УДК 521.629

В.Г.КОМАРОВ

РЕШЕНИЕ В КВАДРАТУРАХ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОСМИЧЕСКИМ АППАРАТОМ

Рассматривается задача оптимального управления изменением вектора тяги космического аппарата (КА) по критерию минимума расхода топлива при переходе между компланарными эллиптическими и круговыми орбитами или между компланарными круговыми орбитами в ньютоновском поле сил притяжения. Допуская определенные предположения относительно параметров движения КА, получены решения рассматриваемой задачи в квадратурах и, соответственно, найдены значения начальных параметров, определяющих оптимальное управление в зависимости от начальных параметров движения. Эти параметры, определяющие оптимальное управление, могут быть приняты в качестве значений первого приближения в задачах, решение которых можно получить только путем численного интегрирования.

Розглядається задача оптимального керування зміною вектора тяги космічного апарату (КА) за критерієм мінімуму витрат палива при переході між компланарними еліптичними і круговими орбітами або між компланарними круговими орбітами в ньютонівському полі сил тяжіння. Допускаючи певні припущення щодо параметрів руху КА, отримані рішення розглянутої задачі в квадратурах і, відповідно, знайдено значення початкових параметрів, що визначають оптимальне управління в залежності від початкових параметрів руху. Ці параметри, що визначають оптимальне управління, можуть бути прийняті в якості значень першого наближення в задачах, розв'язання яких можна одержати тільки шляхом чисельного інтегрування.

An optimal control problem of changing the thrust vector of the spacecraft (SC) on the criterion of minimum fuel consumption during the transition between coplanar elliptical and circular orbits, or between coplanar circular orbits in the Newtonian field of attractive forces is considered. Allowing for certain assumptions about the motion parameters of the spacecraft, the problem under consideration is solved in quadratures and correspondingly the values of initial parameters that determine the optimal control depending on the initial motion parameters are found. These parameters determining the optimal control can be taken as the values of the first approximation for problems whose solution can only be obtained by numerical integration.

Задачи оптимального управления космическими аппаратами (КА) при переходе между орбитами в ньютоновском поле земного притяжения сводятся к необходимости рассмотрения и решения краевых задач [1 – 5]. Характерной особенностью этих задач является то, что они описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, для которых известны начальные и конечные значения параметров движения КА. При этом, обеспечение конечных значений параметров движения КА достигается соответствующим выбором определенного количества неизвестных параметров в начальный момент времени, определяющих оптимальную программу управления движением.

Сложность нахождения решения таких дифференциальных уравнений при численном интегрировании состоит в том, что необходимо знать хотя бы близкие значения неизвестных параметров, определяющих оптимальное управление, с тем, чтобы при использовании рекуррентных методов поиска оптимального решения получать сходящуюся последовательность траекторий к искомой.

Математическая модель, которая описывает траекторию перехода КА между компланарными кеплеровыми орбитами в ньютоновском поле сил притяжения совместно с оптимальной программой управления величиной и направлением силы тяги, обеспечивающую минимальный расход топлива на переход, может быть представлена в следующем виде [6]:

$$\dot{V}_n = \frac{\mathrm{P}}{m} u \cos\varphi - \frac{V_n V_r}{r},$$

$$\dot{V}_r = \frac{\text{P}}{m} u \sin\varphi + \frac{V_n^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} \ , \tag{1}$$

$$\dot{r} = V_r \ ,$$

$$\dot{\nu} = \frac{V_n}{r} \ ,$$

$$\dot{m} = -\alpha \tilde{u} \, ,$$

$$\dot{\psi}_1 = -2\frac{V_n}{r}\psi_2 + \frac{V_r}{r}\psi_1 - \frac{1}{r}\psi_4 \, ,$$

$$\dot{\psi}_2 = \frac{V_n}{r}\psi_1 - \psi_3 \, ,$$

$$\dot{\psi}_3 = \left(\frac{V_n^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r^3}\right)\psi_2 - \frac{V_n V_r}{r^2}\psi_1 + \frac{V_n}{r^2}\psi_4 \, , \tag{2}$$

$$\dot{\psi}_4 = 0 \ ,$$

$$\dot{\psi}_5 = \frac{P}{m^2}(\psi_1 \cos\varphi + \psi_2 \sin\varphi) u \, ,$$

где

$$\sin\varphi = \frac{\psi_2}{\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}} \ , \quad \cos\varphi = \frac{\psi_1}{\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}} \ , \tag{3}$$

$$u = \begin{cases} 1, \text{если } \Phi > 0 \\ \\ 0, \text{ если } \Phi \le 0 \, , \end{cases} \tag{4}$$

$$\Phi = \frac{P}{m}\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} - \alpha\psi_5 \ \text{– функция переключения.} \tag{5}$$

Здесь V_n, V_r – трансверсальная и радиальная составляющие вектора скорости; r – модуль радиуса-вектора; ν – центральный угол, отсчитываемый от начального радиуса-вектора; m – масса КА; α – максимальный массовый секундный расход топлива; P – тяга двигателя; φ – угол между вектором тяги и местным горизонтом; u – параметр управления модулем вектора тяги; $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5$ – дополнительные переменные, вводимые для определения необходимых условий оптимальности управления, исходя из принципа максимума; μ – гравитационная постоянная Земли.

