

## ВНЕШНЯЯ СИЛА ТРЕНИЯ И СТАЦИОНАРНЫЕ ВИХРЕВЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ НА ПЛОСКОСТИ

Изучен новый класс изобарических стационарных движений вязкой жидкости на плоскости. Главная отличительная черта рассмотренных процессов – наличие внешней силы сопротивления. Основные элементы проведенного исследования: изотермическое и неизотермическое течение Куэтта; диффузионная скорость движения вихря; два типа неизотермического поведения коэффициента внешнего сопротивления; конкуренция между стоком и источником импульсов; экстремальные свойства производства энтропии на линиях нулевой завихренности и линиях неподвижности течения.

Вивчен новий клас ізобаричних стаціонарних рухів в'язкої рідини на площині. Головною відмінною рисою розглянутих процесів є наявність зовнішньої сили опору. Основні елементи проведеного дослідження: ізотермічна і неізотермічна течія Куетта; дифузійна швидкість руху вихору; два типи неізотермічної поведінки коефіцієнта зовнішнього опору; конкуренція між стоком і джерелом імпульсів; екстремальні властивості виробництва ентропії на лініях нульової завихреності і лініях нерухомості течії.

A new class of isobaric stationary motions of a viscous liquid on the plane is studied. The main special feature of the considered processes is the presence of an external resistance force. The basic elements of the research under consideration are Cuett isothermal and nonisothermal flows, a diffusive velocity of the vortex motion, the two types of the nonisothermal behavior of an external resistance coefficient, concurrence between the flow and source of impulses, the extreme properties of the entropy production on the lines of the zero vorticity and zero flow motion.

**Введение.** Плоское двумерное стационарное течение несжимаемой вязкой ньютоновской жидкости определяется уравнениями [1]:

$$\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} + \rho F_i, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0, \quad \tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

$$\rho c_p v_k \frac{\partial T}{\partial x_k} = -\frac{\partial q_k}{\partial x_k} + \Phi + q_v, \quad (2)$$

$$\Phi = \tau_{11} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \tau_{22} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \tau_{12} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right),$$

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}; \quad i, k = 1, 2; \quad \rho, \lambda, \mu, c_p - \text{const}.$$

Здесь  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  – декартовы прямоугольные координаты;  $\mathbf{v}(v_1, v_2)$  – вектор скорости;  $\rho$  – плотность;  $p$  – давление;  $\mathbf{F}(F_1, F_2)$  – вектор массовой силы;  $T$  – температура;  $c_p$  – удельная теплоемкость;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $\tau_{ij}$  – компоненты девиатора тензора напряжений;  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости;  $q_v$  – объемная мощность внутренних источников энергии;  $\Phi$  – диссипативная функция;  $\mathbf{q}(q_1, q_2)$  – вектор удельного теплового

потока. Дважды повторяющийся индекс  $k$  означает суммирование.

Центральным пунктом применяемой гидродинамической модели является рэлеевская сила сопротивления  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^R$ :

$$F_i^R = -\zeta v_i; \quad i=1,2, \quad (3)$$

где  $\zeta > 0$  – коэффициент «внешнего» трения. Говоря о внешнем силовом поле (3) или, что то же, о рэлеевской силе трения, мы следуем терминологии работ [2 – 5], в которых была отмечена принципиальная роль трения жидкости о подстилающую поверхность при формировании завихренности. Например, при экспериментальном изучении двумерного периодического течения в прямоугольной кювете учет внешнего трения, т.е. трения о дно кюветы, важен для правильной оценки критического числа Рейнольдса [3]. Уравнения гидродинамики с рэлеевским трением  $\mathbf{F}^R = -\zeta \mathbf{v}$  применялись в [2 – 5] для теоретического изучения и лабораторного моделирования периодических течений в тонких слоях жидкости, а также для анализа крупномасштабных физических явлений в океане и атмосферах вращающихся планет. Модель сопротивления (3) оказалась эффективной в задачах теплообмена при кристаллизации полупроводников в условиях орбитального полета [6]. Основная идея этого подхода состоит в том, что гидродинамическое описание расплава вблизи фазовой границы учитывает наличие кластерных образований, которые вызывают сопротивление течению. В работах [3 – 6] применялся линейный вариант силы трения:  $\zeta \equiv \text{const}$ . Квадратичная по скорости величина силы трения рассматривалась в [2, гл. 4] для моделирования каскадных процессов преобразования энергии в турбулентном потоке. Далее полагаем, что  $\zeta = \zeta(\mathbf{v}^2, T)$ . Рассматриваем физические процессы, для которых коэффициент сопротивления – монотонно возрастающая функция модуля скорости,  $\partial\zeta/\partial(\mathbf{v}^2) > 0$ . В неизотермических условиях аналитические решения удается построить при  $\mu \equiv \text{const}$ ,  $\partial\zeta/\partial T \neq 0$ . По этой причине мы предполагаем здесь, что температурная зависимость коэффициента сопротивления коррелирует с термовязкими свойствами жидкости. Вариант  $\partial\zeta/\partial T < 0$  является основным и соответствует вязкости  $l$ -типа,  $\partial\mu/\partial T < 0$ . Вариант  $\partial\zeta/\partial T > 0$  соответствует вязкости  $g$ -типа,  $\partial\mu/\partial T > 0$ . Эти термины и обозначения ( $g$  – gas,  $l$  – liquid) применяются в метеорологии при изучении стационарных конвективных ячеек в слое воздуха. Библиография данного вопроса приведена в [7]. Далее при обсуждении знака производной  $\partial\zeta/\partial T$  будем говорить о  $g$  и  $l$  типах сопротивления. Объемный источник энергии  $q_v(\mathbf{v}^2, T)$  моделирует воздействие внутренних источников тепла и теплообмен жидкости с внешней средой. Для представленных здесь задач вид функции источника детерминирован структурой применяемых аналитических решений. Производство энтропии подсчитываем по формулам [1, 8]:

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_i, \quad \sigma_e = q_v/T, \quad \sigma_i = \mathbf{q}^2/(\lambda T^2),$$

где  $\sigma_e$  – производство энтропии за счет энергообмена с внешней средой;  $\sigma_i$  – производство энтропии за счет внутренних необратимых процессов.

