Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

8 • 2014

МАТЕМАТИКА

УДК 515.168.3

Д. В. Болотов

О слоениях сфер

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Борисенко)

Дается ответ на вопрос Г. Штака о существовании на сферах слоений коразмерности один неотрицательной кривизны.

Пусть $\mathcal{F}$ — *слоение неотрицательной кривизны (кривизны Риччи)* на римановом многообразии M. Это означает, что все слои $\mathcal{F}$ в индуцируемой метрике имеют неотрицательную секционную кривизну (кривизну Риччи).

Примером слоения неотрицательной кривизны является знаменитое слоение Риба на стандартной трехмерной сфере постоянной кривизны. В [1] классифицированы все замкнутые трехмерные ориентированные многообразия, допускающие трансверсально ориентируемые слоения неотрицательной кривизны. В [2] доказано, что сферы S^{2n+1} положительной секционной кривизны при $n > 1$ не допускают слоения коразмерности один неотрицательной кривизны Риччи. Однако до сих пор было не ясно, *могут ли произвольные римановы многообразия, гомеоморфные S^{2n+1}, $n > 1$, иметь слоение коразмерности один неотрицательной секционной кривизны*? Этот вопрос поставлен Г. Штаком в [3].

В данной работе докажем, что из всех нечетномерных сфер только трехмерная сфера допускает слоение неотрицательной кривизны, что дает исчерпывающий ответ на вопрос, поставленный Г. Штаком. Мы доказываем следующую теорему.

Теорема А. *Многообразие M, гомеоморфное нечетномерной сфере S^n, где $n \geqslant 5$, не допускает C^2-слоения коразмерности один неотрицательной кривизны.*

Ранее автором была описана топологическая структура замкнутых многообразий, допускающих слоения коразмерности один неотрицательной кривизны Риччи. А именно, была доказана следующая теорема:

Теорема 1 [4, 5]. *Пусть $\mathcal{F}$ — трансверсально ориентируемое слоение коразмерности один неотрицательной кривизны Риччи на замкнутом ориентируемом римановом многообразии M. Тогда $\mathcal{F}$ является слоением почти без голономии и выполнена одна из следующих возможностей:*

1. Все слои всюду плотны и M является расслоением над S^1.

2. F содержит компактный слой и M можно разбить конечным числом компактных слоев на блоки[1] *одного из следующих типов:*

A) исключительный блок: B гомеоморфен $K \times I$, где K является компактным слоем слоения и слой $K \times 0$ является предельным для множества компактных слоев;

B) плотный блок: все внутренние слои диффеоморфны типичному слою L и плотны в B;

C) собственный блок: все внутренние слои диффеоморфны типичному некомпактному слою L и являются вложенными подмногообразиями в B. В этом случае $\operatorname{int} B$ является расслоением над S^1 со слоем L.

Если B — неисключительный блок, то $\widetilde{\operatorname{int} B} \simeq \widetilde{L} \times \mathbb{R}$, а его фундаментальная группа описывается групповым расширением

$$1 \to \pi_1(L) \to \pi_1(B) \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}^k \to 0, \qquad (1)$$

где L — типичный внутренний слой блока B. Более того, $k \geqslant 1$ и $k = 1$ тогда и только тогда, когда блок собственный. Если, более того, $\mathcal{F}$ — слоение неотрицательной секционной кривизны, то граница каждого блока имеет максимум две компоненты связности.

Ключевым этапом в доказательстве теоремы A является доказательство следующего утверждения.

Утверждение 1. *Пусть B — блок без внутренних компактных слоев, оснащенный слоением неотрицательной кривизны Риччи и граница ∂B имеет более одной компоненты связности. Тогда каждый внутренний слой является регулярным изометрическим накрытием любого граничного слоя $K \in \partial B$, а B является h-кобордизмом.*

Набросок доказательства.

Шаг 1. Покажем, что внутри B найдется слой L', содержащий прямую.