Функция Гамильтона H, из требования максимума которой выводятся необходимые условия оптимальности управления, в рассматриваемой задаче может быть записана в виде:

$$H = \Phi u - \psi_1 \frac{V_n V_r}{r} + \psi_2 \left(\frac{V_n^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} \right) + \psi_3 V_r + \psi_4 \frac{V_n}{r} = A = const. \qquad (6)$$

В момент времени $t = t_0$ задаются начальные условия:

$$\begin{aligned} &V_n(t_0) = V_{n_0}, \\ &V_r(t_0) = V_{r_0}, \\ &r(t_0) = r_0, \\ &\nu(t_0) = \nu_0, \\ &m(t_0) = m_0. \end{aligned} \qquad (7)$$

Условия, которым должны удовлетворять параметры движения КА в момент времени $t = t_k$, определяются конечной орбитой.

Переход КА с орбиты, определяемой начальными условиями (7), на заданную конечную орбиту, будем рассматривать при условии, что конечный момент времени t_k и центральный угол $\nu_k = \nu(t_k)$ не фиксированы. В этом случае из необходимых условий оптимальности на конце следует, что

$$A = \psi_4 = 0. \qquad (8)$$

Так как минимизируется расход массы на переход, то граничное значение дополнительной переменной $\psi_5(t)$ (условие трансверсальности) в момент времени $t = t_k$ равно единице, т.е.

$$\psi_5(t_k) = 1. \qquad (9)$$

Однако, для этой переменной (исключая частный случай $\psi_5(t_0) = 0$) условие (9) можно перевести в начальный момент времени и принять

$$\psi_5(t_0) = 1. \qquad (10)$$

Это возможно, т.к. функция $H(\psi_1,...,\psi_5)$ и уравнения (2) однородны по переменным $\psi_j \, (j = 1,...,5)$. Разделив все соотношения на $\psi_5(t_0)$, получим (10).

Граничные значения дополнительных переменных $\psi_1(t_k)$, $\psi_2(t_k)$, $\psi_3(t_k)$ или условия трансверсальности в момент времени $t = t_k$ находятся из соотношений, определяющих конечную орбиту. Если эта орбита коническое сечение с эксцентриситетом e и параметром p, то значение параметров движения $V_n(t_k)$, $V_r(t_k)$, $r(t_k)$ удовлетворяют соотношениям:

$$V_n^2(t_k) + V_r^2(t_k) - \frac{2\mu}{r(t_k)} + \frac{\mu}{p}(1 - e^2) = 0\,, \qquad (11)$$

$$V_n(t_k)\, r(t_k) - \sqrt{\mu p} = 0\,.$$

Соответствующие ограничениям (11) условия трансверсальности запишутся в виде:

$$\psi_1(t_k) = -2\lambda_1 V_n(t_k) - \lambda_2 r(t_k)\,,$$

$$\psi_2(t_k) = -2\lambda_1 V_r(t_k)\,, \tag{12}$$
$$\psi_3(t_k) = -2\lambda_1 \frac{\mu}{r^2(t_k)} - \lambda_2 V_n(t_k)\,,$$

где λ_1, λ_2 – неопределенные множители Лагранжа.

Для конечной круговой орбиты радиуса $r_k > r_0$ имеем равенства:

$$V_n(t_k) = \sqrt{\frac{\mu}{r_k}}\,, \quad V_r(t_k) = 0\,, \quad r(t_k) = r_k\,, \tag{13}$$

которые следуют из равенств (11), если положить $e = 0$ и $p = r_k$, так как круговая орбита является коническим сечением с такими эксцентриситетом и параметром.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (1), (2) в общем случае не интегрируется в квадратурах и поэтому решение этой системы можно определить одним из численных методов. Для этого наряду с начальными условиями (7) необходимо знать начальные значения дополнительных переменных

$$\psi_{10} = \psi_1(t_0)\,, \qquad \psi_{20} = \psi_2(t_0)\,. \tag{14}$$

Начальное значение $\psi_{30} = \psi_3(t_0)$ выражается через ψ_{10} и ψ_{20} из первого интеграла (6).

Эти параметры (14) определяют начальные значения оптимальной программы управления (3) (являются начальными условиями для дифференциальных уравнений (2)) и должны быть такими, чтобы в определяемый момент времени $t = t_k$ конечные параметры движения КА принимали заданные значения (13). Имеем краевую задачу, в которой необходимо определить значения ψ_{10}, ψ_{20} и t_k, соответствующие заданным концевым условиям.

Трудность нахождения решения таких задач заключается в том, что заранее неизвестны (в начальный момент времени) значения (14) и их необходимо каким-либо способом определять. Получение же решения системы (1), (2) при известных начальных условиях (7), (14) (задача Коши) не представляет труда для современных вычислительных средств.

На основании результатов, полученных в |7|, можно сделать вывод, что оптимальные траектории перехода между соосными эллиптическими и, в частности, круговыми орбитами для КА с ограниченной тягой могут состоять из конечного числа активных и пассивных участков. При этом, по мере увеличения числа этих участков, уменьшается величина затрат топлива на переход между орбитами и в пределе стремится к минимальной затрате топлива, которая соответствует топливу, необходимому для приобретения приращения скорости в задаче оптимального перехода между орбитами в импульсной постановке |2|. Наиболее энергоемкой, очевидно, является траектория перехода, состоящая из одного активного участка. Траектория, состоящая из двух активных участков и одного пассивного между ними, является менее энергоемкой, чем первая, и представляет наибольший интерес с точки зрения практического использования.