Будем изучать течение вида

$$v_1 \equiv u = u(y), \quad v_2 \equiv 0, \quad T = T(y), \quad p \equiv \text{const}, \quad (4)$$

для которого уравнения (1), (2) записываются в форме:

$$d^2u / dy^2 = (\zeta / \nu)u, \quad \nu = \mu / \rho, \quad (5)$$

$$d^2T / dy^2 = -(q_0 + \Phi) / \lambda, \quad \Phi = \mu(du / dy)^2. \quad (6)$$

Рассматриваем течения, для которых  $\Phi \ll |q_0|$ ,

$$d^2T / dy^2 = -q_0 / \lambda. \quad (7)$$

Настоящая работа имеет своей целью: 1) изучить свойства вихря скорости и производство энтропии в сдвиговом потоке вязкой жидкости, испытывающем нелинейное воздействие внешнего сопротивления; 2) проанализировать в классе решений (4) формирование периодического течения в условиях конкурентного взаимодействия двух источников импульса. Прикладные аспекты данной работы связаны со следующими задачами: формирование периодических вихревых структур в природных и технических гидродинамических системах; тепловые режимы сдвиговых течений (тонкие слои жидкости [3, 4], полупроводниковые расплавы [6]).

**Динамическая система и ее точное решение.** Автономная динамическая система с двумя степенями свободы

$$d^2\tau_i / d\xi^2 = Q_i(\tau_1, \tau_2);$$

$$Q_1 = 2\tau_1(k^2 - \tau_1^2 + 3\tau_2^2), \quad Q_2 = 2\tau_2(k^2 - 3\tau_1^2 + \tau_2^2),$$

$$\tau_i = \tau_i(\xi); \quad i = 1, 2; \quad k \equiv \text{const}$$

имеет точное решение [9]:

$$\tau_1 = k(1 - \varepsilon^2) / \delta, \quad \tau_2 = 2k\varepsilon[\sin(2k\xi)] / \delta, \quad (8)$$

$$\delta = 1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos(2k\xi), \quad \xi \in (-\infty, \infty), \quad \varepsilon \equiv \text{const},$$

где  $\varepsilon, k$  – произвольные постоянные. В частном случае  $\varepsilon = 1$  получаем  $\tau_1(\xi) \equiv 0$ ,

$$\begin{aligned} d^2\tau_2 / d\xi^2 &= 2\tau_2(k^2 + \tau_2^2) \equiv Q_2, \\ \tau_2 &= k[\sin(2k\xi)] / [1 + \cos(2k\xi)], \end{aligned} \quad (9)$$

функция  $\tau_2(\xi)$  – ограниченная на конечном интервале  $0 \leq 2k\xi \leq \pi/2$ . Гидродинамическое истолкование решений (8), (9) дает возможность изучить интересные физические закономерности поведения завихренности в вязком потоке.

**Изотермическое течение.** Для описания изотермического процесса применяем решение (9), взяв  $\tau_2 = u$ ,  $\xi = y / (y_1 u_1)$ ,  $k = u_1$ , и тогда  $d^2u / dy^2 = Q_2 / (y_1 u_1)^2$ ,  $Q_2 = (y_1 u_1)^2 \zeta u / \nu = 2u(u_1^2 + u^2)$ . Отсюда получаем коэффициент сопротивления и скорость движения жидкости:

$$\bar{\zeta} \equiv \zeta y_1^2 / \nu = 2(1 + \bar{u}^2), \quad (10)$$

$$\bar{u} \equiv u/u_1 = \frac{\sin(2\bar{y})}{1 + \cos(2\bar{y})}, \quad \bar{y} = y/y_1, \quad (11)$$

$$y \in [0, y_2], \quad 0 < (2y_2/y_1) \leq \pi/2.$$

Здесь  $y_1, u_1$  – положительные константы, имеющие размерности длины и скорости соответственно; безразмерные величины отмечены чертой сверху. Функция (11) представляет изобарическое течение Куэтта:

$$y = 0, \quad u = 0; \quad y = y_2, \quad u = u(y_2),$$

где  $y_2$  – расстояние между двумя параллельными плоскими непроницаемыми стенками; одна стенка неподвижна, а другая перемещается в своей плоскости с конечной скоростью  $u_2 = u(y_2) > 0$ . Чтобы исключить из структуры решения координату  $2y/y_1 = \pi$ , поступаем следующим образом. Коэффициент сопротивления  $\zeta$  в (10) конечен и изменяется в интервале  $[\zeta_1, \zeta_2]$ , где  $\zeta_1 = \zeta(u=0) > 0$ ,  $\zeta_2 = \zeta(u=u_2) = U\zeta_1$ . Из физических соображений полагаем, что  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  различаются не слишком сильно: ширину интервала  $[\zeta_1, \zeta_2]$  ограничиваем величиной  $\zeta_2 - \zeta_1 = (U-1)\zeta_1$ , взяв  $1 < U \leq 2$ . Это означает, что данное решение описывает течения, для которых знаменатель дроби в (11) не меньше единицы. Коэффициенты  $\zeta_1, \zeta_2$  могут зависеть от кинематической вязкости  $\nu$  и от других параметров, определяющих рэлеевскую силу трения. Итоговое выражение для коэффициента сопротивления имеет вид:

$$\zeta = \zeta_1 \left[ 1 + \left( \frac{\zeta_2}{\zeta_1} - 1 \right) \frac{u^2}{u_2^2} \right].$$