Рассмотрим произвольный типичный слой L внутри B и последовательности точек $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ на L, сходящиеся к $x \in K_1$ и $y \in K_2$, где K_1 и K_2 — компактные слои, принадлежащие границе блока B. Мы можем считать, что $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ принадлежат непересекающимся открытым воротникам U_1 и U_2 слоев K_1 и K_2 соответственно. Пусть l_i — кратчайшая в L, соединяющая $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$. Нетрудно показать, что $|l_i| \to \infty$. Обозначим через $z \in L' \subset B \setminus (U_1 \bigcup U_2)$ предельную точку для l_i, которая является предельной для множества точек $z_i \in l_i$. Пусть $l_j(r) \subset l_j$ — подпоследовательность кратчайших длины r, проходящих через z_j, и сходящаяся к кривой $l(r)$ на слое L' (см. [6, лемма 2.4]). По построению $z \in l(r)$. Предположим, что $l(r)$ — не кратчайшая на L'. Тогда соединим концы $l(r)$ кратчайшей l' в L'. Замкнутая кривая $\gamma := l' \circ l^{-1}(r)$ должна представлять нетривиальную голономию слоя L', так как иначе для достаточно большого номера j мы найдем кривую l'_j, соединяющую концы кривой $l_j(r)$ и имеющую меньшую длину, чем $l_j(r)$, что противоречит тому, что $l_j(r)$ — кратчайшая. Однако по теореме 1 слой L' должен иметь тривиальную голономию. Это противоречие доказывает, что $l(r)$ — кратчайшая длины r. Устремляя r к бесконечности получим последовательность кратчайших в L', проходящих через точку z, которая, очевидно, содержит подпоследовательность, сходящуюся к прямой l в L'.

Шаг 2. Покажем, что каждый внутренний слой является изометрическим накрытием любого граничного слоя $K \in \partial B$.

По теореме Чигера–Громолла о расщеплении следует, что L' изометрично прямому произведению $P \times E^1$. Из построения также видно, что замыкание $\bar{l}$ содержит точки как K_1,

[1] Блоком мы называем компактное слоеное многообразие с границей, состоящей из компактных слоев.

так и K_2. Значит, существует последовательность точек $p_i \in l$, сходящихся к $p \in K_1$, и последовательность точек $q_i \in l$, сходящихся к $q \in K_2$, а вместе с ними и последовательности параллельных переносов $f_i \colon L' \to L'$ и $g_i \colon L' \to L'$ таких, что $f_i(p_j) = p_{j+1}$, $g_i(q_j) = q_{j+1}$, и сходящихся к изометрическим накрытиям $f \colon L' \to K_1$ и $g \colon L' \to K_2$ соответственно (см. [6, лемма 2.5]). В частности, отсюда следует, что слой L' имеет кокомпактную группу изометрий. Из [6, теорема 2.6] следует, что в случае, когда блок B плотен, любые два типичных слоя изометричны и любой типичный слой является изометрическим накрытием любого граничного компактного слоя. А если блок B собственный, то всякий типичный слой имеет два конца и расщепляется в прямое произведение $S \times \mathbb{R}$ (см. [7]), а значит, также изометрически накрывает любой граничный компактный слой. В частности, отсюда следует, что все типичные слои локально изометричны K_1 и имеют общее универсальное накрытие $\widetilde{K}_1$. Аналогично доказывается, что все типичные слои имеют с любым граничным компактным слоем изометричные универсальные накрытия.

Шаг 3. Покажем, что B является h-кобордизмом.

Всякий сфероид $\phi \colon S^l \to L'$ свободно гомотопен сфероидам $f_k \circ \phi$, сходящимся к сфероиду $f \circ \phi$, свободно гомотопному $f_k \circ \phi$ в B для больших k, так как для больших k отображение f_k близко к f. Обозначим через F_t гомотопию, соединяющую сфероиды ϕ и $f \circ \phi$. Вспомним, что любое накрытие, в частности f, индуцирует изоморфизм старших гомотопических групп и мономорфизм фундаментальных групп. Рассмотрим коммутативную диаграмму, индуцируемую включениями $i^{L'} \colon L' \to B$, $i^{K_1} \colon K_1 \to B$ и накрытием $f \colon L' \to K_1$:

$$\begin{tikzcd}
\pi_l(B, f(y_0)) & \pi_l(K_1, f(y_0)) \arrow[l, "i_*^{K_1}"'] \\
\pi_l(L', y_0) \arrow[u, "\psi_\alpha i_*^{L'}"] \arrow[ur, "f_*"] &
\end{tikzcd}$$