Следует отметить, что такая структура оптимальной траектории перехода в предельном случае, когда приращения вектора скорости происходят мгновенно, а координаты центра масс КА не меняются, представляет известную схему Гомана [8] при переходе между круговыми орбитами.

Определим для такой структуры траектории перехода (два активных и один пассивный участки) параметры оптимальной траектории и оптимального управления, введя вместо неизвестных начальных значений $\psi_{10}, \psi_{20}, \psi_{30}$ также неизвестные в начальный момент времени, но геометрически и физически наглядные величины [9]: φ_0 – начальное значение угла между вектором тяги и местным горизонтом; $\dot{\varphi}_0$ – начальное значение угловой скорости вращения вектора тяги относительно местного горизонта; $b_0 = \sqrt{\psi_{10}^2 + \psi_{20}^2}$ – коэффициент пропорциональности. Замена осуществляется по формулам:

$$\psi_{10} = b_0 \cos\varphi_0 \,,$$

$$\psi_{20} = b_0 \sin\varphi_0 \,, \tag{15}$$

$$\psi_{30} = b_0 \left[\frac{(1+\sin^2\varphi_0)\dfrac{V_{n0}}{r_0} - \dot{\varphi}_0}{\cos\varphi_0} - \frac{V_{r0}}{r_0}\sin\varphi_0 \right].$$

Используя первый интеграл (6), значение b_0 выражается через φ_0, $\dot{\varphi}_0$, т.е.

$$b_0 = \frac{\alpha\cos\varphi_0}{\dfrac{P}{m_0}\cos\varphi_0 + \left(\dfrac{V_{n_0}^2 - V_{r_0}^2}{r_0} - \dfrac{\mu}{r_0^2}\right)\sin\varphi_0\cos\varphi_0 + V_{r_0}\left(2\dfrac{V_{r_0}}{r_0}\sin^2\varphi_0 - \dot{\varphi}_0\right)}. \tag{16}$$

Таким образом, краевая задача, решение которой определяет оптимальную траекторию перехода принятой структуры между компланарными эллиптическими и круговыми орбитами в ньютоновском поле притяжения, будет состоять в следующем. Найти начальные значения φ_0, $\dot{\varphi}_0$ и промежуток времени перехода $\Delta t_k = t_k - t_0$, такие, чтобы в момент времени $t = t_k$ в результате интегрирования системы (1), (2) в промежутке времени $[t_0, t_k]$ при начальных условиях (7), (15) выполнялись равенства (13), т.е.:

$$V_n(\varphi_0, \dot{\varphi}_0, \Delta t_k) - \sqrt{\frac{\mu}{r_k}} = 0\,,$$

$$V_r(\varphi_0, \dot{\varphi}_0, \Delta t_k) = 0\,, \tag{17}$$

$$r(\varphi_0, \dot{\varphi}_0, \Delta t_k) - r_k = 0\,.$$

В общем случае соотношения (17) опосредственно выражают зависимость от параметров φ_0, $\dot{\varphi}_0$, Δt_k. Если система (1), (2) преобразуется таким образом, что ее можно проинтегрировать в квадратурах, то эти соотношения переходят в систему трех трансцендентных уравнений с тремя неизвестными.

Для преобразования системы дифференциальных уравнений (1) к виду, позволяющему проводить ее интегрирование в квадратурах, примем следующее предположение: протяженность активных участков траектории перехода в угловом измерении значительно меньше единицы, т.е.

$$\Delta\nu_1 \cong \delta_1 = \omega_0 (t_1 - t_0) << 1, \quad \Delta\nu_k \cong \delta_k = \omega_k (t_k - t_2) << 1, \tag{18}$$

где t_1 – момент времени выключения двигателя на первом активном участке траектории; t_2 – момент времени включения двигателя на третьем заключительном активном участке траектории; t_k – момент времени выхода КА на заданную конечную орбиту; $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{\mu}{r_0^3}}$; $\omega_k = \sqrt{\dfrac{\mu}{r_k^3}}$. $\Delta\nu_1$, $\Delta\nu_k$ – угловые дальности активных участков траектории перехода.

Это позволяет считать, что движение на каждом активном участке происходит в «тонком» кольце, т.е.

$$\frac{|r(t_1) - r_0|}{r_0} << 1, \quad \frac{|r(t_2) - r_k|}{r_k} << 1 \tag{19}$$

и, следовательно, текущие параметры движения можно представить в виде:

$$V_n(t) = V_i + \Delta V_n(t), \quad V_r(t) = \Delta V_r(t), \quad r(t) = r_i + \Delta r(t), \tag{20}$$

где $\dfrac{|\Delta V_n(t)|}{V_i} << 1$, $\dfrac{|\Delta V_r(t)|}{V_i} << 1$, $\dfrac{|\Delta r(t)|}{r_i} << 1$, $V_i = \sqrt{\dfrac{\mu}{r_i}}$ $\quad (i = 0, k)$.

