ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

9 • 2014

МАТЕМАТИКА

УДК 517.94

З. Н. Гладкая

О коэффициенте отражения оператора Шредингера с гладким потенциалом

(Представлено академиком НАН Украины Е. Я. Хрусловым)

Изучен характер убывания коэффициентов отражения оператора Шредингера с гладким потенциалом типа ступеньки в зависимости от числа производных потенциала и скорости его стремления к своим фоновым асимптотам.

Как известно, одним из важных этапов в решении задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ) $u_t + u_{xxx} - 6uu_x = 0$ с убывающими начальными данными $u(x,0) = q(x)$ является вопрос о скорости убывания при $x \to \pm\infty$[1] функций вида $F_\pm(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}} R_\pm(k)\mathrm{e}^{\pm 4\mathrm{i}k^3 t}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}kx}dk$, где $R_\pm(\sqrt{\lambda})$ — коэффициенты отражения соответствующего уравнения Шредингера

$$-\frac{d^2}{dx^2}f(x) + q(x)f(x) = \lambda f(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Функции $F_\pm$ являются основной частью ядер уравнений Марченко, поэтому скорость их убывания обусловливает скорость убывания решения $u(x,t)$ уравнения КдФ. При наличии достаточного числа производных у коэффициентов отражения и достаточно быстрого убывания этих производных на бесконечности эту скорость легко определить путем нескольких интегрирований по частям:

$$F_\pm(x,t) = \frac{1}{\pm\mathrm{i}k}\int\limits_{\mathbb{R}} (R'_\pm(k) \pm 12\mathrm{i}k^2 R(k))\mathrm{e}^{\pm 4\mathrm{i}k^3 t}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}kx}dk = \cdots .$$

В частности, для потенциала класса Шварца наличие всех производных $R_\pm$, убывающих быстрее любой степени k, было показано в работе [1]. Вместе с тем более точные оценки того, как гладкость начальных данных и количество их суммируемых моментов сказываются

[1]Здесь и ниже символ $\pm$ в предложении означает два независимых утверждения, одно для + случая, одно для $-$.

на аналогичных свойствах коэффициентов отражения, а значит, и на скорости убывания решения КдФ, не проводились. Кроме того, в отличие от убывающих начальных данных, где метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) является отнюдь не единственным в вопросе о разрешимости задачи Коши и классические методы исследования уравнений в частных производных тоже дают эффективные результаты, разрешимость уравнения КдФ с начальными данными типа ступеньки

$$q(x) \to c_+, \qquad x \to +\infty, \qquad q(x) \to c_-, \qquad x \to -\infty, \qquad c_+ \neq c_-, \tag{2}$$

не исследовалась другими методами, кроме МОЗР. Разрешимость в классе шварцевских возмущений фонов была получена в [2]. Для решения задачи Коши в более широких классах начальных данных в настоящей работе предлагаются уточненные оценки на операторы преобразования и на коэффициенты отражения для гладких потенциалов типа ступеньки. Результаты являются новыми и для убывающего случая. Введем необходимые определения.

Определение 1. Пусть $m \geqslant 1$ и $n \geqslant 0$ — фиксированные целые числа и $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ — n раз дифференцируемая функция. Будем говорить, что $f \in L_m^n(\pm)$, если[2] $f^{(n)} \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ и $\int\limits_{\mathbb{R}_\pm} |f^{(i)}(x)|\,|x|^m dx < \infty$, $i = 0, \ldots, n$.

Определение 2. Пусть c_+, c_- — заданные вещественные, а $m \geqslant 1$ и $n \geqslant 0$ — целые числа. Мы говорим, что функция $q(x)$ принадлежит классу $\mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$, если $q_+(x) := q(x) - c_+ \in L_m^n(+)$ и $q_-(x) := q(x) - c_- \in L_m^n(-)$.

В данной работе мы предполагаем, что потенциал задачи (1), (2) является функцией класса $\mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$ при произвольных наперед заданных m и n. Функции $q_\pm$ называются возмущениями потенциала относительно фонов, в данном случае возмущения имеют одинаковый характер стремления к своим асимптотам. Отметим, что прямая и обратная задачи рассеяния решены в классах $\mathcal{L}_2^0(0, c^2)$ [3] и $\mathcal{L}_1^0(0, -c^2)$ [4]. Гладкий случай $n \geqslant 1$ и случай большего числа моментов $m > 2$ подробно не изучены, а между тем именно они служат основой для использования метода обратной задачи рассеяния при решении задачи Коши для уравнения КдФ с начальными данными типа ступеньки.