Таким образом, в нашем распоряжении четыре исходные константы  $\nu, \zeta_1, \zeta_2, u_2$ , которые позволяют вычислить остальные параметры процесса:

$$y_1^2 = 2\nu/\zeta_1, \quad u_1^2 = u_2^2/(U-1),$$

$$0 < 2y_2/y_1 = \arccos[(2-U)/U] \leq \pi/2.$$

В решении (11) параметры  $u_1, y_1, y_2$  несут (посредством  $\zeta_1, \zeta_2$ ) информацию о внешнем сопротивлении и вязкостных свойствах системы «жидкость – граничные стенки».

В данном случае вихрь скорости  $\boldsymbol{\omega} = (1/2)\text{rot } \mathbf{v}$  имеет одну ненулевую составляющую  $\omega_z = -(du/dy)/2$ , направленную перпендикулярно плоскости  $(x, y)$ :  $\omega_z \equiv \omega = -(\zeta/\nu)(y_1 u_1/4)$ . В [10] показано, что для двумерных течений несжимаемой ньютоновской жидкости выполнено равенство

$$\nu \Delta \mathbf{v} = 2 \mathbf{v}_d \times \boldsymbol{\omega}, \quad (12)$$

где  $\nu \equiv \text{const}$ ,  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $\mathbf{v}_d$  – диффузионная скорость движения вихря,  $\mathbf{v}_d = \nu(\text{rot } \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega})/\omega^2$ . Для течения (11) свойство (12) выполнено, а диффузионная скорость параллельна оси  $y$ , и ее алгебраическая величина  $v_d = -(\nu/\omega_z)(d\omega_z/dy)$  равна

$$v_d = -2\nu u/(y_1 u_1) = -u[2\nu \partial \zeta / \partial (u^2)]^{1/2} \leq 0. \quad (13)$$

Значит, вектор  $v_d$  направлен от подвижной стенки к неподвижной. Остается отметить, что для течения чистого сдвига ( $u \sim y$ ,  $p \equiv \text{const}$ ,  $\omega \equiv \text{const}$ ,  $\zeta \equiv 0$ ) имеем  $v_d \equiv 0$ . Это позволяет утверждать, что диффузионная скорость (13) генерируется внешним сопротивлением течению.

**Неизотермическое течение.** Возьмем решение системы уравнений (5), (7) в виде (8) и сделаем следующие переобозначения:  $\tau_1 = \tau$ ,  $\tau_2 = u$ ,  $\xi = y/(y_1 u_1)$ ,  $k = u_1$ ,  $\tau = (c_1/u_1)(T - T_0)$ ,  $T_0 \equiv \text{const}$ . Действуя аналогично изотермическому случаю, получаем:

$$\begin{aligned} q_\nu c_1 / (\lambda u_1) &= -Q_1 / (y_1 u_1)^2, \quad Q_1 = 2\tau(u_1^2 - \tau^2 + 3u^2), \\ \zeta u / \nu &= Q_2 / (y_1 u_1)^2, \quad Q_2 = 2u(u_1^2 - 3\tau^2 + u^2). \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь  $T_0$  – отсчетное значение температуры;  $c_1$  – произвольная положительная постоянная, имеющая размерность удельной теплоемкости Дж/(кг·град). Неизотермическое течение жидкости определяется формулами:

$$\bar{\tau} \equiv \frac{\tau}{u_1} = (1 - \varepsilon^2) / \delta, \quad \bar{u} \equiv \frac{u}{u_1} = 2\varepsilon[\sin(2\bar{y})] / \delta, \quad (15)$$

$$\delta = 1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos(2\bar{y}),$$

$$\bar{y} = y / y_1, \quad y_1 > 0, \quad u_1 > 0, \quad \varepsilon > 0, \quad 0 < (2y_2 / y_1) < \pi / 2, \quad y \in [0, y_2].$$

Ясно, что  $\delta > 0$  при  $\varepsilon^2 \neq 1$ ;  $\varepsilon$  – параметр течения. Если  $\varepsilon^2 < 1$ , то  $\tau > 0$ , течение происходит в «горячей» области,  $T > T_0$ . Если  $\varepsilon^2 > 1$ , то  $\tau < 0$ , имеем «холодную» область,  $0 < T < T_0$ . С помощью (15) можно записать первый интеграл системы (5), (7):

$$\begin{aligned} (\bar{\tau} - \bar{\tau}_1)^2 + \bar{u}^2 &= R^2(\varepsilon^2) \equiv 4\varepsilon^2 / (1 - \varepsilon^2)^2, \\ \bar{\tau}_1 &= (1 + \varepsilon^2) / (1 - \varepsilon^2), \quad \bar{\tau}_1^2 - R^2 = 1. \end{aligned} \quad (16)$$