Учитывая (18), (19), (20) систему (1) на активных участках траектории перехода можно преобразовать к следующему виду:

$$\Delta\dot{V}_n = \frac{Pu}{m}\cos\varphi - \omega_i \Delta V_r,$$

$$\Delta\dot{V}_r = \frac{Pu}{m}\sin\varphi + 2\omega_i \Delta V_n + \omega_i^2 \Delta r,$$

$$\Delta\dot{r} = \Delta V_r,$$

$$\Delta\dot{\nu} = \omega_i + \frac{\Delta V_n}{V_i} - \frac{\Delta r}{r_i}, \tag{21}$$

$$\dot{m} = \alpha u, \quad (i = 0, k).$$

При этом система (2) на этих участках так же изменится и принимает вид:

$$\dot{\psi}_1 = -2\omega_i \psi_2, \qquad \dot{\psi}_2 = \omega_i \psi_1 - \psi_3,$$

$$\dot{\psi}_3 = -\omega_i^2 \psi_2, \qquad \dot{\psi}_5 = \frac{Pu}{m^2}\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}. \tag{22}$$

В (21), (22) функции u и φ определяются по соотношениям (3), (4).

Интегрирование систем дифференциальных уравнений (21) и (22) в промежутках времени $[t_0, t_1]$ и $[t_2, t_k]$ приводит к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
\Delta V_n &= A_i \cos\delta_i - B_i \sin\delta_i - \frac{1}{2}C_i + F_1^{(i)}(t)\cos\delta_i - F_2^{(i)}(t)\sin\delta_i - F_3^{(i)}(t),\\
\Delta V_r &= A_i \sin\delta_i + B_i \cos\delta_i + F_1^{(i)}(t)\sin\delta_i + F_2^{(i)}(t)\cos\delta_i,\\
\omega_1\Delta r &= -A_i \cos\delta_i + B_i \sin\delta_i + C_i - F_1^{(i)}(t)\cos\delta_i + F_2^{(i)}(t)\sin\delta_i + 2F_3^{(i)}(t),\\
\Delta\nu &= \delta_i + \omega_i \int_{t_i}^{t}\left(\frac{\Delta V_n}{V_0} - \frac{\Delta r}{r_0}\right)dt;
\end{aligned} \qquad (23)$$

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= 2D_i \cos\delta_i - 2E_i \sin\delta_i + G_i,\\
\psi_2 &= D_i \sin\delta_i + E_i \cos\delta_i,\\
\psi_3 &= \omega_i (D_i \cos\delta_i - E_i \sin\delta_i + G_i),\\
\psi_5 &= \psi_{5_i} + P\int_{t_i}^{t}\frac{\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}}{m^2}dt,
\end{aligned} \qquad (24)$$

где $\delta_i = \omega_i (t - t_i)$, $F_1^i(t) = \int_{t_i}^{t} f_1 dt$, $F_2^i(t) = \int_{t_i}^{t} f_2 dt$, $F_3^i(t) = \int_{t_i}^{t} f_3 dt$, $\quad (i = 0, k)$,

$f_1 = \frac{P}{m}(2\cos\delta_i \cos\varphi + \sin\delta_i \sin\varphi)$, $f_2 = \frac{P}{m}(-2\sin\delta_i \cos\varphi + \cos\delta_i \sin\varphi)$, $f_3 = \frac{P}{m}\cos\varphi$,

$A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, G_i$ – константы интегрирования.

На первом участке (активном) $u = 1$, $i = 0$ и функция переключения (5), $\Phi(t) \ge 0$ для $t \in [t_0, t_1]$. Значения A_0, B_0, C_0 в соотношениях (23) будут равны:

$$A_0 = 2\Delta V_{n_0}, \quad B_0 = \Delta V_{r_0}, \quad C_0 = 2\Delta V_{n_0},$$

где следует отметить отсутствие начального приращения Δr_0. Это объясняется тем, что в момент времени $t = t_0$ центр масс (ц.м.) КА находится на круговой орбите радиуса r_0 и, поэтому, $\Delta r_0 = 0$. При этом принято $\Delta V_{n_0} = \Delta V_n(t_0)$, $\Delta V_{r_0} = \Delta V_r(t_0)$. Для констант D_0, E_0, G_0 в (24) имеем:

$$\begin{aligned}
D_0 &= b_0 \frac{\dot{\bar\varphi}_0 - 2\sin^2\varphi_0}{\cos\varphi_0}, \quad E_0 = b_0 \sin\varphi_0, \quad G_0 = b_0 \frac{1 + 3\sin^2\varphi_0 - 2\dot{\bar\varphi}_0}{\cos\varphi_0},\\
b_0 &= \frac{\alpha\cos\varphi_0}{\frac{w_0}{T_0}\cos\varphi_0 + (2\sin^2\varphi_0 - \dot{\bar\varphi}_0)\omega_0 \Delta V_{r_0} + \omega_0 \Delta V_{n_0} \sin 2\varphi_0},
\end{aligned} \qquad (25)$$

где $\dot{\bar\varphi}_0 = \dfrac{\dot\varphi_0}{\omega_0}$.

Момент времени $t = t_1$ определяется из равенства нулю функции переключения, которую в промежутке времени $[t_0; t_1]$, используя предположение

(18), можно разложить в ряд по степеням малого параметра $\delta_0 \le \delta_1$ и аппроксимировать параболой, отбросив члены третьего порядка малости и выше.