где $\alpha \colon I \to B$ обозначает путь $F_t(y_0)$, а $\psi_\alpha \colon \pi_l(B, y_0) \to \pi_l(B, f(y_0))$ — соответствующий изоморфизм гомотопических групп. Так как $\widetilde{\operatorname{int} B} \simeq \widetilde{L}' \times \mathbb{R}$, то $i_*^{L'}$ — изоморфизм для $l \geqslant 2$. А так как любое накрытие индуцирует изоморфизм старших гомотопических групп и мономорфизм фундаментальных групп, то для $l \geqslant 2$ гомоморфизм $i_*^{K_1}$ является изоморфизмом. Рассмотрим случай $l = 1$. Из (1) следует, что $i_*^{L'}$ — мономорфизм. Но $i_*^{K_1}$ — также мономорфизм, так как все слои в блоке B имеют кокомпактную группу изометрий, а значит, являются равномерно односвязными (см. [5, теорема 10]). Из мономорфности гомоморфизмов f_* и $i_*^{K_1}$ и того, что группа $\psi_\alpha^{-1} i_*^{K_1} f_* \pi_1(L') = i_*^{L'}(\pi_1(L'))$ нормальна в $\pi_1(B)$ (см. (1)), легко следует, что группа $f_*\pi_1(L')$ нормальна в $\pi_1(K_1)$. Действительно, для любых $\alpha \in f_*\pi_1(L')$ и $\beta \in \pi_1(K_1)$ найдется $\gamma \in f_*\pi_1(L')$ такой, что $\psi_\alpha^{-1} i_*^{K_1}(\gamma) = \psi_\alpha^{-1} i_*^{K_1}(\beta\alpha\beta^{-1}) = \psi_\alpha^{-1} i_*^{K_1}(\beta) \psi_\alpha^{-1} i_*^{K_1}(\alpha) (\psi_\alpha^{-1} i_*^{K_1}(\beta))^{-1} = \psi_\alpha^{-1} i_*^{K_1}(\beta) i_*^{L'}(\alpha') (\psi_\alpha^{-1} i_*^{K_1}(\beta))^{-1} \in i_*^{L'}(\pi_1(L'))$, где $\alpha = f_*\alpha'$. Из мономорфности $\psi_\alpha^{-1} i_*^{K_1}$ следует, что $\beta\alpha\beta^{-1} = \gamma$.

Из [6, утверждение 1.2] следует, что слой L', будучи регулярным накрытием замкнутого многообразия неотрицательной кривизны Риччи, изометричен риманову произведению $S \times E^k$, где S — компактное многообразие неотрицательной кривизны Риччи.

Теперь, дословно повторяя рассуждения в [5, предложение 2], можно доказать, что число связных компонент ∂B не превосходит двух. Аналогично тому, как это было сделано в [5, следствие 3], доказывается, что если $i_* \colon \pi_1(K_i) \to \pi_1(B)$ — гомоморфизм, индуцированный включением любой из связных компонент границы, то композиция $\phi \circ i_*$ — эпиморфизм, где ϕ — гомоморфизм из (1). Ясно, что $i_*^{K_1}(\pi_1(K_1, f(y_0))$ содержит $\psi_\alpha i_*^{L'}(\pi_1(L', y_0))$. Отсюда следует эпиморфность $i_*^{K_1}\colon \pi_1(K_1)\to\pi_1(B)$. Мономорфность $i_*^{K_1}$ отмечалась выше. Значит, вложение $i^{K_1}\colon K_1\to B$ является гомотопической эквивалентностью. По этим же соображениям $i^{K_2}\colon K_2\to B$ является гомотопической эквивалентностью, а значит, B является h-кобордизмом, что доказывает утверждение.