На плоскости  $(\bar{\tau}, \bar{u})$  имеем окружность радиуса  $R$  с центром в точке  $(\bar{\tau}_1, 0)$ . В горячей области  $\bar{\tau}_1 > 0$ ,  $d(R^2)/d(\varepsilon^2) > 0$ ; в холодной области  $\bar{\tau}_1 < 0$ ,  $d(R^2)/d(\varepsilon^2) < 0$ . Формулы (14) определяют неизотермическое течение Куэтта при постоянном давлении жидкости. Температуры неподвижной и подвижной стенок равны соответственно  $\tau(y=0)$  и  $\tau(y=y_2)$ . Тепловой поток подсчитывается по формуле:

$$q = -\lambda dT / dy, \quad \bar{q} \equiv q c_1 y_1 / (\lambda u_1^2) = -2\bar{u}\bar{\tau}. \quad (17)$$

Неподвижная стенка теплоизолирована:  $q(y=0) = 0$ . Температурная зависимость вихря скорости  $\omega y_1 / u_1 \equiv \bar{\omega} = \bar{\omega}(\bar{\tau})$  нелинейная:

$$\bar{\omega} = \bar{\tau}(\bar{\tau} - \bar{\tau}_1). \quad (18)$$

В холодной области  $\partial(\bar{\omega}^2)/\partial\bar{\tau} < 0$ , в горячей области  $\partial(\bar{\omega}^2)/\partial\bar{\tau} > 0$ . В обоих случаях  $\bar{\omega} < 0$ , а модуль завихренности – монотонно возрастающая функция температуры:  $\partial(\bar{\omega}^2)/\partial T > 0$ . Неизотермические свойства вихря скорости,

проявляющиеся на фоне переменного коэффициента динамической вязкости  $\mu(T)$ , изучены в [11].

Коэффициент сопротивления равен  $\bar{\zeta} = 2(1 - 3\bar{\tau}^2 + \bar{u}^2)$  и с учётом первого интеграла (16) принимает вид:  $\bar{\zeta} = 4\bar{\tau}(\bar{\tau}_1 - 2\bar{\tau})$ . Естественное требование  $\zeta > 0$  даёт следующие ограничения на выбор параметров  $\varepsilon$  и  $y_2$ :

- 1) в горячей области  $(\sqrt{17} - 4) < \varepsilon^2 < 1$ ,  $\cos(2y_2/y_1) = \varepsilon > 0$ ;
- 2) в холодной области  $1 < \varepsilon^2 < (\sqrt{17} + 4)$ ,  $\cos(2y_2/y_1) = 1/\varepsilon > 0$ .

Изучение влияния  $\varepsilon$  на знак производной  $d\bar{\zeta}/d\bar{\tau}$ , т. е. на тип сопротивления, показало, что существует пороговое значение  $\varepsilon = \varepsilon_0$  (для него  $d\bar{\zeta}/d\bar{\tau} = 0$ ), разделяющее  $l$  и  $g$  типы сопротивления: при переходе через порог от меньших к большим  $\varepsilon$  наблюдается переход от  $l$ -типа ( $d\bar{\zeta}/d\bar{\tau} < 0$ ) к  $g$ -типу сопротивления ( $d\bar{\zeta}/d\bar{\tau} > 0$ ). В данном классе решений это происходит и в холодной, и в горячей областях на обеих стенках. Приведем числовые значения порога  $\varepsilon_0$  и границ интервалов параметра  $\varepsilon$ , указывая в фигурных скобках тип сопротивления. Холодная область: на неподвижной стенке имеем  $\{l\}$  при  $1 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_0 = (4 + \sqrt{7})/3$  и  $\{g\}$  при  $\varepsilon_0 < \varepsilon < (4 + \sqrt{17})^{1/2}$ ; на подвижной стенке  $\{l\}$  при  $1 < \varepsilon^2 < \varepsilon_0^2$ ,  $\varepsilon_0^2 = 2 + (11/3)^{1/2}$  и  $\{g\}$  при  $\varepsilon_0^2 < \varepsilon^2 < (4 + \sqrt{17})$ . Горячая область: на неподвижной стенке имеем  $\{l\}$  при  $(\sqrt{17} - 4)^{1/2} < \varepsilon < \varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_0 = (4 - \sqrt{7})/3$  и  $\{g\}$  при  $\varepsilon_0 < \varepsilon < 1$ ; на подвижной стенке  $\{l\}$  при  $(\sqrt{17} - 4) < \varepsilon^2 < \varepsilon_0^2$ ,  $\varepsilon_0^2 = 6 - \sqrt{33}$  и  $\{g\}$  при  $\varepsilon_0^2 < \varepsilon^2 < 1$ .