Определение 3. Функция $g(\xi)$ принадлежит пространству $L_2(+\infty)$ (соответственно, $L_2(-\infty)$), если существует такое $b \gg 1$ ($b \ll -1$), что $g(\cdot) \in L_2(b, +\infty)$ (соответственно, $g(\cdot) \in L_2(-\infty, b)$). Будем говорить, что $g \in L_2(\infty)$, если $g \in L_2(+\infty) \bigcap L_2(-\infty)$.

Обозначим $k_\pm := \sqrt{\lambda - c_\pm}$, где $\sqrt{\cdot}$ — стандартная ветвь квадратного корня, которая отображает комплексную плоскость с разрезом вдоль луча $[c_\pm, +\infty)$ на верхнюю полуплоскость. Мы рассматриваем величины $k_\pm$ как спектральные параметры уравнения (1) наряду с параметром λ.

Решения Йоста $\phi_\pm(\lambda, x)$ уравнения (1) с потенциалом (2) — это решения с асимптотическим поведением $\phi_\pm(\lambda, x)\mathrm{e}^{\mp \mathrm{i} k_\pm x} \to 1$ при $x \to \pm\infty$. Они хорошо изучены для убывающего негладкого потенциала с первым суммируемым моментом [5], и эти результаты без изменений переносятся на потенциалы типа ступеньки классов $\mathcal{L}_i^0(c_+, c_-)$, $i = 1, 2$. Нижеследующие леммы 1 и 2 устанавливают асимптотическое поведение и свойства гладкости решений Йоста по локальным параметрам $k_\pm$, могут быть использованы как при решении прямой и обратной задач в классах $\mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$ при $m \geqslant 2$ и $n \geqslant 1$, так и для более сложных классов потенциалов. Они носят “односторонний” характер в том смысле, что мы не предписываем потенциалу никакого определенного асимтотического поведения на противоположной полуоси.

[2] Мы полагаем $f^{(n)} = f$ при $n = 0$.

Лемма 1. *Пусть* $q_\pm \in L_m^n(\pm)$, $n \geqslant 0$, $m \geqslant 2$. *Тогда при всех* $\lambda \in \operatorname{clos}\mathbb{C} \setminus [c_\pm, +\infty)$ *решение Йоста* $\phi_\pm(\lambda, x)$ *уравнения* (1) *представимо в виде*

$$\phi_\pm(\lambda, x) = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i} k_\pm x}\left(1 \pm \int\limits_0^{\pm\infty} B_\pm(x,y)\mathrm{e}^{\pm 2\mathrm{i} k_\pm y} dy\right), \tag{3}$$

где функция $B_\pm \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}_\pm \mapsto \mathbb{R}$ *имеет частные производные до* $n+1$ *порядка, удовлетворяющие следующим оценкам:*

$$\left|\frac{\partial^{s+l}}{\partial x^l\, \partial y^s} B_\pm(x,y) \pm q_\pm^{(s+l-1)}(x+y)\right| \leqslant C_{\pm\infty}(x)\nu_{\pm,l+s}(x)\nu_{\pm,l+s}(x+y), \qquad l+s \leqslant n+1,$$

где

$$\nu_{\pm,l}(x) = \sum_{i=0}^{l-2}(\sigma_\pm^{(i)}(x) + |q_\pm^{(i)}(x)|), \qquad l \geqslant 2, \qquad \nu_{\pm,1}(x) := \sigma_\pm^{(0)}(x),$$

$$\sigma_\pm^{(i)}(x) := \pm \int\limits_x^{\pm\infty} |q_\pm^{(i)}(\xi)| d\xi, \qquad i = 0, 1, \ldots, n, \qquad q_\pm(x) = q(x) - c_\pm,$$

и $C_{\pm\infty}(x) = C_{\pm\infty}(x, n) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ — *некоторая положительная функция, убывающая в направлении* $x \to \pm\infty$.