Набросок доказательства теоремы A**.** Предположим, что $\mathcal{F}$–C^2-слоение коразмерности один неотрицательной кривизны на M. Так как M односвязно и $\mathcal{F}$ имеет полиномиальный рост слоев, то $\mathcal{F}$ обладает компактным слоем (см. [8]). Поэтому мы можем представить M в виде $M=A\bigcup B$, где $A\bigcap B$ — объединение блоков из теоремы 1, имеющих две компоненты связности границы, если такие блоки существуют, и $A\bigcap B$ — единственный компактный слой в противном случае. Тогда $C=M\setminus\operatorname{int}B$ и $D=M\setminus\operatorname{int}A$ — блоки с одной компонентой связности границы. Из утверждения 1 следует, что вложения $\partial C\to A\bigcap B$ и $\partial D\to A\bigcap B$ являются гомотопическими эквивалентностями.

Шаг 1. Покажем, что блоки C и D являются собственными, а $\dim S=n-3$, где S — душа типичного слоя L в блоке C (D).

Из точной гомологической последовательности Майера–Вьеториса

$$\cdots\to H_2(M;\mathbb{R})\to H_1(A\textstyle\bigcap B;\mathbb{R})\xrightarrow{(i_*^A,i_*^B)} H_1(A;\mathbb{R})\oplus H_1(B;\mathbb{R})\to H_1(M;\mathbb{R})\to\cdots, \tag{2}$$

учитывая, что средние гомологии M нулевые, а $\beta_1(A)$ и $\beta_1(B)$ нетривиальны (это следует, например, из эпиморфности ϕ в (1)), имеем (i_*^A,i_*^B) — изоморфизм. Следовательно, $\operatorname{Ker}i_*^A\cong\operatorname{Im}i_*^B\neq0$ и $\operatorname{Ker}i_*^B\cong\operatorname{Im}i_*^A\neq0$. Теперь рассмотрим кусок когомологической последовательности Майера–Вьеториса с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$:

$$\begin{aligned}\cdots\to H^{n-1}(M;\mathbb{Z}_2)\to H^{n-1}(A;\mathbb{Z}_2)\oplus H^{n-1}(B;\mathbb{Z}_2)\to H^{n-1}(A\textstyle\bigcap B;\mathbb{Z}_2)\to\\ \to H^n(M;\mathbb{Z}_2)\to0.\end{aligned}\tag{3}$$

Так как $H^{n-1}(A\bigcap B;\mathbb{Z}_2)\cong H^{n-1}(\partial C;\mathbb{Z}_2)\cong H^n(M;\mathbb{Z}_2)\cong\mathbb{Z}_2$, а $H^{n-1}(M;\mathbb{Z}_2)=0$, то $H^{n-1}(A;\mathbb{Z}_2)\cong H^{n-1}(C;\mathbb{Z}_2)=0$ и $H^{n-1}(B;\mathbb{Z}_2)\cong H^{n-1}(D;\mathbb{Z}_2)=0$. Из спектральной последовательности регулярного $\mathbb{Z}^k$-накрытия (1) с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ следует, что максимальная по градуировке ненулевая группа когомологий $H^i(C;\mathbb{Z}_2)$ изоморфна группе $H^k(\mathbb{Z}^k;\{H^l(S;\mathbb{Z}_2)\})=\mathbb{Z}_2$, где l — размерность души S типичного слоя L. Следовательно, $k+l\leqslant n-2$. Если предположить, что $k+l<n-2$, то $\oplus_{s+p=n-2}E_2^{sp}=\oplus_{s+p=n-2}H^s(\mathbb{Z}^k;\{H^p(S;\mathbb{R})\})=0$, и по двойственности Пуанкаре имеем $H^{n-2}(C;\mathbb{R})\overset{PD}{\cong}H_2(C,\partial C;\mathbb{R})=0$. Но тогда, применяя точную гомологическую последовательность пары $(C,\partial C)$, получим $\operatorname{Ker}i_*^A=0$, что противоречит вышесказанному. Следовательно, $k+l=n-2$ и $H^k(\mathbb{Z}^k;\{H^l(S;\mathbb{R})\})\cong H^{n-2}(C;\mathbb{R})\cong\mathbb{R}$. Тогда из двойственности Александера следует, что $H^{n-2}(C;\mathbb{R})\cong H_1(D;\mathbb{R})\cong\mathbb{R}$. Из аналогичных соображений имеем $H_1(C;\mathbb{R})\cong H^{n-2}(D;\mathbb{R})\cong\mathbb{R}$. Поэтому $k=1$ в (1), и по теореме 1 блоки C и D являются собственными, а слоение внутри этих блоков является расслоением над S^1. Заметим, что так как $k=1$, то размерность души S типичного слоя L как в C, так и в D равна $n-3$.