Будем иметь:

$$\Phi(\delta_0) = \Phi_0 + \Phi_0' \delta_0 + \frac{1}{2} \Phi_0'' \delta_0^2 \ , \tag{26}$$

где

$$_0 = \frac{w_0}{T_0} b_0 - \quad , \qquad {}_0' = \frac{w_0}{T_0} b_0 (\dot{\varphi}_0 - 2) tg\varphi_0 \ ,$$

$$_0'' = \frac{w_0}{T_0} b_0 \left[3\sin^2\varphi_0 + (\dot{\varphi}_0 - 2) \left(\frac{tg\varphi_0}{{}_0 T_0} + \dot{\varphi}_0 \right) \right],$$

$$w_0 = g_0 P_{уд.п}, \qquad T_0 = \frac{m_0}{\alpha};$$

$P_{уд.п}$ – удельная тяга в пустоте; m_0 – масса КА при $t = t_0$.

Приравнивая к нулю (26), получаем квадратное уравнение, определяющее момент времени t_1 с точностью до величины второго порядка малости включительно. Имеем:

$$\omega_0 (t_1 - t_0) = \begin{cases} -\dfrac{\Phi_0'}{\Phi_0''} \left(1 + \sqrt{1 - 2\dfrac{\Phi_0 \Phi_0''}{\Phi_0'^2}} \right) & \text{при } \Phi_0' > 0 \\ \sqrt{-2\Phi_0 \Phi_0''} & \text{при } \Phi_0' = 0 \\ -\dfrac{\Phi_0'}{\Phi_0''} \left(1 - \sqrt{1 - 2\dfrac{\Phi_0 \Phi_0''}{\Phi_0'^2}} \right) & \text{при } \Phi_0' < 0. \end{cases} \tag{27}$$

Так как функция переключения в промежутке времени $[t_0; t_1]$ принимает только положительные значения, то ветви параболы (26) должны быть направлены в противоположную сторону от направления оси ординат и, поэтому, необходимо выполняются неравенства:

$$\Phi_0 \ge 0, \qquad \Phi_0'' < 0 \ . \tag{28}$$

В промежутке времени $t \in [t_1; t_2]$ на втором участке траектории перехода параметры оптимального управления и оптимальной траектории определяются по соотношениям:

$$\begin{aligned} &V_n = \sqrt{\frac{\mu}{p_1}} (1 + e_1 \cos\eta), \qquad V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p_1}} e_1 \sin\eta \ , \\ &r = \frac{p_1}{1 + e_1 \cos\eta}, \qquad \nu = \nu_1 + \eta - \eta_1; \end{aligned} \tag{29}$$

$$\psi_1 = L\frac{(1+e_1\cos\eta)^2+M}{1+e_1\cos\eta}, \qquad \psi_2 = Le_1\sin\eta,$$

$$\psi_3 = L\sqrt{\frac{\mu}{p_1^3}}(1+e_1\cos\eta)(1+e_1\cos\eta+M), \tag{30}$$

$$\psi_5 = \psi_5(t_1-0) = const,$$

где $\eta = \eta(t) = 2\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}}tg\frac{E}{2}\right)$; E – эксцентрическая аномалия; e_1, p_1 – эксцентриситет и параметр эллиптической орбиты, соответствующей оптимальной траектории перехода на пассивном участке; η_1 – истинная аномалия, соответствующая положению КА на эллиптической орбите, в момент времени $t = t_1$;

$$e_1 = \sqrt{\left(1-\frac{p_1}{r_1}\right)^2+\frac{p_1}{\mu}V_{r_1}^2},\ p_1 = \frac{V_{n_1}^2 r_1^2}{\mu},\ \eta_1 = arctg\frac{V_{r_1}}{V_{n_1}-\sqrt{\frac{\mu}{p_1}}},$$

$$\sin\eta_1 = \frac{V_{r_1}}{e_1}\sqrt{\frac{p_1}{\mu}}, \qquad V_{n_1} = V_n(t_1-0), \qquad V_{r_1} = V_r(t_1-0), \qquad r_1 = r(t_1-0),$$

$\nu_1 = \nu(t_1-0)$, L, M – константы интегрирования.

Значения $E = E(t)$ в интервале времени $[t_1;t_2]$ определяется из уравнения Кеплера:

$$E - e_1\sin E = E_1 - e_1\sin E_1 + \sqrt{\frac{\mu}{p_1^3}}(t-t_1),$$

где $E_1 = 2arctg\left(\sqrt{\frac{1-e_1}{1+e_1}}tg\frac{\eta_1}{2}\right)$.

Так как величины $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_5$, являются непрерывными функциями времени, то в момент времени $t = t_1$ должны выполняться равенства:

$$\begin{aligned}&\psi_1(t_1-0) = \psi_1(t_1+0), \quad \psi_2(t_1-0) = \psi_2(t_1+0),\\ &\psi_3(t_1-0) = \psi_3(t_1+0), \quad \psi_5(t_1-0) = \psi_5(t_1+0),\end{aligned} \tag{31}$$

где $\psi_1(t_1-0),...,\psi_5(t_1-0)$ – значения, принимаемые в выражениях (24) с индексом $i = 0$, в момент времени $t = t_1$, $\psi_1(t_1+0),...,\psi_5(t_1+0)$ – значения, принимаемые в выражениях (30), в момент времени $t = t_1$.