Объёмный источник энергии есть четная функция скорости:

$$\bar{q}_v \equiv q_v c_1 y_1^2 / (\lambda u_1^2) = 2\bar{\tau}(\bar{\tau}^2 - 3\bar{u}^2 - 1). \quad (19)$$

В этом выражении разность  $\bar{\tau}^2 - 3\bar{u}^2$  ассоциируется с конкуренцией между выделением тепловой энергии и потерями кинетической энергии. На подвижной стенке основные параметры процесса  $u_2 = u(y_2)$ ,  $\tau(y_2)$ ,  $\zeta(y_2)$ ,  $q_v(y_2)$  зависят от выбора четырёх постоянных:  $\varepsilon$ ,  $y_1$ ,  $u_1$ ,  $c_1$ . Чтобы оценить справедливость исходного допущения о слабом влиянии вязкой диссипации энергии на теплоперенос (см. (6) и (7)), составим выражение:

$$\Phi / q_v = 2 \text{Pr} E(\varepsilon, y), \quad E = \bar{\omega}^2 / \left[ \bar{\tau}(\bar{\tau}^2 - 3\bar{u}^2 - 1) \right], \quad \text{Pr} = c_1 \mu / \lambda,$$

где  $\text{Pr}$  – эффективное число Прандтля в системе «жидкость – источник энергии». Вне малой, но конечной окрестности  $\varepsilon = 1$  (слева и справа от этого значения) функция  $E(\varepsilon, y)$  – ограниченная во всей области решения. Значит, подходящим выбором константы  $c_1$  можно обеспечить с заданной точностью выполнение условия  $\Phi \ll |q_v|$ . Результаты расчётов показывают, что в холодной области происходит объёмное выделение энергии:  $q_v(\varepsilon, y=0) > 0$ ,  $q_v(\varepsilon, y=y_2) > 0$ ; тепловой поток отводится из области течения через подвижную стенку,  $q(y=y_2) > 0$ , см. (17). В горячей области происходит объёмный сток энергии:  $q_v(\varepsilon, y=0) < 0$ ,  $q_v(\varepsilon, y=y_2) < 0$ ; тепловой поток поступает

в область течения через подвижную стенку,  $q(y = y_2) < 0$ . В обеих температурных областях при каждом фиксированном  $\varepsilon$  модуль завихренности растет по мере удаления от неподвижной стенки:  $\bar{\omega}^2(y = y_2) > \bar{\omega}^2(y = 0)$ . На теплоизолированной границе  $y = 0$  производство энтропии  $\sigma = \sigma_e = q_v / T$ , рассматриваемое как функция температуры  $\bar{\tau}(y = 0)$ , не имеет точек экстремума ни в холодной, ни в горячей областях. На подвижной стенке наблюдается сильная чувствительность  $\sigma$  к безразмерному параметру  $u_{11} = u_1^2 / (c_1 T_0)$ , который несет информацию о соотношении между кинетической и тепловой энергиями в системе «жидкость–источник энергии». Экстремум производства энтропии  $\sigma = \sigma(u_{11})$  существует, если  $u_{11} = \bar{\tau}_1^2$ . Тип этого экстремума: максимум ( $\sigma = \sigma_{\max}$ ) в холодной области; минимум ( $\sigma = \sigma_{\min}$ ) в горячей области.

**Периодическое течение.** Рассмотрим еще один вариант гидродинамической интерпретации решения (15). Уравнение движения (5) с правой частью, определяемой формулами (14), запишем в виде:

$$d^2 \bar{u} / d\bar{y}^2 = -(\bar{F}_{11} + \bar{F}_{12});$$

$$\bar{F}_{11} = -\bar{u} \bar{\zeta}_r, \quad \bar{\zeta}_r = 2(1 + \bar{u}^2); \quad \bar{F}_{12} = 6\bar{u} \bar{\tau}^2,$$

где  $\bar{F}_{11}$  – внешняя сила трения (сток импульса),  $\bar{F}_{12}$  – источник импульса, конкурирующий с силой сопротивления. Форма записи уравнения энергии (7) с источником (19) остается прежней. При таком подходе условие положительности коэффициента  $\bar{\zeta}_r > 0$  выполняется автоматически, поэтому отсутствуют ограничения по координате  $y$ , и мы получаем возможность работать с периодическим решением (15) при  $y \in (-\infty, \infty)$ ,  $\varepsilon^2 \neq 1$ .

Генерация периодического поля (15) есть результат конкурентного взаимодействия источника и стока импульсов. Роль источника  $\bar{F}_{12}$  становится ясной из рассмотрения следующего частного случая. Пусть  $\varepsilon$  – малое число,  $\varepsilon^2 \ll 1$ . Тогда, согласно (15), имеем процесс, близкий к изотермическому:  $\bar{\tau} \sim 1$ ,  $\bar{u} \sim 2\varepsilon \sin(2y/y_1)$ ,  $\bar{F}_{12} \sim 12\varepsilon \sin(2y/y_1)$ . При  $\varepsilon \sim (1/12)$  получаем источник  $\bar{F}_{12} \sim \sin(2y/y_1)$ , который соответствует массовой периодической силе, инициирующей течение Колмогорова [2 – 4]. Значит, решение (15) при малых  $\varepsilon$  описывает течение Колмогорова, происходящее в условиях действия внешней силы трения  $\bar{F}_{11}$ . Дальнейший анализ основан на формулах (15) – (19); коэффициент сопротивления равен  $\bar{\zeta}_r = 2(1 + \bar{u}^2) = 2(2\bar{\tau}_1 \bar{\tau} - \bar{\tau}^2)$ ; источник энергии имеет вид:  $\bar{q}_v = 4\bar{\tau}(1 + 2\bar{\tau}^2 - 3\bar{\tau}_1 \bar{\tau})$ . На линиях неподвижности течения  $\bar{u} = 0$ ,  $2y/y_1 = \pi n_0$  получаем знакопеременную завихренность:  $\bar{\omega} = -2\varepsilon < 0$  при четном  $n_0$  (далее для краткости – линия  $\omega^-$ ),  $\bar{\omega} = 2\varepsilon > 0$  при нечетном  $n_0$  (далее – линия  $\omega^+$ ), где  $n_0 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  любое целое число. Таким образом, параметр  $\varepsilon > 0$  характеризует  $|\bar{\omega}|$  на линиях неподвижности. Кроме того, на этих линиях  $d\bar{\omega}/dy = 0$ , поэтому функция  $\bar{\omega}(y)$  имеет точку перегиба ( $d^2\bar{\omega}/dy^2 = 0$ ), расположенную между двумя соседними линиями неподвиж-