Шаг 2. Покажем, что на самом деле $L\simeq S\times\mathbb{R}^2$.

Без ограничения общности рассмотрим блок C. По теореме Чигера–Громолла [7] всякий типичный слой L в C диффеоморфен нормальному расслоению ν со слоем $\mathbb{R}^2$ над своей душой $S\subset L$. Заметим, что душа S, а значит, и расслоение ν должны быть ориентируемы, так как иначе из спектральной последовательности расслоения $\xi\colon L\to\operatorname{int}C\to S^1$ следовало бы, что $H^{n-2}(C,\mathbb{R})\cong H^1(S^1;\{H^{n-3}(S;\mathbb{R})\})=0$, что противоречит вышесказанному. Теперь покажем, что расслоение ν тривиально. Для этого достаточно установить, что класс Эйлера $e(\nu) = 0$. Рассмотрим $A\bigcap B$ вместе с открытыми воротниками U_1 и U_2 граничных слоев ∂C и ∂D соответственно. Обозначим это объединение через U. Так как фундаментальная группа компактного слоя содержит нормальную свободную абелеву группу $\mathbb{Z}^k$ конечного индекса, рассмотрим конечнолистное накрытие $p\colon \widehat{U} \to U$, соответствующее подгруппе $\mathbb{Z}^k$. По теореме об s-кобордизме $p^{-1}(A\bigcap B) \simeq M_0 \times T^k \times I$, где $M_0 \times T^k \simeq \widehat{\partial C} := p^{-1}(\partial C)$, а M_0 компактно и односвязно. Используя цитируемую выше теорему Нисимори и метрическую структуру в $\widehat{\partial C} \simeq M_0 \times T^k$ (см. [7]), нетрудно показать, что существует инвариантное расслоение $\widehat{\xi}_1\colon \widehat{N} \to \widehat{\partial C} \to S^1$ относительно действия конечной группы G накрытия $p\colon \widehat{U} \to U$, где $\widehat{N}$ — ориентируемое подмногообразие в теореме Нисимори, являющееся в данном случае вполне геодезическим подмногообразием $M_0 \times T^{k-1} \subset M_0 \times T^k$. Образ N слоя $\widehat{N}$ в ∂C должен представлять нетривиальный элемент $[N]$ в $H_{n-2}(\partial C)$, поэтому образ расслоения $\widehat{\xi}_1$ относительно накрытия p является расслоением $\xi_1\colon N \to \partial C \to S^1$. Используя структуру слоения в окрестности компактного слоя (см. [9, теорема 1, пункт (3)]), нетрудно построить трансверсальное вложение $i^{tr}\colon \partial C \to C$, гомотопное вложению границы $i\colon \partial C \to C$, индуцирующее послойное отображение расслоений $\xi_1 \to \xi$ над одной и той же базой S^1. При этом ограничение гомотопии на N осуществляет трансверсальное вложение $N \times [0, t) \to C$ такое, что $N^r = N \times r$, где $0 < r < t$, разбивает слой L на два куска, один из которых гомеоморфен $N \times \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Пусть $\nu^R\colon S^1 \to E_R \to S$ обозначает сферическое радиуса R расслоение, а $E_{\geqslant R} \simeq E_R \times \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ — множество векторов длины $\geqslant R$ в расслоении ν. Напомним, что тотальное пространство расслоения ν диффеоморфно слою L. Нетрудно найти действительные числа R_1, R_2, r_1, r_2, для которых имеем вложения $E_{R_1} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0} \subset N^{r_1} \times \times \mathbb{R}_{\geqslant 0} \subset E_{R_2} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0} \subset N^{r_2} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Так как сквозные вложения $E_{R_1} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0} \subset E_{R_2} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ и $N^{r_1} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0} \subset N^{r_2} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ являются гомотопическими эквивалентностями, то вложение $I\colon N^{r_1} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0} \subset E_{R_2} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ индуцирует изоморфизмы групп гомологий и гомотопических групп, а значит, I является гомотопической эквивалентностью. Для простоты изложения отождествим N^{r_1} с N. Вложение слоев $\eta\colon N \to L$ можно представить в виде композиции вложений $N \times 0 \xrightarrow{s} N \times \mathbb{R}_{\geqslant 0} \xrightarrow{I} E_{R_2} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0} \xrightarrow{J} L$. Поэтому если $e(\nu) \in H^2(S; \mathbb{R})$ нетривиален, то класс гомологий слоя $[S^1]$ расслоения ν^R тривиален в $H_1(E_R; \mathbb{R})$ и $J\colon E_{R_2} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to L$ индуцирует изоморфизм в первых гомологиях, а значит, вложение $i^{tr}\colon \partial C \to C$ также индуцирует изоморфизм в первых гомологиях. Но из гомологической последовательности Майера–Вьеториса следует, что $H_1(\partial C; \mathbb{R}) \cong H_1(C; \mathbb{R}) \oplus H_1(D; \mathbb{R})$. Однако, согласно вышедоказанному, $H_1(D; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$, что приводит к противоречию. Следовательно, $e(\nu) = 0$, $E_R \simeq S \times S^1$, а $L \simeq S \times \mathbb{R}^2$.