Функция переключения на пассивном участке траектории перехода, т.е. для времени $t \in [t_1;t_2]$ может быть представлена в виде $|6|$:

$$(t) = \frac{2P|L|}{m_1[K(\eta)+K(\eta_1)]}\left(y^2-\frac{M^2}{2y_1^2}y-\frac{M^2}{2y_1}\right)(y-y_1), \tag{32}$$

где $y = 1 + e_1 \cos\eta$, $y_1 = 1 + e_1 \cos\eta_1$, $K(\eta) = \sqrt{\left(y + \frac{M}{y}\right)^2 + e_1 \sin^2 \eta}$.

Переход осуществляется на более высокую орбиту $(r_k > r_0)$ и в момент времени $t = t_1$ ц.м. КА находится на восходящей ветви траектории перехода, поэтому последний множитель в (32) будет отрицательным до момента времени $t = t_2$. А так как $\Phi(t) < 0$ в промежутке времени $[t_1; t_2]$, то, следовательно, предпоследний множитель в (32) в этом промежутке может принимать только положительные значения, т.к. остальные множители, кроме последнего, положительные.

В момент времени $t = t_2$ $(\eta = \eta_2)$ функция переключения принимает значение равное нулю и этот момент времени находится из уравнения:

$$y^2 - \frac{M^2}{2y_1^2} y - \frac{M^2}{2y_1} = 0. \tag{33}$$

Подходящим решением уравнения (33), в рассматриваемой задаче, является корень:

$$y_2 = y(\eta_2) = \frac{M^2}{4y_1^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8y_1^3}{M^2}}\right), \tag{34}$$

т.к. второй корень этого уравнения отрицательный и не имеет смысла. Из (34) находим:

$$\eta_2 = \arccos \frac{1}{e_1}\left[\frac{M^2}{4y_1^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8y_1^3}{M^2}}\right) - 1\right] \qquad (0 \le \eta_2 \le \pi). \tag{35}$$

и, соответственно,

$$t_2 = t_1 + \sqrt{\frac{p_1^3}{\mu}}\left[E_2 - E_1 - e_1(\sin E_2 - \sin E_1)\right], \tag{36}$$

где $E_2 = 2arctg\left(\sqrt{\frac{1 - e_1}{1 + e_1}} tg \frac{\eta_2}{2}\right)$.

Наконец, на третьем заключительном (активном) участке оптимальной траектории перехода $u = 1$, $i = k$ и $\Phi(t) \ge 0$ для $t \in [t_2; t_k]$. Этот участок характеризуется тем, что КА выводится на заданную орбиту и конечные значения текущих параметров движения в момент времени $t = t_k$ должны удовлетворять соотношениям, определяющим заданную конечную орбиту. Если эта орбита определяется соотношениями (11), то из (12) следует, что:

$$\Phi(t_k) = 0. \tag{37}$$

Равенство (37) также выполняется для круговых орбит и может быть использовано вместо какого-либо равенства из (13).

Параметры оптимальной траектории перехода КА на заключительном участке (активном) определяются формулами (23), в которых:

$$A_k = B_k = C_k = 0. \tag{38}$$

Соответственно в (24):

$$D_k = b_k \frac{\bar{\dot{\varphi}}_k - 2\sin^2\varphi_k}{\cos\varphi_k},\ E_k = b_k \sin\varphi_k,\ G_k = b_k \frac{1 + 3\sin^2\varphi_k - 2\bar{\dot{\varphi}}_k}{\cos\varphi_k}, \tag{39}$$

где $b_k = \dfrac{m_k}{w_0}\psi_5(t_k)$; $\bar{\dot{\varphi}}_k = \dfrac{\dot{\varphi}_k}{\omega_k}$; φ_k – угол между вектором тяги и местным горизонтом в момент времени $t = t_k$; $\dot{\varphi}_k$ – угловая скорость вектора тяги в момент времени $t = t_k$.

В момент времени $t = t_2$ имеем условия непрерывности:

$$\psi_1(t_2 - 0) = \psi_1(t_2 + 0), \quad \psi_2(t_2 - 0) = \psi_2(t_2 + 0), \quad \psi_3(t_2 - 0) = \psi_3(t_2 + 0).$$

Равенства (17) преобразуются в трансцендентные уравнения следующего вида:

$$V_k\left(\frac{y_2}{\sqrt{1-e_1}} - 1\right) = F_1^k(t_2)\cos\omega_k\Delta t_k + F_2^k(t_2)\sin\omega_k\Delta t_k - F_3^k(t_2),$$

$$V_k\frac{\sqrt{e_1^2 - (1-y_2)^2}}{\sqrt{1-e_1}} = -F_1^k(t_2)\sin\omega_k\Delta t_k + F_2^k(t_2)\cos\omega_k\Delta t_k, \tag{40}$$

$$\omega r_k\left(\frac{1-e_1}{y_2} - 1\right) = -F_1^k(t_2)\cos\omega_k\Delta t_k - F_2^k(t_2)\sin\omega_k\Delta t_k + 2F_3^k(t_2),$$

где

$$F_1^k(t_2) = \int_{t_k}^{t_2}\frac{P}{m}(2\cos\omega_k\Delta t\cos\varphi + \sin\omega_k\Delta t\sin\varphi)dt;$$

$$F_2^k(t_2) = \int_{t_k}^{t_2}\frac{P}{m}(-2\sin\omega_k\Delta t\cos\varphi + \cos\omega_k\Delta t\sin\varphi)dt;$$

$$F_3^k(t_2) = \int_{t_k}^{t_2}\frac{P}{m}\cos\omega_k\Delta t dt;$$

$$\Delta t = t - t_k, \quad \Delta t_k = t_k - t_2 \quad .$$

В качестве примера рассмотрим переход между круговыми орбитами с активными участками малой протяженности.