ности. Профиль температуры  $T(y)$  также имеет точки перегиба, находящиеся между теплоизолированными ( $q=0$ ) линиями неподвижности. Точка экстремума  $d\bar{\omega}/d\bar{\tau}=0$ ,  $\bar{\omega}=(\bar{\omega})_{\min}=-\bar{\tau}_1^2/4$  существует при  $\bar{\tau}=\bar{\tau}_*=\bar{\tau}_1/2$ . Значит, максимум  $(\bar{\omega}^2)_{\max}$  достигается на той изотерме  $\bar{\tau}=\bar{\tau}_*$ , где уравновешиваются сток и источник импульса,  $\bar{F}_{11}+\bar{F}_{12}=0$ . Этот экстремум существует в холодной области при  $2 \leq \varepsilon \leq 3$ , в горячей области при  $0,3 \leq \varepsilon \leq 0,6$ . Линиям неподвижности  $\omega^-$  и  $\omega^+$  соответствуют температуры  $\bar{\tau}_0^-= (1-\varepsilon)/(1+\varepsilon)$  и  $\bar{\tau}_0^+ = (1+\varepsilon)/(1-\varepsilon)$ . Рассмотрим расположение этих изотерм по отношению к  $\bar{\tau}=\bar{\tau}_*$ . Холодная область: если  $1 < \varepsilon < (2+\sqrt{3})$ , то  $\bar{\tau}_0^+ < \bar{\tau}_* < \bar{\tau}_0^- < 0$ ; по мере роста  $\varepsilon$  изотерма  $\bar{\tau}_*$  «выходит» из интервала  $[\bar{\tau}_0^+, \bar{\tau}_0^-]$  через его правую границу; при  $\varepsilon = (2+\sqrt{3})$  получаем  $\bar{\tau}_* = \bar{\tau}_0^-$ ; если  $\varepsilon > (2+\sqrt{3})$ , то  $\bar{\tau}_* < 0$  лежит справа от интервала  $[\bar{\tau}_0^+, \bar{\tau}_0^-]$ . Горячая область: если  $0 < \varepsilon < (2-\sqrt{3})$ , то  $\bar{\tau}_* > 0$  лежит вне интервала  $[\bar{\tau}_0^-, \bar{\tau}_0^+]$ , слева от него; по мере роста  $\varepsilon$  изотерма  $\bar{\tau}_*$  «входит» в этот интервал через его левую границу; при  $\varepsilon = (2-\sqrt{3})$  получаем  $\bar{\tau}_* = \bar{\tau}_0^-$ ; если  $(2-\sqrt{3}) < \varepsilon < 1$ , то  $\bar{\tau}_*$  лежит внутри интервала  $[\bar{\tau}_0^-, \bar{\tau}_0^+]$ .

На линиях нулевой завихренности (НЗ)  $\omega=0$  получаем:

$$2y/y_1 = 2\pi n_0 \pm \arccos[-2\varepsilon/(1+\varepsilon^2)], \quad (20)$$

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_1, \quad (\bar{u}^2)_{\max} = 4\varepsilon^2/(1-\varepsilon^2)^2,$$

здесь модуль скорости достигает своего максимального значения. Нетрудно видеть, что  $d\bar{\zeta}_r/d\bar{\tau}=0$  именно на линиях  $\omega=0$ . Таким образом, знак производной  $d\bar{\zeta}_r/d\bar{\tau}$  меняется при переходе через линию НЗ: имеем перемежаемость  $l$  и  $g$  типов сопротивления. Вместе с тем на линиях  $\omega^-$  знак  $d\bar{\zeta}_r/d\bar{\tau}$  отрицательный/положительный в холодной/горячей области. На линиях  $\omega^+$  знак  $d\bar{\zeta}_r/d\bar{\tau}$  положительный/отрицательный в холодной/горячей области. Отметим еще, что модуль завихренности на линиях неподвижности существенно влияет на состояние линий НЗ. Холодная область:  $d(q^2)/d(\varepsilon^2) < 0$ ,  $d(\bar{u}^2)_{\max}/d(\varepsilon^2) < 0$ . Горячая область:  $d(q^2)/d(\varepsilon^2) > 0$ ,  $d(\bar{u}^2)_{\max}/d(\varepsilon^2) > 0$ . В обеих температурных областях  $d(q^2)/d[(u^2)_{\max}] > 0$ .