Шаг 3. Покажем, что $\pi_1(\partial C) \cong \mathbb{Z}^2$ и $\pi_1(C) \cong \pi_1(D) \cong \mathbb{Z}$.

Рассмотрим образ α класса $[* \times S^1 \times *] \in \pi_1(S \times S^1 \times \mathbb{R}_{\geqslant 0})$ в $\pi_1(N)$ посредством изоморфизма $(I \circ s)_*^{-1}\colon \pi_1(S \times S^1 \times \mathbb{R}_{\geqslant 0}) \to \pi_1(N)$. Ясно, что α принадлежит центру $\pi_1(N)$. Класс α порождает $\mathrm{Ker}(\eta_*\colon \pi_1(N) \to \pi_1(L)) \cong \mathbb{Z}$. Можно показать, что класс $\beta := i_*\alpha$ принадлежит центру группы $\pi_1(\partial C)$ и является образующей группы $\mathrm{Ker}(i_*^{tr}\colon \pi_1(\partial C) \to \pi_1(C)) \cong \mathrm{Ker}(\phi_1\colon \pi_1(A\bigcap B) \to \pi_1(A)) \cong \mathbb{Z}$. Аналогично доказывается, что $\mathrm{Ker}(i_*^{tr}\colon \pi_1(\partial D) \to \pi_1(D)) \cong \mathrm{Ker}(\phi_2\colon \pi_1(A\bigcap B) \to \pi_1(B)) \cong \mathbb{Z}$ и принадлежит центру группы $\pi_1(\partial D) \cong \pi_1(\partial C) \cong \pi_1(A\bigcap B)$. Здесь ϕ_i — гомоморфизмы, индуцированные вложениями. Так как группа $\pi_1(L)$ почти абелева (см. [7]), группа $\pi_1(C)$ является почти полициклической (см. (1)). Известно, что всякая подгруппа почти полициклической группы является пересечением подгрупп конечного индекса (см. [10]). Теперь, используя утверждение 1, можно показать, что если гомоморфизм $\phi_1\colon \pi_1(A\bigcap B) \to \pi_1(A)$ не является эпиморфизмом, то его образ имеет индекс 2, и мы легко придем к противоречию с односвязностью M. Из аналогичных соображений гомоморфизм $\phi_2\colon \pi_1(A\bigcap B) \to \pi_1(B)$ должен быть эпиморфизмом. Отсюда легко показать, что $\pi_1(A\bigcap B)$ порождается $\operatorname{Ker}\phi_1 \bigcup \operatorname{Ker}\phi_2$, а значит, $\pi_1(\partial C) \cong \pi_1(A\bigcap B) \cong \mathbb{Z}^2$. Более того, $\pi_1(C) \cong \pi_1(D) \cong \mathbb{Z}$, а типичный слой L как в C, так и в D односвязен.

Шаг 4. Докажем, что $\partial C \simeq M_0 \times T^2$ и придем к противоречию.

