$$F_{t_p}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x(1+k)\sigma^k}, & x > 0. \\ 1 - \int_0^{\frac{1}{x(1+k)\sigma^k}} f_{\tilde{b}}(t) dt, & x > 0. \end{cases} \quad (11)$$

$$f_{t_p}(x) = F'_{t_p}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{(1+k)\sigma^k} \frac{1}{x^2} f_{\tilde{b}}\left(\frac{1}{x(1+k)\sigma^k}\right), & x > 0, \end{cases} \quad (12)$$

где f_{t_p} – плотность распределения случайной величины t_p (рис. 4).

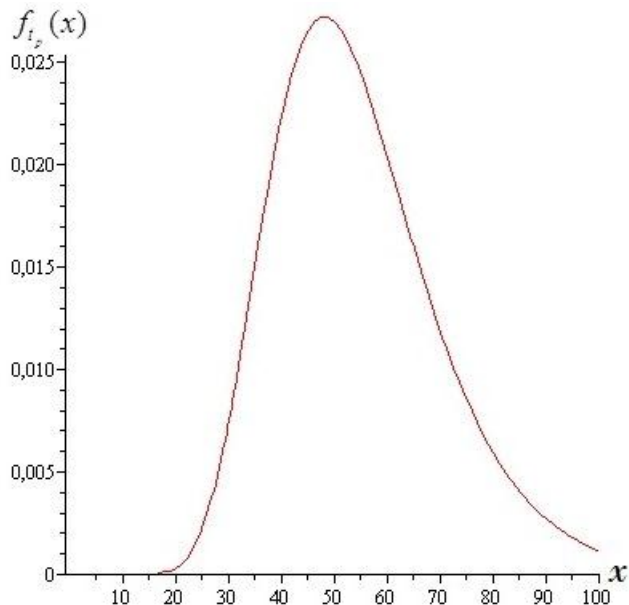


Рис. 4

На рис. 4 представлена плотность распределения случайной величины t_p при напряжении $\sigma = 39,24$ МПа.

Аналогичным образом с учетом предположения, что случайная величина \tilde{b} имеет логнормальное распределение, можно найти распределение случайной величины и для других уровней напряжения, а именно:

при $\sigma = 49,05$ МПа $\mu = -16,63$, $s = 0,17$;

при $\sigma = 58,86$ МПа $\mu = -16,76$, $s = 0,47$;

при $\sigma = 78,48$ МПа $\mu = -16,74$, $s = 0$.

Для проверки адекватности построенной вероятностной модели определим основные характеристики (среднее время до разрушения и его среднеквадратическое отклонение) полученных распределений для соответствующих уровней напряжения и сравним их с имеющимися экспериментальными данными.

Среднее время до разрушения $[t_p]$ и его среднеквадратическое отклонение σ_{t_p} определяются из выражений

$$\begin{aligned}
[t_p] &= \int_0^{+\infty} x \cdot f_{t_p}(x) dx = \frac{1}{(1+k)\sigma^k} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \cdot f_{\tilde{b}}\left(\frac{1}{x(1+k)\sigma^k}\right) dx = \\
&= \frac{1}{(1+k)\sigma^k} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x(1+k)\sigma^k s\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\frac{\ln\left(\frac{1}{x(1+k)\sigma^k}\right) - \mu}{s} \right]^2\right\} dx = \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\frac{\ln\left(\frac{1}{x(1+k)\sigma^k}\right) - \mu}{s} \right]^2\right\} dx, \tag{13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D[t_p] &= \int_0^{+\infty} x^2 \cdot f_{t_p}(x) dx - [t_p]^2 = \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{x}{s\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\frac{\ln\left(\frac{1}{x(1+k)\sigma^k}\right) - \mu}{s} \right]^2\right\} dx - [t_p]^2, \tag{14}
\end{aligned}$$

$$\sigma_{t_p} = \sqrt{D[t_p]}. \tag{15}$$

Результаты расчетов выражений (13), (15) с использованием математического программного пакета Maple 12 представлены в таблице 2.

Таблица 2

σ , МПа	Теоретическое среднее $[t_p]$, час	Теоретическое среднеквадратическое отклонение σ_{t_p} , час	t_p , час	Эмпирическое среднее $[\hat{t}_p]$, час	Эмпирическое среднеквадратическое отклонение $\hat{\sigma}_{t_p}$, час
39,24	54,63	16,31	35	53,83	14,93
			40		
			47		
			66		
			67		
			68		
49,05	27,34	8,16	18	23,5	4,22
			20,5		
			21,5		
			22,5		
			24		
			28		
58,86	15,53	4,64	6,7	15,37	5,01
			14		
			15		
			16		
			20		
			20,5		
78,48	6,36	1,9	6	6	0
			6		

Как можно видеть из таблицы 2, теоретические результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными как по времени до разрушения, так и по среднеквадратическому отклонению, т. е. построенная вероятностная модель адекватно описывает процесс разрушения при ползучести.

В общем случае по найденному распределению случайной величины t_p при фиксированном уровне напряжения можно найти вероятность неразрушения образца по формуле

$$P_{t_p}(x) = 1 - F_{t_p}(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x^{(1+k)\sigma^k}} \int_0^x f_{\tilde{b}}(t) dt, & x > 0. \end{cases} \quad (16)$$

Тогда нижняя оценка времени до разрушения t_* (назначенный ресурс) определяется по заданному уровню вероятности неразрушения p_* как решение уравнения (16) относительно параметра x .

Выводы. Построенная стохастическая модель длительной прочности в условиях одноосного растяжения образцов из коррозионностойкой стали 12Х18Н10Т хорошо согласуется с экспериментальными данными и может

быть использована для прогнозирования времени до разрушения других конструкционных материалов.

1. *Пошивалов В. П.* Об одном подходе к определению времени до разрушения в условиях ползучести / *В. П. Пошивалов* // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1993. – №3. – С. 56 – 60.
2. *Радченко В. П.* Оценка надёжности элементов конструкций в условиях ползучести на основании стохастических обобщённых моделей / *В. П. Радченко, М. В. Шершнева, С. Н. Кубышкина* // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2012. – 3(28). – С. 53 – 71.
3. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций / *Ю. Н. Работнов*. – М. : Наука, 1966. – 752 с.
4. Закономерности ползучести и длительной прочности : справочник / ред. *С. А. Шестериков*. – М. : Машиностроение, 1983. – 101 с.
5. *Соснин О. В.* Определение параметров кривых ползучести при наличии всех стадий процесса ползучести / *О. В. Соснин, А. Ф. Никитенко, Б. В. Горев* // В сб. : Расчёты и испытания на прочность. Расчетные методы определения несущей способности и долговечности элементов машин и конструкций. Метод определения параметров кривых ползучести и накопления повреждений при одноосном нагружении : Метод, рекомендации. – М. : ВНИИНМАШ, 1982. – С. 63 – 67.
6. *Биргер И. А.* Детерминированные и статистические модели долговечности / *И. А. Биргер* // Проблемы надежности летательных аппаратов : сб. статей / под ред. *И. Ф. Образцова, А. С. Вольмира*. – М. : Машиностроение, 1985. – 280 с.

Институт технической механики
НАН Украины и ГКА Украины,
Днепропетровск

Получено 23.04.13,
в окончательном варианте 14.06.13