В этом случае естественно предположить, что начальное значение угла φ_0 близко к нулю, что параметры e_1, p_1 фрагмента эллиптической орбиты на втором (пассивном) участке траектории перехода незначительно отличаются от параметров e, p гомановской переходной орбиты [8] и соответствующей ей $\bar{\dot{\varphi}}_0$, т.е.:

$$\sin\varphi_0 \cong \varphi_0,\ \cos\varphi_0 \cong 1,\ \bar{\dot{\varphi}}_0 = \frac{e}{2}\sqrt{1+e} + \dot{\delta}_0,\ e_1 = e + \delta_1,\ p_1 = p + \delta p, \tag{41}$$

где $|\varphi_0| << 1$; $|\delta_0| << 1$; $|\delta_1| << 1$; $\dfrac{|\delta p|}{p} << 1$.

Т.к. $\Delta V_{n_0} = \Delta V_{r_0} = 0$, коэффициенты параболе (26) будут:

$$\Phi_0 = 0\,,\ \Phi_0' = \alpha(\dot{\varphi}_0 - 2)\varphi_0\,,\ \Phi_0'' = \alpha\left[3\varphi_0^2 + (\dot{\varphi}_0 - 2)\left(\dot{\varphi}_0 + \frac{\varphi_0}{\omega_0 T_0}\right)\right].$$

С точностью до первого порядка малости находим продолжительность первого активного участка:

$$\omega_0(t_1 - t_0) = \omega_0 \Delta t_1 = -\frac{4}{e_1\sqrt{1+e_1}}\varphi_0\,. \tag{42}$$

Откуда определяем начальное значение угла φ_0 в зависимости от продолжительности активного участка:

$$\varphi_0 = -\frac{e_1}{4}\sqrt{1+e_1}\,\omega_0 \Delta t_1\,, \tag{43}$$

т.е. оптимальное направление вектора тяги при сходе с круговой орбиты в начальный момент времени должно быть таким, чтобы при последующем движении модуль радиуса вектора уменьшался.

Из соотношений (23) для $i = 0$ можно получить:

$$\Delta V_n(t_1) \cong \Delta V_1\,,\quad \Delta V_r(t_1) \cong \Delta V_1 \omega_0 \Delta t_1\,,\quad \Delta r(t_1) \cong \frac{1}{3}\Delta V_1 \omega_0 \Delta t_1^2\,, \tag{44}$$

где $\Delta V_1 = \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{P}{m}dt = -w_0 \ln\left(1 - \frac{\Delta t_1}{T_0}\right) \cong \frac{w_0}{T_0}\Delta t_1$.

В момент времени выключения двигателя $t = t_1$ начинается пассивный участок траектории перехода, который представляет фрагмент эллипса с параметрами e и p. При этом перигей эллиптической орбиты отстоит от положения КА на эллиптической орбите в момент выключения двигателя на угловом расстоянии:

$$\Delta\eta_1 = \frac{1}{2}\sqrt{1+e}\,\omega_0 \Delta t_1\,. \tag{45}$$

Из соотношений (24) с учетом (31) в момент времени $t = t_1$ имеем:

$$2D_0 \cos\omega_0\Delta t_1 - 2E_0 \sin\omega_0\Delta t_1 + G_0 = L\frac{(1 + e_1\cos\eta_1)^2 + M}{1 + e_1\cos\eta_1}\,,$$

$$D_0 \sin\omega_0\Delta t_1 + E_0 \cos\omega_0\Delta t_1 = Le_1 \sin\eta_1\,.$$

Откуда находим:

$$L = \frac{b_0}{2}\,,\qquad M = 1 - e^2 + \delta_2\,, \tag{46}$$

где $\delta_2 << 1$.

Для определения соотношения между углом φ_k (угол между вектором тяги и местным горизонтом) в момент времени $t = t_k$ выведения КА на круговую орбиту радиуса $r = r_k$ и продолжительностью $\Delta t_k = t_k - t_2$ второго заключительного активного участка аппроксимируем функцию переключения параболой, аргументом которой является малая величина $\left|\delta_k\right| \le \omega_k \Delta t_k$ (18). Имеем:

$$\Phi(t) = \Phi_k + \Phi'_k \delta_k + \frac{1}{2}\Phi''_k \delta_k^2 \ , \tag{47}$$

где

$$\Phi_k = 0,\ \Phi'_k = \alpha\psi_5(t_k)(\dot{\overline{\varphi}}_k - 2)\varphi_k\,,\ \Phi''_k = \alpha\psi_5(t_k)\left[3\varphi_k^2 + (\dot{\overline{\varphi}}_k - 2)\left(\dot{\overline{\varphi}}_k + \frac{\varphi_k}{\omega_k T_k}\right)\right],$$

$$T_k = \frac{m_k}{\alpha}; \qquad \dot{\overline{\varphi}}_k = -\frac{e}{2}\sqrt{1-e} + \dot{\delta}_k\,; \qquad \left|\dot{\delta}_k\right| << 1\,; \qquad \left|\varphi_k\right| << 1 \ .$$