Рассмотрим на линии неподвижности производство энтропии  $\sigma = \sigma_e$ ,  $\sigma_i = 0$  как функцию температуры этой линии. Холодная область: на линиях  $\omega^-$  происходит сток энергии  $q_v < 0$  и отсутствует экстремум функции  $\sigma(\bar{\tau}_0^-)$ . На линиях  $\omega^+$  имеем  $q_v > 0$  и получаем  $\sigma_{\min}$  при  $1 < \varepsilon < (2+\sqrt{3})$ ; после перехода через пороговое значение  $\varepsilon = 2+\sqrt{3}$  получаем  $\sigma_{\max}$  при  $(2+\sqrt{3}) < \varepsilon < (5+2\sqrt{6})$ ; дальнейший рост  $\varepsilon = \bar{\omega}/2$  приводит к исчезнове-



нию экстремума функции  $\sigma(\bar{\tau}_0^+)$ . Горячая область: на линиях  $\omega^+$  происходит сток энергии,  $q_v < 0$  и получаем  $\sigma_{\min}$  при  $(5 - 2\sqrt{6}) < \varepsilon < (2 - \sqrt{3})$ ; далее при  $(2 - \sqrt{3}) < \varepsilon < 1$  имеем  $\sigma_{\max}$ . На линиях  $\omega^-$  источник энергии  $q_v > 0$  и при всех  $\varepsilon \in (0,1)$  имеем  $\sigma_{\min}$ . Следовательно, в горячей области при  $(5 - 2\sqrt{6}) < \varepsilon < (2 - \sqrt{3})$  на всех линиях неподвижности имеем  $\sigma_{\min}$ ; по мере роста  $\varepsilon$  получаем для  $(2 - \sqrt{3}) < \varepsilon < 1$  перемежаемость типов экстремума  $\sigma_{\min}$  и  $\sigma_{\max}$  на линиях неподвижности с разными знаками  $\bar{\omega}$ . Общее свойство для холодной и горячей областей: на линиях  $\omega^+$  в соответствующих интервалах  $\varepsilon$  при возрастании  $\varepsilon$  происходит смена типа экстремума  $\sigma_{\min}$  на  $\sigma_{\max}$ . Различие в свойствах холодной и горячей областей: в холодной области нет перемежаемости типов экстремума, т.к.  $\sigma$  не имеет экстремумов на линиях  $\omega^-$ .

Рассмотрим энтропийные свойства линий НЗ (20). В холодной области на этих линиях  $q_v > 0$ ,  $\sigma > 0$ , а функция  $\sigma(u_{11})$ ,  $u_{11} = u_1^2 / (c_1 T_0)$  не имеет экстремума. В горячей области на линиях (20) в ходе производства энтропии преобладает сток энергии ( $q_v < 0, \sigma < 0$ ), а функция  $\sigma(u_{11})$  имеет минимум при  $u_{11} \bar{\tau}_1 = 1$ .

На линиях НЗ модуль теплового потока  $|q_1|$  постоянный, а знак переменный и совпадает со знаком выражения  $(-\bar{u} \bar{\tau}_1)$ , см. (17), (20). Зафиксируем  $q_1^2$  и изучим поведение  $\bar{\sigma} = \sigma \lambda T_0^2 / q_1^2$  как функции безразмерной частоты колебаний  $f$  по координате  $y$ ,

$$f^2 = 4(\lambda T_0)^2 / (y_1^2 q_1^2),$$

$$(\bar{\tau}_1^2 - 1) \bar{\tau}_1^2 = 1 / (u_{11}^2 f^2), \quad (\bar{u}^2)_{\max} + 1 = \bar{\tau}_1^2.$$

Расчеты показали, что в горячей области  $d\bar{\sigma} / d(f^2) < 0$ ,  $\bar{\sigma} < 0$ , т.е. экстремум отсутствует. В холодной области функция  $\bar{\sigma}(f^2) > 0$  имеет минимум при  $1 + 3\bar{\tau}_1 u_{11} = 0$ . На рис. 1 (холодная область), рис. 2 (горячая область) изображен профиль скорости  $\bar{u} = \bar{u}(2\bar{y})$  и схема расположения полос, образованных линиями неподвижности и линиями НЗ; стрелка указывает направление движения жидкости; принято обозначение  $\zeta = d\bar{\zeta}_r / d\bar{\tau}$ .