С помощью этой леммы доказывается следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть потенциал* q *уравнения* (1) *удовлетворяет условиям леммы 1. Тогда при больших* $k_\pm \in \mathbb{R}$ *решения Йоста* (3) *допускают асимптотическое разложение*

$$\phi_\pm(\lambda, x) = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i} k_\pm x}\left\{u_0^\pm(x) + \frac{u_1^\pm(x)}{2\mathrm{i}k_\pm} + \cdots + \frac{u_n^\pm(x)}{(2\mathrm{i}k_\pm)^n} + \frac{U_{n+1}^\pm(k_\pm, x)}{(2\mathrm{i}k_\pm)^{n+1}}\right\}, \tag{4}$$

где

$$u_0(x) = 1, \qquad u_l(x) = \int\limits_x^{\pm\infty}\left(\frac{d^2}{d\xi^2}u_{l-1}^\pm(\xi) - q_\pm(\xi)u_{l-1}^\pm(\xi)\right)d\xi, \qquad l = 1, \ldots, n+1, \tag{5}$$

а функции $U_{n+1}^\pm(k_\pm, x)$ *и* $\dfrac{\partial}{\partial x}U_{n+1}^\pm(k_\pm, x)$ *при каждом* x *являются* $m-1$ *дифференцируемыми по параметру* $k_\pm$ *и имеют следующее поведение при* $k_\pm \to \infty$ *и* $0 \leqslant s \leqslant m-1$:

$$\frac{\partial^s}{\partial {k_\pm}^s}U_{n+1}^\pm(k_\pm, x) \in L_2(\infty), \qquad \frac{\partial^s}{\partial {k_\pm}^s}\left(\frac{1}{k_\pm}\frac{\partial}{\partial x}U_{n+1}^\pm(k_\pm, x)\right) \in L_2(\infty).$$

Примечание 1. Формула (4) допускает естественное переразложение по степеням исходного спектрального параметра λ. А именно, обозначая $\lambda = k^2$, имеем

$$\phi_\pm(\lambda, x) = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i} k_\pm x}\left\{1 + \frac{v_1^\pm(x)}{2\mathrm{i}k} + \cdots + \frac{v_n^\pm(x)}{(2\mathrm{i}k)^n} + \frac{V_{n+1}^\pm(k, x)}{(2\mathrm{i}k)^{n+1}}\right\}, \tag{6}$$

где функции $v_l^{\pm}(x)$ не удовлетворяют соотношению (5), но имеют те же существенные свойства, что и функции $u_l^{\pm}(x)$. А именно, функции $v_l^{\pm}(x)$ являются полиномами с вещественными коэффициентами от функций $q_{\pm}, \ldots, {q_{\pm}}^{l-2}$ и их интегралов. Тем самым функция $v_n^{\pm}(x)$ имеет по меньшей мере еще две производных. При этом функция $V_{n+1}^{\pm}(k,x)$ удовлетворяет тем же свойствам, что и функция $U_{n+1}^{\pm}(k_{\pm},x)$:

$$\frac{\partial^s}{\partial k^s} V_{n+1}^{\pm}(k,x), \qquad \frac{\partial^s}{\partial k^s}\left(\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial x} V_{n+1}^{\pm}(k,x)\right) \in L_2(\infty), \qquad 0 \leqslant s \leqslant m-1. \tag{7}$$

Лемма (2) а также формулы (6) и (7) позволяют обосновать асимптотическое разложение для функций Вейля

$$\mathfrak{m}_{\pm}(\lambda,x) = \frac{\dfrac{\partial}{\partial x}\phi_{\pm}(\lambda,x)}{\phi_{\pm}(\lambda,x)} \tag{8}$$

уравнения (1) с потенциалом $q \in \mathcal{L}_m^n(c_+,c_-)$. Заметим, что из формулы (3.1.20) работы [5] следует, что для любого $b > 0$ существует такое $\lambda_0 > 0$, что при всех $\lambda > \lambda_0$ функция $\phi(\lambda,x)$ не имеет нулей при $|x| < b$. Тем самым функция $\mathfrak{m}_{\pm}(\lambda,x)$ корректно определена при больших положительных λ и при x на любом компакте $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}$.