В моменты времени t_2 и t_k функция переключения (47) равна нулю, т.е. выполняются равенства (33), (37). Из (47) находим момент времени t_2 :

$$\omega_k(t_2 - t_k) = -2\frac{\Phi'_k}{\Phi''_k} \cong \frac{4\varphi_k}{e\sqrt{1-e}}$$

или искомое соотношение

$$\varphi_k = \frac{e}{4}\omega_k \Delta t_k \sqrt{1-e}\,. \tag{48}$$

Из равенств (24) можно получить, что

$$\varphi(t_2) = -\varphi_k\,. \tag{49}$$

Используя (49) и непрерывность сопряженных переменных в момент времени $t = t_2$, находим, что КА в момент включения двигателя $(t = t_2)$ расположен на переходной эллиптической орбите на угловом удалении от апогея:

$$\Delta\eta_2 \cong -\frac{1}{2}\omega_k \Delta t_k \sqrt{1-e}\,,$$

т.е. корень (34) равен:

$$y(\eta_2) \cong 1 - e\cos\Delta\eta_2\,. \tag{50}$$

В соответствии с (50) определяем:

$$\delta_2 \cong \frac{e}{32}(1-e^2)\left[(e-3)\omega_0^2 \Delta t_1^2 + (e+3)\omega_k^2 \Delta t_k^2\right].$$

Из равенства $\Phi_0 = \Phi_k = 0$ и непрерывности переменной $\psi_2(t)$ в момент времени t_1 и t_2 следует, что

$$b_0 = b_k\,, \quad \psi_5(t_k) = \frac{m_0}{m_k}\,, \quad T_k = \frac{m_0}{m_k}T_0\,.$$

Из уравнений (40) с учетом (41) и того, что $\sin\Delta\eta_2 \cong \Delta\eta_2$, $\cos\Delta\eta_2 \cong 1$, находим:

$$\Delta V_n(t_2) \cong -\Delta V_k \ , \quad \Delta V_r(t_2) \cong \Delta V_k \omega_k \Delta t_k \ ,$$
$$\Delta r(t_2) \cong -\frac{1}{3}\Delta V_k \omega_k \Delta t_k^2 \ , \quad \Delta V_k \cong V_k(1-\sqrt{1-e}) \cong \frac{e}{2} V_k \ . \qquad (51)$$

На основании (51) с учетом (41) определяем:

$$\Delta V_1 \cong V_0(\sqrt{1+e}-1) \cong \frac{e}{2}V_0 \ , \quad \Delta t_1 = T_0\left(1-e^{-\frac{\Delta V_1}{u_0}}\right), \quad \Delta t_k = T_k\left(1-e^{-\frac{\Delta V_k}{u_0}}\right).$$

Таким образом, задача оптимального перехода между круговыми орбитами в предположении, что оптимальная траектория состоит из двух активных участков малой протяженности и одного пассивного между ними решена. Начальные значения параметров $\varphi_0, \dot{\varphi}_0$ равны:

$$\varphi_0 = -\frac{e}{4}\sqrt{1+e}\,\omega_0 \Delta t_1 \ , \quad \dot{\varphi}_0 = \frac{\omega_0}{2} e\sqrt{1+e} \ . \qquad (52)$$

Продолжительность перехода также определяется и равна:

$$t_k - t_0 = \pi\sqrt{\frac{p^3}{\mu}} + (\Delta t_1 + \Delta t_k)\left[1-\frac{1}{2}(1-e^2)^{3/2}\right]. \qquad (53)$$

Результаты (52), (53) могут быть использованы в качестве первого приближения в задачах с продолжительными активными участками.

1. Исследование оптимальных режимов движения ракет: Сборник статей. – М. : Оборонгиз, 1959. – 293 с.
2. Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета / Под редакцией *Дж. Лейтмана*. – М. : Наука, 1965. – 538с.
3. *Лоуден Д. Ф.* Оптимальные траектории для космической навигации : перевод с английского. / *Д. Ф. Лоуден*. – М. : Мир, 1966. – 152 с.
4. *Моисеев Н. Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. / *Н. Н. Моисеев* – М. : «Наука», 1971. – 424 с.
5. *Ильин В. А.* Оптимальные перелеты космических аппаратов / *В. А. Ильин, Г. Е. Кузмак.* – М. : Наука, 1976. – 744 с.
6. *Комаров В. Г.* Об оптимальных траекториях перехода между компланарными круговыми орбитами с конечным числом активных участков / *В. Г. Комаров.* // Космические исследования на Украине. – 1975. – Вып.7. – С. 37 – 41.
7. *Гурман В. И.* Об оптимальных переходах между компланарными эллиптическими орбитами в центральном поле / *В. И. Гурман* // Космические исследования. – 1966, IV, 1.
8. *W. Hohmann. Die Erreichbarkeit der Himmelskorper*, Oldenbourg, Munich, 1925.
9. *Комаров В. Г.* Об одном возможном подходе к исследованию оптимальных траекторий перехода между компланарными орбитами / *В. Г. Комаров* // Космические исследования на Украине. – 1982. – Вып. 16. – С.70 – 73.

Институт технической механики
НАН Украины и НКА Украины,
Днепропетровск

Получено 06.07.11,
в окончательном варианте 25.10.11