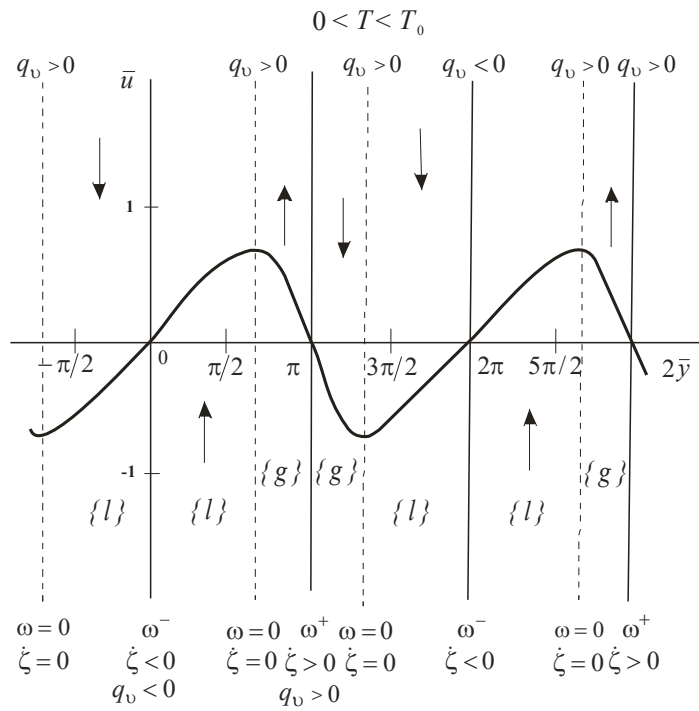


Рис. 1

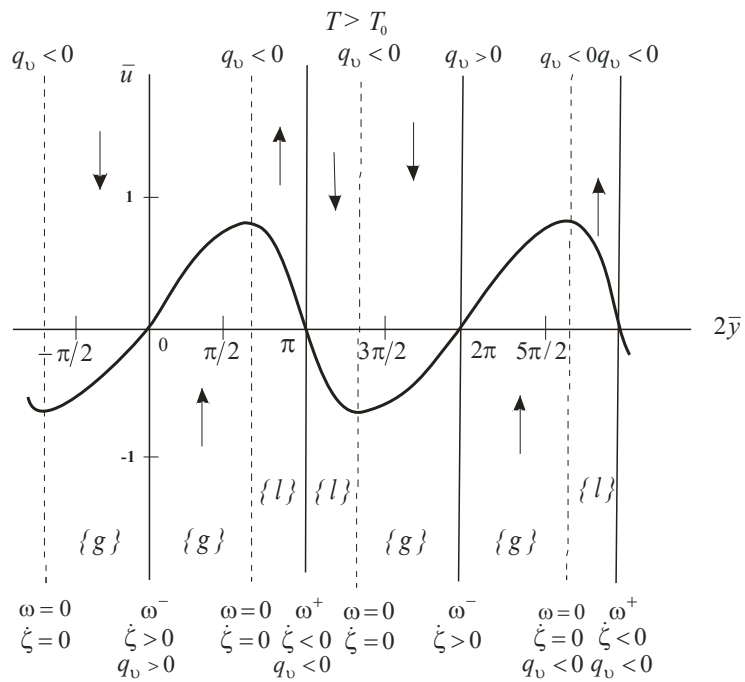


Рис. 2

Если рассматривать данное решение на отрезке  $2\bar{y} \in [0, \pi]$ , то получим течение в плоском канале с непроницаемыми теплоизолированными стенками. В этом случае линия НЗ разделяет область течения на два интервала с  $l$  и  $g$  типами сопротивления.

**Выводы.** Представлено новое точное изобарическое решение уравнений гидродинамики при наличии нелинейного внешнего сопротивления течению вязкой жидкости на плоскости. Рассмотрены три задачи: течение Куэтта в изотермическом и неизотермическом вариантах, а так же периодическое по координате течение. Установлено, что в изотермическом процессе диффузионная скорость движения вихря направлена поперек основного течения и генерируется внешним сопротивлением. В неизотермическом процессе удалось выполнить сопоставительный анализ свойств течения для двух различных по своим температурным свойствам типам сопротивления. Построено периодическое течение, которое есть результат конкурентного взаимодействия силы трения (сток импульса) и источника импульса. Обнаружены нетривиальные свойства этого течения, проявляющиеся на линиях неподвижности и линиях нулевой завихренности: принципиальная роль изотермы, на которой уравниваются сток и источник импульсов; перемежаемость типов сопротивления; влияние частоты колебаний и вихревых свойств потока на производство энтропии.

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды / *Л. И. Седов.* – М. : Наука, 1973 – Т.1. – 536 с.
2. *Гледзер Е. Б.* Системы гидродинамического типа и их применение / *Е. Б. Гледзер, Ф. В. Должанский, А. М. Обухов.* – М. : Наука, 1981. – 368 с.
3. *Обухов А. М.* Течение Колмогорова и его лабораторное моделирование / *А. М. Обухов* // Успехи математических наук. – 1983. – Т.38, Вып.4. – С.101 – 111.
4. *Должанский Ф. В.* Устойчивость и вихревые структуры квазидвумерных сдвиговых течений / *Ф. В. Должанский, В. А. Крымов, Д. Ю. Манин* // Успехи физических наук. – 1990. – Т.160, Вып.7. – С. 1 – 47.
5. *Должанский Ф. В.* О механических прообразах фундаментальных гидродинамических инвариантов и медленных многообразий / *Ф. В. Должанский* // Успехи физических наук. – 2005. – Т. 175, № 12. – С. 1257 – 1288.
6. *Картавых А. В.* Кластерная модель структуры расплавов в погранслое и ее гидродинамическое описание при моделировании процессов кристаллизации полупроводников в космосе / *А. В. Картавых, М. Г. Мильвидский, В. П. Гинкин, М. А. Забудько, О. М. Науменко* // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2004. – № 6. – С. 91 – 98.
7. *Гетлинг А. В.* Конвекция Рэлея – Бенара / *А. В. Гетлинг.* – М. : Эдиториал УРСС, 1999. – 248 с.
8. *Жоу Д.* Расширенная необратимая термодинамика / *Д. Жоу, Х. Касас-Баскес, Дж. Лебон.* – Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. – 528 с.
9. *Шабловский О. Н.* Нелинейные волновые уравнения и конкуренция источников энергии в двухкомпонентных системах / *О.Н. Шабловский* // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем. – М. : Янус – К. – 2010. – Вып. 13. – С. 78 – 89.
10. *Дынникова Г. Я.* Движение вихрей в двумерных течениях вязкой жидкости / *Г. Я. Дынникова* // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2003. – №5. – С.11 – 19.
11. *Шабловский О. Н.* Динамика вихрей и теплоперенос в потоке вязкой жидкости / *О. Н. Шабловский.* – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2001. – 142 с.

Гомельский государственный  
технический университет  
имени П. О. Сухого, Гомель

Получено 04.02.2011,  
в окончательном варианте 19.03.12