Будем предполагать, что $n \geqslant 7$ (случай $n = 5$ разобран в [5]). Используя теорему об s-кобордизме, нетрудно доказать, что N диффеоморфно $E_R = S \times S^1$. В частности, отсюда легко следует, что $N \simeq M_0 \times S^1$, где класс $i_*[* \times S^1]$ представляет образующую $\operatorname{Ker}\phi_1$. Из теоремы об s-кобордизме также получаем, что $A\bigcap B$ диффеоморфно $\partial C \times I$ и ∂C диффеоморфно ∂D. Повторяя для блока D те же рассуждения, что и для блока C, и учитывая, что ∂C диффеоморфно ∂D, имеем на ∂C структуру еще одного расслоения $\xi_2\colon N' \to \partial C \to S^1$, трансверсального ξ_1. Аналогично доказывается, что $N' \simeq M_0 \times S^1$, где класс $i_*[* \times S^1]$ представляет образующую $\operatorname{Ker}\phi_2$. Теперь нетрудно показать, что $\partial C \simeq M_0 \times T^2$. Отсюда видно, что расслоения $\xi\colon L \to \operatorname{int} C \to S^1$ и $\xi'\colon L \to \operatorname{int} D \to S^1$ гомологически просты, а значит, послойные отображения расслоений $\xi_1 \to \xi$ и $\xi_2 \to \xi'$ индуцируют гомоморфизмы спектральных последовательностей этих расслоений. Теперь, применяя спектральные последовательности и дословно повторяя рассуждения, приведенные в [5, теорема 22], можно доказать, что $0 \neq [T^2] \subset \operatorname{Ker}(i_*^A, i_*^B)$ (см. (2)), откуда получаем, что $H_3(M) \neq 0$. Но это противоречит предположению, что многообразие M гомеоморфно сфере размерности $\geqslant 5$. Это противоречие завершает доказательство теоремы.

Автор выражает благодарность проф. А. А. Борисенко за плодотворные обсуждения данной работы и некоторые идеи, которые были использованы в доказательстве.

1. *Болотов Д. В.* Слоения неотрицательной кривизны на замкнутых трехмерных многообразиях // Мат. сб. – 2009. – **200**. – С. 3–16.
2. *Болотов Д. В.* Гиперслоения неотрицательной кривизны Риччи // Успехи мат. наук. – 2009. – **55**. – С. 333–334.
3. *Stuck G.* Un analogoue feuillete du theoreme de Cartan–Hadamard // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1991. – **313**. – P. 519–522.
4. *Болотов Д. В.* О структуре слоений коразмерности один неотрицательной кривизны // Тр. конф. “Актуальные проблемы современной математики, механики и информатики” ХНУ им. В. Н. Каразина. – Харьков: Апостроф, 2011. – С. 324–331.
5. *Болотов Д. В.* Топология слоений коразмерности 1 неотрицательной кривизны // Мат. сб. – 2013. – **204**, No 5. – С. 3–24.
6. *Adams S., Stuck G.* Splitting of non-negatively curved leaves in minimal sets of foliations // Duke Math. J. – 1993. – **71**. – P. 71–92.
7. *Cheeger J., Gromoll D.* On structure of complete manifolds of nonnegative curvature // Ann. Math. – 1972. – **96**. – P. 413–443.
8. *Plante J.* A generalization of the Poincaré–Bendixson theorem for foliations of codimension 1 // Topology. – 1973. – **12**. – P. 177–181.
9. *Nishimori T.* Compact leaves with abelian holonomy // Tohoku Math. J. – 1975. – **27**. – P. 259–272.
10. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Уч. зап. Иванов. пед. ин-та. – 1958. – **18**. – С. 49–60.

Физико-технический институт низких температур НАН Украины им. Б. И. Веркина, Харьков

Поступило в редакцию 29.01.2014

Д. В. Болотов

Про шарування сфер

Дається відповідь на питання Г. Штака про існування на сферах шарувань ковимірності один невід'ємної кривини.

D. V. Bolotov

On foliations of spheres

We give an answer on G. Stuck's question about the existence of codimension-one foliations with nonnegative curvature on spheres.