Лемма 3. *Пусть потенциал q уравнения* (1) *принадлежит классу $\mathcal{L}_m^n(c_+,c_-)$. Тогда при больших $\lambda = k^2 \in \mathbb{R}_+$ функции* (8) *допускают представление*

$$\mathfrak{m}_{\pm}(\lambda,x) = \pm \mathrm{i}k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\kappa_j(x)}{(\pm 2\mathrm{i}k)^j} + \frac{\kappa_n^{\pm}(k,x)}{(2\mathrm{i}k)^n}, \tag{9}$$

где

$$\kappa_1(x) = q(x), \qquad \kappa_{l+1}(x) = -\frac{d}{dx}\kappa_l(x) - \sum_{j=1}^{l-1}\kappa_{l-j}(x)\kappa_j(x), \tag{10}$$

а функции $\kappa_n^{\pm}(k,x)$ являются $m-1$ раз дифференцируемыми по параметру k, и при этом

$$\frac{\partial^s}{\partial k^s}\kappa_n^{\pm}(\cdot,x) \in L_2(\infty), \qquad s \leqslant m-1, \qquad \forall\, x \in \mathcal{K}. \tag{11}$$

Отметим, что рекуррентная формула (10) хорошо известна в случае гладких ограниченных потенциалов оператора Шредингера с предельной точкой Вейля на $+\infty$ или $-\infty$. Они возникают непосредственно из уравнения Рикатти для функций Вейля. В самом деле, представив $\mathfrak{m}_{\pm}$ в виде $\mathfrak{m}_{\pm}(\lambda,x) = \pm\mathrm{i}k + \kappa_{\pm}(\lambda,x)$, мы видим из формул (1) и (8), что $\kappa_{\pm}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\kappa_{\pm}(\lambda,x) \pm 2\mathrm{i}k\kappa_{\pm}(\lambda,x) + \kappa_{\pm}^2(\lambda,x) - q(x) = 0, \qquad \lambda = k^2. \tag{12}$$

Из формул (6), в свою очередь, следует, что $\kappa_{\pm}(\lambda,x) = \sum\limits_{j=1}^{n'} \kappa_j^{\pm}(x)(\pm 2\mathrm{i}k)^{-j}$ + остаточный член. Подставляя это разложение в (12), мы получаем формулы (10), одинаковые для обеих функций Вейля. При этом априори неясно, какова величина числа n' и каков характер поведения остаточного члена. Формулой (9) мы уточняем число членов разложения для потенциала данного класса, а также показываем, что при ее дифференцировании $m-1$ раз по k остаточный член будет оставаться величиной $o(k^{-n})$ (см. (11)).

На основании леммы 3 мы приходим к следующему заключению.

Лемма 4. *Пусть $q \in \mathcal{L}^n_m(c_+, c_-)$ при некоторых $n \geqslant 1$ и $m \geqslant 2$. Тогда при $x \in \mathcal{K}$, достаточно больших положительных λ и $k^2 = \lambda$ функция*

$$H_n^{\pm}(k,x) := k^n(\overline{\mathfrak{m}_{\pm}(\lambda,x)} - \mathfrak{m}_{\mp}(\lambda,x))$$

является $m-1$ дифференцируемой по параметру k, причем

$$\frac{\partial^s}{\partial k^s} H_n^{\pm}(k,x) \in L_2(\infty), \qquad 0 \leqslant s \leqslant m-1.$$

Функция $G^{\pm}(k,x) := \mathfrak{m}_{\pm}(\lambda,x) - \mathfrak{m}_{\mp}(\lambda,x)$ также $m-1$ раз дифференцируема по параметру k при больших k, причем равномерно на компакте $\mathcal{K}$

$$G^{\pm}(k,x) = \pm 2\mathrm{i}k\left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right), \qquad \frac{\partial^s}{\partial k^s} G^{\pm}(k,x) = O(1), \qquad 0 \leqslant s \leqslant m-1.$$

Обозначим через $W(\phi,\psi)(\lambda) = \dfrac{\partial}{\partial x}\psi(\lambda,x)\phi(\lambda,x) - \dfrac{\partial}{\partial x}\phi(\lambda,x)\psi(\lambda,x)$ вронскиан двух решений уравнения (1). Как известно [6], правый (R_+) и левый (R_-) коэффициенты отражения задачи рассеяния (1), (2) определяются по формулам

$$R_{\pm}(\lambda) = -\frac{W(\phi_{\mp}, \overline{\phi_{\pm}})(\lambda)}{W(\phi_{\mp}, \overline{\phi_{\pm}})(\lambda)}.$$

Тем самым при больших положительных λ, где $\phi_-(\lambda,0)\phi_+(\lambda,0) \neq 0$ [5], эти коэффициенты определяются по формулам

$$R_{\pm}(\lambda) = -\frac{\overline{\phi_{\pm}(\lambda,0)}}{\phi_{\pm}(\lambda,0)} \frac{\overline{\mathfrak{m}_{\pm}(\lambda,0)} - \mathfrak{m}_{\mp}(\lambda,0)}{\mathfrak{m}_{\pm}(\lambda,0) - \mathfrak{m}_{\mp}(\lambda,0)} = -\frac{\overline{\phi_{\pm}(\lambda,0)}}{\phi_{\pm}(\lambda,0)} \frac{H_n^{\pm}(k,0)}{G^{\pm}(k,0)} \frac{1}{k^n},$$

где функции $H_n^{\pm}(k,x)$ и $G^{\pm}(k,x)$ определены в лемме 4. На основании этой леммы, а также формул (6) и (7), взятых при $x = 0$, мы приходим к следующему результату.

Теорема 1. *Пусть $R_{\pm}(\lambda)$ — коэффициенты отражения задачи рассеяния для оператора Шредингера (1) с потенциалом (2), удовлетворяющим при некоторых $n \geqslant 1$ и $m \geqslant 2$ условию $q \in \mathcal{L}^n_m(c_+, c_-)$. Тогда при достаточно больших положительных λ для этих коэффициентов и их производных по параметру $\sqrt{\lambda}$ имеет место асимптотическое представление*

$$\frac{\partial^s R_{\pm}(\lambda)}{\partial \sqrt{\lambda}^s} = \frac{Q_{\pm,s}(\lambda^{1/2})}{\lambda^{\frac{n+1}{2}}}, \qquad s = 0, \ldots, m-1,$$

где $Q_{\pm,s}(\cdot) \in L_2(\infty)$.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю И. Е. Егорову за поддержку и интерес к работе.

1. *Marchenko V. A.* The inverse scattering problem and its applications to NLPDE // Scattering and Inverse Scattering in Pure and Applied Science / Ed. by R. Pike, P. Sabatier. – San Diego: Academic Press, 2002. – P. 1695–1706.
2. *Egorova I., Grunert K., Teschl G.* On the Cauchy problem for the Korteweg–de Vries equation with steplike finite-gap initial data I. Schwartz-type perturbations // Nonlinearity. – 2009. – **22**. – P. 1431–1457.
3. *Cohen A., Kappeler T.* Scattering and inverse scattering for steplike potentials in the Schrödinger equation // Indiana Univ. Math. J. – 1985. – **34**, No 1. – P. 127–180.
4. *Базарган Дж.* Прямая и обратная задача рассеяния на всей оси для одномерного оператора Шредингера с потенциалом типа ступеньки // Доп. НАН України. – 2008. – No 4. – С. 7–11.
5. *Marchenko V. A.* Sturm–Liouville operators and applications. – Basel: Birkhäuser, 1986. – 395 p.
6. *Буслаев В. С., Фомин В. Н.* К обратной задаче рассеяния для одномерного уравнения Шредингера на всей оси // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1962. – **17**, No 1. – P. 56–64.

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 24.03.2014

З. М. Гладка

Про коефіцієнт відбиття оператора Шредінгера з гладким потенціалом

Вивчено характер зменшення коефіцієнтів відбиття оператора Шредінгера з гладким потенціалом типу сходинки залежно від числа похідних потенціалу та швидкості його прямування до своїх фонових асимптот.

Z. M. Gladka

On a reflection coefficient for the Schrödinger operator with a smooth potential

The decaying properties of the reflection coefficients are studied for the Schrödinger operator with a smooth steplike potential depending on the number of derivatives of the potential and its speed of tending to its background asymptotics.